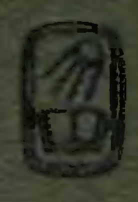
СПРАВОЧНИК по МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ НАУЧНЫХ РАБОТНИКОВ И ИНЖЕНЕРОВ

Г. КОРН и Т. КОРН

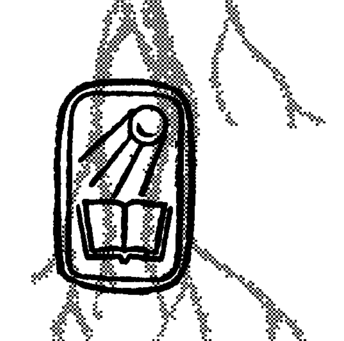


Г. КОРН и Т. КОРН

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ НАУЧНЫХ РАБОТНИКОВ И ИНЖЕНЕРОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ТЕОРЕМЫ, ФОРМУЛЫ

Перевод со второго американского переработанного издания
И. Г. АРАМАНОВИЧА, А. М. БЕРЕЗМАНА,
И. А. ВАЙНШТЕЙНА, Л. З. РУМШИСКОГО, Л. Я. ЦЛАФА
Под общей редакцией И. Г. АРАМАНОВИЧА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

51
К67
УДК 510

Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Г. Корн, Т. Корн.

«Справочник» содержит сведения по следующим разделам: высшая алгебра, аналитическая и дифференциальная геометрия, математический анализ (включая интегралы Лебега и Стилтьеса), векторный и тензорный анализ, криволинейные координаты, функции комплексного переменного, операционное исчисление, дифференциальные уравнения обыкновенные и с частными производными, вариационное исчисление, абстрактная алгебра, матрицы, линейные векторные пространства, операторы и теория представлений, интегральные уравнения, краевые задачи, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы анализа, специальные функции.

В настоящем издании заново написаны главы 11, 20 и значительная часть глав 13 и 18. Книга пополнилась значительным количеством новых разделов.

MATHEMATICAL HANDBOOK

FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS

DEFINITIONS, THEOREMS AND FORMULAS FOR REFERENCE AND REVIEW

SECOND, ENLARGEND AND REVISED EDITION

GRANINO A. KORN, PH. D.,
THERESA M. KORN, M. S.

McGraw-Hill Book Company
New York San Francisco Toronto London Sydney, 1968

К $\frac{0223-1741}{042(02)\text{-}73}$ 75-73

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 2

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ГЛАВА 3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

ГЛАВА 4

ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ГЛАВА 5
ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

ГЛАВА 6
СИСТЕМЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

ГЛАВА 7
ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ГЛАВА 8

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И ДРУГИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ГЛАВА 9

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА 10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ГЛАВА 11

МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ

ГЛАВА 12

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ: СОВРЕМЕННАЯ (АБСТРАКТНАЯ) АЛГЕБРА И АБСТРАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

ГЛАВА 14

ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ). ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАТРИЦАМИ

ГЛАВА 15

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

ГЛАВА 16

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

ГЛАВА 17
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ГЛАВА 18
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

ГЛАВА 19

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ГЛАВА 20

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ

ГЛАВА 21

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

ПЕРЕЧЕНЬ ТАБЛИЦ

Глава 19

Глава 20

Глава 21

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКОВ

Книгу Г. Корна и Т. Корн «Справочник по математике (для научных работников и инженеров)» отличает весьма широкий охват материала. В ней освещаются почти все вопросы как общего курса математики, так и большинства специальных разделов, изучаемых во втузах с повышенной программой по математике (векторный и тензорный анализ, криволинейные координаты, уравнения математической физики, функции комплексного переменного и операционное исчисление, вариационное исчисление, линейная алгебра, теория вероятностей и математическая статистика и т. д.). Кроме того, в книгу включены главы, посвященные современной алгебре, теории интегралов Лебега и Стилтьеса, римановой геометрии, интегральным уравнениям, специальным функциям, а также целому ряду других вопросов, далеко выходящих за рамки математической подготовки инженеров, но постепенно становящихся необходимым орудием для научных работников и инженеров-исследователей, работающих в самых разных областях. Много внимания уделено связи рассматриваемых математических проблем с прикладными дисциплинами (методы расчета и синтеза электрических цепей, линейные и нелинейные колебания и др.).

В новом издании книга подверглась весьма существенной переработке. Заново написаны главы 11 и 20 и значительная часть глав 13 и 18; и без того обширный материал книги пополнился новыми разделами: дискретное преобразование Лапласа (z-преобразование), конечные интегральные преобразования, матричные методы решения систем дифференциальных уравнений, теория устойчивости Ляпунова, математическое программирование, принцип максимума Понтрягина, шаговые задачи управления и динамическое программирование — вот далеко не полный перечень того, что добавлено авторами. Кроме того, из дополнений в книгу включены справочные сведения по геометрии и сферической тригонометрии.

Конечно, можно иметь различные точки зрения на то, какой материал следует включать в такого рода справочник; кроме того, в одной книге невозможно изложить все разделы с одинаковой степенью полноты. Однако, как нам кажется, ответы на вопросы, не нашедшие отражения в книге, следует искать уже либо в монографиях, либо в специализированных справочных руководствах (типа отдельных выпусков серии «Справочная математическая библиотека», выпускаемой Главной редакцией физико-математической литературы издательства «Наука»).

В книге принята следующая рубрикация: глава, параграф, пункт; названия всех пунктов указаны в оглавлении. Сплошная нумерация формул (и таблиц) ведется в пределах одного параграфа; соответственно этому, если в тексте нужно сослаться на формулу этого же параграфа, то указывается только ее номер. При перекрестных ссылках указывается полностью номер главы, параграфа и пункта. В конце книги приводится подробный предметный указатель, а также указатель важнейших обозначений; во всех случаях читатель отсылается к соответствующему пункту.

В процессе перевода был обнаружен ряд дефектов и неточностей; кроме того, в некоторых случаях изложение не соответствовало принятому в нашей отечественной литературе. Переводчики учитывали справочный характер книги, и для удобства читателя большинство исправлений, замен и дополнений вносилось прямо в текст. Принадлежащие переводчикам дополнения и подстрочные примечания

отмечены звездочками. Пункты, подвергшиеся значительной переработке, также отмечены звездочками.

Нам пришлось в значительной мере заменить цитируемую литературу; во многих случаях ссылки делались на неизвестные нашему читателю учебные руководства. Приведенный в конце книги список литературы (ссылки на него помещены в квадратные скобки) меньше всего претендует хотя бы на относительную полноту; в него лишь включены наиболее известные издания (при этом мы сочли возможным не указывать обычные втузовские курсы математики).

Значительной переработке подверглись дополнения в книге, включающие разного рода таблицы. Ради уменьшения объема книги некоторые широко распространенные таблицы были изъяты, а остальные помещены в соответствующие разделы «Справочника». Перечень всех имеющихся в книге таблиц приведен после оглавления на стр. 20—22.

Мы признательны всем читателям, обратившим наше внимание на те или иные недочеты книги, и будем рады дальнейшим откликам на новое издание.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРОВ КО ВТОРОМУ АМЕРИКАНСКОМУ ИЗДАНИЮ

Новое издание «Справочника по математике» существенно расширено и дополнено оригинальным материалом. Включены новые разделы, посвященные *z-преобразованию, матричным методам решения систем дифференциальных уравнений, теории устойчивости, представлению вращений, математическому программированию, теории оптимального управления, случайным процессам* и т. д. Глава о численных методах почти целиком написана заново. Добавлены многие примеры и таблицы.

Эту книгу можно рассматривать, во-первых, как достаточно полное собрание математических определений, теорем и формул для научных работников, инженеров и студентов. Ею могут пользоваться читатели, стоящие на разных уровнях математического развития. Отсутствие доказательств и сжатость табличного представления родственных формул сделали возможным объединение весьма большого по объему справочного материала в одном томе.

Книга, однако, предназначена не только для наведения справок; в ней мы пытались дать связное обозрение математических методов, применяемых в различных приложениях. Каждая глава озаглавлена так, чтобы читатель мог быстро ориентироваться в данном разделе математики. Такое изложение делает текст удобным для пользования благодаря отсутствию доказательств; многочисленные ссылки открывают доступ к более детальному изучению материала книги.

Особое внимание уделяется выявлению взаимосвязи различных разделов и их роли в научных и инженерных приложениях; это достигается при помощи соответствующих вводных замечаний и перекрестных ссылок.

Авторы пытались удовлетворить запросы разных кругов читателей, разделив материал книги на три группы:

1. Наиболее важные определения и формулы, специально выделенные для наиболее быстрого их обозрения.

2. Основной текст, состоящий из сжатого и связного обзора основных результатов.

3. Более детальное обсуждение дополнительных вопросов, выделенное мелким шрифтом. При таком построении включение этого материала не нарушает структуры основного изложения.

Главы с 1 по 5 дают обзор основного курса колледжа *) по *алгебре, аналитической геометрии* и *анализу;* глава 4 содержит также изложение *интегралов Лебега и Стилтьеса* и *рядов и интегралов Фурье,* а глава 5 — *векторный анализ.*

Главы 6, 7 и 8 посвящены *криволинейным координатам, функциям комплексного переменного* и *преобразованиям Лапласа.* Добавлен новый материал по *конечным интегральным преобразованиям* и *z-преобразованию.*

В главах 9 и 10 излагаются *обыкновенные дифференциальные уравнения* и *уравнения с частными производными,* включая *методы интегральных преобразований, метод характеристик* и *теорию потенциала;* проблемы собственных значений трактуются в главе 15.

Глава 11 существенно изменилась; в дополнении к обычной *теории экстремума* и *классического вариационного исчисления* здесь добавлены разделы по *линейному*

---

*) Это примерно соответствует общему курсу математики, изучаемому в наших втузах. (*Прим. ред.*)

и нелинейному программированию, теории игр, теории оптимального управления, принципу максимума и *динамическому программированию.*

В главе 12 вводятся элементы современного абстрактного языка и описывается конструкция математических моделей, таких, как *группы, кольца, поля, векторные пространства, булевы алгебры* и *метрические пространства.* Изучение функциональных пространств, продолженное в 14-й главе, позволяет расширить применение методов функционального анализа к краевым задачам и проблемам собственных значений в главе 15.

Разделы, имеющие дело с более специальными темами, не претендуют на полноту; их цель заключается в том, чтобы познакомить читателя с сущностью определений и побудить его к чтению современной специальной литературы.

В главе 13 рассмотрены *матрицы*; здесь добавлены новые пункты по *матричным методам решения систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений* и по *теории устойчивости Ляпунова.* В главе 14 рассмотрены *линейные векторные пространства, линейные преобразования* (*линейные операторы*), *задачи о собственных значениях* и описывается *применение матриц для представления математических моделей.* Дополнен материал по *представлению вращений*, в связи с его важностью для физики.

Глава 15 содержит изложение разделов, связанных с *проблемой собственных значений,* включая *задачу Штурма — Лиувилля, краевые задачи для двумерных и трехмерных областей* и *линейные интегральные уравнения.*

Главы 16 и 17 соответственно касаются *тензорного анализа* и *дифференциальной геометрии* и включают описание *плоских и пространственных линий, поверхностей и кривизны пространства.*

В связи с возрастающей ролью статистических методов глава 18 представляет довольно детальное изложение *теории вероятностей* и включает заново написанное введение в *теорию случайных процессов, корреляционных функций* и *спектров.* Глава 19 касается важнейших *методов математической статистики* и включает подробные таблицы формул, описывающих специальные выборочные распределения.

В новой главе 20 рассмотрены *конечно-разностные методы* и *разностные уравнения* и изложены основные *методы численного анализа.* Глава 21 представляет по существу собрание формул, описывающих свойства *высших трансцендентных функций.*

Авторы надеются и верят, что эта книга даст читателю удобный повод детально познакомиться с математическими методами и таким образом расширить свой кругозор и взглянуть на свои специальные знания с более общей точки зрения.

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ И ТРИГОНОМЕТРИЯ (ПЛОСКАЯ И СФЕРИЧЕСКАЯ)

1.1. ВВЕДЕНИЕ. СИСТЕМА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1.1-1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ. Эта глава посвящена алгебре[1]) действительных и комплексных чисел, т. е. изучению тех соотношений между действительными и комплексными числами, в которые входит конечное число сложений и умножений. Уравнения, основанные на таких соотношениях, рассматриваются здесь даже и в том случае, если при фактическом их точном численном решении нельзя обойтись конечным числом сложений и/или умножений*). Определения и соотношения, изложенные в этой главе, служат основным орудием во многих более общих математических моделях (см. также п. 12.1-1).

1.1-2. Действительные числа. Сложение и умножение действительных чисел обладают следующими свойствами.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Если } a \text{ и } b \text{ — действительные числа (алгебраические, рациональные, целые, положительные целые), то таковыми же являются } a+b \text{ и } ab \ (\textit{замкнутость}),\\ a+b=b+a,\ ab=ba\ (\textit{коммутативность}),\\ \left.\begin{array}{l} a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c,\\ a(bc)=(ab)c=abc \end{array}\right\}(\textit{ассоциативность}),\\ a\cdot 1=a\ (\textit{единица}),\\ a(b+c)=ab+ac\ (\textit{дистрибутивность}),\\ \text{из } a+c=b+c \quad \text{следует } a=b,\\ \text{из } ca=cb,\ c\neq 0, \quad \text{следует } a=b\ (\textit{сокращение}).\end{array}\right\} \quad (1.1\text{-}1)$$

Действительное число 0 (**нуль**) обладает свойствами

$$\left.\begin{array}{r} a+0=a,\\ a\cdot 0=0 \end{array}\right\} \qquad (1.1\text{-}2)$$

для каждого действительного числа a.

(Единственное) **противоположное число** $-a$ и (единственное) **обратное число** $a^{-1}=1/a$ для действительного числа a определяются соответственно так:

$$a+(-a)=a-a=0, \qquad aa^{-1}=1 \qquad (a\neq 0). \qquad (1.1\text{-}3)$$

Делить на нуль нельзя.

Помимо «алгебраических» свойств (1), класс **положительных целых**, или **натуральных**, чисел 1, 2, ... обладает свойством **упорядоченности** (п. 12.6-2; n «больше, чем» m, или $n>m$, если $n=m+x$, где x — некоторое натуральное число) и **полной упорядоченности** (каждое непустое множество натуральных чисел имеет наименьший элемент). *Множество натуральных чисел, содержащее число* 1 *и для каждого из своих элементов* n *следующий за ним* элемент $n+1$, *содержит все натуральные числа* (п р и н ц и п п о л н о й и н д у к ц и и).

Свойства натуральных чисел могут быть выведены из **пяти аксиом Пеано**: 1) 1 есть натуральное число; 2) для каждого натурального числа N существует единственное следующее за ним натуральное число $S(n)$; 3) $S(n)\neq 1$; 4) из $S(n)=S(m)$ следует $n=m$ и 5) имеет место принцип полной индукции. (При его формулировке элемент, следующий

---

[1]) См. также подстрочное примечание к п. 12.1-2.

*) Термин «A и/или B» (по английски «and/or») означает, что имеет место или A, или B, или A и B вместе. Этот термин применяется в дальнейшем очень часто.

за n, обозначается через $S(n)$.) Сложение и умножение, подчиняющиеся правилам (1.1-1), определяются «рекуррентными» соотношениями

$$\begin{gathered} n+1=S(n), \\ n+S(m)=S(n+m), \\ n\cdot 1=n, \\ n\cdot S(m)=n\cdot m+n. \end{gathered}$$

Целыми числами называются числа вида $n, -n$ и 0, где n — натуральное число, а *рациональными* — числа вида p/q, где p и q — целые числа и $q \neq 0$.

Действительные числа можно ввести, исходя из множества рациональных чисел, с помощью предельного процесса (см., например, [4.2]). Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются **иррациональными**.

Действительными **алгебраическими** числами называются действительные корни алгебраических уравнений с целочисленными коэффициентами (п. 1.6-3), а действительными **трансцендентными** числами — остальные действительные числа.

Класс всех рациональных чисел содержит корни всех линейных уравнений (п. 1.8-1) с рациональными коэффициентами и включает в себя все целые числа. Класс всех действительных алгебраических чисел содержит действительные корни всех алгебраических уравнений (п. 1.6-3) с алгебраическими коэффициентами и включает в себя все рациональные числа.

1.1-3. Отношение равенства (см. также п. 12.1-3). Из $a=b$ следует $b=a$ (*симметрия* отношения равенства), $a+c=b+c$ и $ac=bc$ (вообще $f(a)=f(b)$, если $f(a)$ обозначает некоторую операцию, приводящую к единственному результату). Из $a=b$ и $b=c$ следует $a=c$ (*транзитивность* отношения равенства). Из $ab \neq 0$ следует $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

1.1-4. Отношение тождества. Вообще говоря, уравнение относительно какой-либо величины x или нескольких величин $x_1, x_2, \ldots$ будет удовлетворяться только при некоторых специальных значениях x или специальных множествах значений $x_1, x_2, \ldots$ (см. также п. 1.6-2). Если хотят подчеркнуть тот факт, что какое-нибудь уравнение удовлетворяется при всех значениях x или $x_1, x_2, \ldots$ в известных представляющих интерес пределах, то вместо символа $=$ иногда пользуются символом тождества $\equiv$ (п р и м е р: $(x-1)(x+1) \equiv x^2-1$), а пределы изменения рассматриваемых переменных иногда указывают справа от уравнения. Символ $a \equiv b$ употребляется также в смысле: «a по определению равно b».

1.1-5. Неравенства (см. также пп. 12.6-2 и 12.6-3). *Действительное число a может быть положительно* $(a>0)$, *отрицательно* $(a<0)$ *или равно нулю* $(a=0)$. Сумма и произведение положительных чисел положительны.

Действительное число a больше действительного числа b $(a>b,\ b<a)$, *если $a=b+x$, где x — некоторое действительное положительное число.* Из $a>b$ следует $a+c>b+c$, $ac>bc$, если $c>0$, и $ac<bc$, если $c<0$ (в частности, $-a<-b$), $1/a<1/b$, если $ab>0$ и $1/a>1/b$, если $ab<0$.

Из $a \geqslant b$ и $b \geqslant c$ следует $a \geqslant c$. Из $a \leqslant A$ и $b \leqslant B$ следует $a+b \leqslant A+B$.

1.1-6. Абсолютные величины (см. также пп. 1.3-2 и 14.2-5). **Абсолютная величина** $|a|$ действительного числа a по определению есть число, равное a, если $a \geqslant 0$, и равное $-a$, если $a<0$. Отметим:

$$\left.\begin{array}{l} |a| \geqslant 0; \text{ из } |a|=0 \text{ следует } a=0, \\ \big||a|-|b|\big| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|, \\ \big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b| \leqslant |a|+|b|; \end{array}\right\} \qquad (1.1\text{-}4)$$

$$|ab|=|a|\,|b|, \qquad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|} \qquad (b \neq 0). \qquad (1.1\text{-}5)$$

$$\text{Из } |a| \leqslant A \text{ и } |b| \leqslant B \text{ следует } |a+b| \leqslant A+B \text{ и } |ab| \leqslant AB. \qquad (1.1\text{-}6)$$

1.2. СТЕПЕНИ, КОРНИ, ЛОГАРИФМЫ И ФАКТОРИАЛЫ. ОБОЗНАЧЕНИЯ СУММ И ПРОИЗВЕДЕНИЙ

1.2-1. Степени и корни. В случае, когда показатель степени n есть натуральное число, **n-я степень** произвольного действительного числа a **(основания степени)** есть произведение n множителей, равных a. При $a \neq 0$ по определению $a^0=1$. Если $a>0$ и n — любое натуральное число, то **арифметический корень n-й степени** из a есть единственное положительное решение уравнения

$x^n = a$; он обозначается символом $a^{1/n} \equiv \sqrt[n]{a}$. При $a = 0$, $0^{1/n} \equiv \sqrt[n]{0} = 0$. Если же $a < 0$, то корень n-й степени из a определяется лишь при нечетном n. Именно, $a^{1/n} \equiv \sqrt[n]{a}$ есть в этом случае единственное действительное (на самом деле отрицательное) решение уравнения $x^n = a$. Пусть теперь $a \geqslant 0$. Если $p = n/m$, где n и m — натуральные числа, то по определению

$$a^p = (a^{1/m})^n = (a^n)^{1/m} \text{ и } a^{-p} = 1/a^p \quad (a \neq 0).$$

При любых натуральных n и m

$$\left.\begin{aligned} a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n, \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \\ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{1.2-1}$$

Степени с иррациональными показателями могут быть введены с помощью некоторого предельного процесса (см. также п. 21.2-12). Соотношения

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \qquad (a^p)^q = a^{pq} \qquad (a > 0), \tag{1.2-2}$$

верные для рациональных показателей, остаются справедливыми и для любых действительных p и q. Далее, для любых действительных p и q ($a > 0$ и $b > 0$)

$$\left.\begin{aligned} a^{-p} = \frac{1}{a^p}, \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \\ (ab)^p = a^p b^p, \quad \left(\frac{a}{a}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}. \end{aligned}\right\} \tag{1.2-3}$$

Замечание. $\sqrt[2]{a}$ (квадратный корень из числа $a \geqslant 0$) обычно обозначается символом $\sqrt{a}$. О степенях комплексных чисел и корнях из них см. п. 1.3-3.

1.2-2. Формулы для уничтожения иррациональности в знаменателе дроби.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b}\sqrt{b}, \qquad \frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{b^{n-1}}, \tag{1.2-4}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} = \frac{a}{b - c}\left(\sqrt{b} \mp \sqrt{c}\right), \qquad \frac{a}{\sqrt{b + \sqrt{c}}} = \frac{a}{b^2 - c}\sqrt{(b^2 - c)\,(b - \sqrt{c})}, \tag{1.2-5}$$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b} \pm \sqrt[3]{c}} = \frac{a}{b \pm c}\left(\sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2}\right). \tag{1.2-6}$$

1.2-3. Логарифмы. Логарифм $x = \log_c a$ числа $a > 0$ при основании $c > 0$ ($c \neq 1$) можно определить как решение уравнения

$$c^x = a. \tag{1.2-7}$$

В табл. 7.2-1 и в п. 21.2-10 приведены некоторые более общие сведения о логарифмах. $\log_c a$ может быть трансцендентным числом (п. 1.1-2). Отметим:

$$\left.\begin{aligned} & c^{\log_c a} = a, \ \log_c c = 1, \ \log_c c^p = p, \ \log_c 1 = 0, \\ & \log_c (ab) = \log_c a + \log_c b \ \textit{(основное свойство логарифмов)}, \\ & \log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b, \\ & \log_c a^p = p \log_c a, \ \log_c \left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{n}\log_c a; \end{aligned}\right\} \tag{1.2-8}$$

$$\log_{c'} a = \log_c a \cdot \log_{c'} c = \frac{\log_c a}{\log_c c'}, \ \log_{c'} c = \frac{1}{\log_c c'} \ \textit{(замена основания)}. \tag{1.2-9}$$

Особый интерес представляют *десятичные* логарифмы с основанием 10 и *натуральные* (*неперовы*) логарифмы с основанием

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}718281828\ldots \qquad (1.2\text{-}10)$$

e — трансцендентное число. Логарифм $\log_e a$ обозначается символом $\ln a$, а $\log_{10} a$ — символом $\lg a$. Отметим:

$$\left.\begin{aligned} \ln a&=\frac{\lg a}{\lg e}=\ln 10\cdot\lg a=(2{,}30259\ldots)\lg a,\\ \lg a&=\frac{\ln a}{\ln 10}=\lg e\cdot\ln a=(0{,}43429\ldots)\ln a. \end{aligned}\right\} \qquad (1.2\text{-}11)$$

1.2-4. Факториалы. Факториал $n!$ произвольного целого числа $n\geqslant 0$ определяется формулами:

$$0!=1,\qquad n!=\prod_{k=1}^{n}k=1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)n \qquad (n>0). \qquad (1.2\text{-}12)$$

В п. 21.4-2 приведены приближенные формулы для вычисления факториалов $n!$ при больших n.

1.2-5. Обозначения сумм и произведений. Для любых двух целых чисел (положительных, отрицательных или равных нулю) n и $m\geqslant n$

$$\sum_{k=n}^{m}a_k\equiv a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{m-1}+a_m \quad (m-n+1 \text{ слагаемых}), \qquad (1.2\text{-}13)$$

$$\prod_{k=n}^{m}a_k\equiv a_n a_{n+1}\ldots a_{m-1}a_m \quad (m-n+1 \text{ множителей}). \qquad (1.2\text{-}14)$$

Отметим:

$$\sum_{i=n}^{m}\sum_{k=n'}^{m'}a_{ik}=\sum_{k=n'}^{m'}\sum_{i=n}^{m}a_{ik},\qquad \prod_{i=n}^{m}\prod_{k=n'}^{m'}a_{ik}=\prod_{k=n'}^{m'}\prod_{i=n}^{m}a_{ik}. \qquad (1.2\text{-}15)$$

Бесконечные ряды см. в гл. 4.

1.2-6. Арифметическая прогрессия. Если a_0 — первый член, а d — постоянная разность между следующим и предыдущим членами, называемая *разностью прогрессии*, то

$$a_j=a_0+jd \qquad (j=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

$$s_n=\sum_{j=0}^{n}a_j=\frac{n+1}{2}(2a_0+nd)=\frac{n+1}{2}(a_0+a_n). \qquad (1.2\text{-}16)$$

1.2-7. Геометрическая прогрессия. Если a_0 — первый член, а $r\neq 1$ — постоянное отношение следующего члена к предыдущему, называемое *знаменателем прогрессии*, то

$$a_j=a_0r^j\ (j=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

$$s_n=\sum_{j=0}^{n}a_j=\sum_{j=0}^{n}a_0r^j=a_0\frac{1-r^{n+1}}{1-r}=\frac{a_0-a_nr}{1-r}. \qquad (1.2\text{-}17)$$

О бесконечной геометрической прогрессии см. п. 4.10-2.

1.2-8. Некоторые числовые суммы (см. также [4.6]).

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \qquad \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

(общую формулу для сумм $\sum_{k=1}^{n} k^N$ см. в п. 4.8-5, d).

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

Бесконечные ряды см. в 4.8.

1.3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.3-1. Вводные замечания (см. также п. 7.1-1). **Комплексные числа** (иногда называемые *мнимыми* числами) не являются числами в элементарном смысле слова, применяемыми при подсчетах и измерениях. Они составляют новый класс математических объектов, определяемый описанными ниже свойствами (см. также п. 12.1-1).

Каждому комплексному числу c можно поставить в соответствие единственную пару (a, b) действительных чисел a и b и обратно. Сумма и произведение двух комплексных чисел $c_1 \leftrightarrow (a_1, b_1)$ и $c_2 \leftrightarrow (a_2, b_2)$ определяются соответственно следующим образом: $c_1 + c_2 \leftrightarrow (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ и $c_1c_2 \leftrightarrow (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$. Действительные числа a содержатся в классе комплексных чисел в качестве пар $(a, 0)$. **Мнимая единица** i, определяемая условием $i \leftrightarrow (0,1)$, удовлетворяет соотношению

$$i^2 = -1. \tag{1.3-1}$$

Каждое комплексное число $c \leftrightarrow (ab,)$ может быть записано в виде суммы $c = a + ib$ действительного числа $a \leftrightarrow (a, 0)$ и **чисто мнимого** числа $ib \leftrightarrow (0, b)$. Действительные числа $a = \operatorname{Re} c$ и $b = \operatorname{Im} c$ соответственно называются **действительной частью** и **мнимой частью** комплексного числа c. Два комплексных числа $c = a + ib$ и $\bar{c} = a - ib$, имеющие одинаковые действительные и противоположные мнимые части, называются **сопряженными** комплексными числами.

Два комплексных числа $c_1 = a_1 + ib_1$ и $c_2 = a_2 + ib_2$ равны в том и только в том случае, если соответственно равны их действительные и мнимые части, т. е. $c_1 = c_2$, лишь если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. Из $c = a + ib = 0$ следует $a = b = 0$.

Сложение и умножение комплексных чисел удовлетворяют правилам пп. 1.1-2 и 1.2-1, причем

$$\left.\begin{aligned} &i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\\ &i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i,\ i^{4n}=1\ (n=0,\ 1,\ 2,\dots); \end{aligned}\right\} \quad (1.3\text{-}2)$$

$$\left.\begin{aligned} &c_1\pm c_2=(a_1\pm a_2)+i\,(b_1\pm b_2),\\ &c_1c_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i\,(a_1b_2+a_2b_1),\\ &\frac{c_1}{c_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i\,(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}\quad (c_2\neq 0),\\ &\overline{c_1+c_2}=\bar{c}_1+\bar{c}_2,\quad \overline{c_1c_2}=\bar{c}_1\bar{c}_2,\quad (\overline{c_1/c_2})=\bar{c}_1/\bar{c}_2\ (c_2\neq 0),\quad \bar{\bar{c}}=c,\\ &a=\operatorname{Re}c=\frac{c+\bar{c}}{2},\quad b=\operatorname{Im}c=\frac{c-\bar{c}}{2i}. \end{aligned}\right\} \quad (1.3\text{-}3)$$

Класс всех комплексных чисел содержит корни всех алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами и включает в себя действительные числа.

1.3-2. Изображение комплексных чисел точками или радиусами-векторами. Тригонометрическая форма комплексного числа (см. также п. 7.2-2). Комплексное число $z=x+iy$ удобно изображать точкой $(z)\equiv(x,\ y)$ или соответствующим радиусом-вектором (пп. 2.1-2 и 3.1-5) на **комплексной плоскости** (рис. 1.3-1). Оси Ox и Oy (в прямоугольной декартовой системе координат) называются соответственно **действительной** и **мнимой** осью. Абсцисса и ордината каждой точки (z) изображают соответственно действительную часть x и мнимую часть y числа z. Соответствующие полярные координаты (п. 2.1-8)

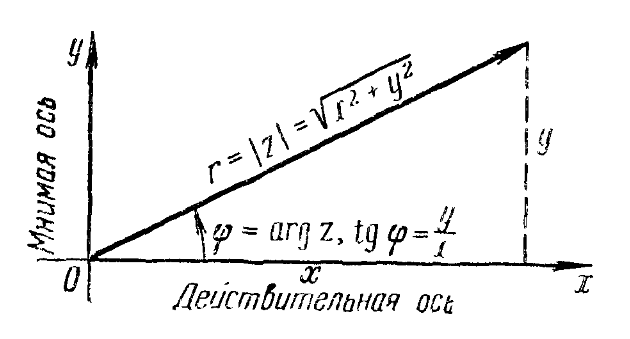


Рис. 1.3-1. Изображение комплексных чисел точками или радиусами-векторами. Оси Ox и Oy называются соответственно действительной и мнимой осью.

$$\left.\begin{aligned} &r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}=|\bar{z}|,\\ &\varphi=\operatorname{Arg}z,\qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}\qquad (x\neq 0) \end{aligned}\right\} \quad (1.3\text{-}4)$$

называются **модулем** и **аргументом** комплексного числа z. Отметим:

$$\left.\begin{aligned} &x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi,\\ &z=x+iy=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi). \end{aligned}\right\} \quad (1.3\text{-}5)$$

Модули комплексных чисел удовлетворяют соотношениям (1.1-4)—(1.1-6). Если z — действительное число, то его модуль $|z|$ равен его абсолютной величине (п. 1.1-6).

* Аргумент комплексного числа z определяется с точностью до слагаемого $2k\pi$, где k — любое целое число.

В качестве *главного значения* $\operatorname{Arg}z$ обычно выбирают значение, определенное неравенствами $-\pi<\operatorname{Arg}z\leqslant\pi$. Главное значение аргумента z обозначают через $\arg z$. При принятом условии $\arg\bar{z}=-\arg z$. *

Для любых двух множеств (действительных или) комплексных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^2 \ (\textit{неравенство Коши — Буняковского}) \quad (1.3\text{-}6)$$

(см. также пп. 14.2-6 и 14.2-6, а).

1.3-3. Представление суммы, произведения и частного. Степени и корни. Сумме комплексных чисел соответствует сумма соответствующих радиусов-векторов (см. также п. п. 3.1-5 и 5.2-2). Если даны $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_2)$

и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$\left.\begin{aligned} & z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)], \\ & \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right] \quad (z_2 \neq 0) \\ & z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \\ & \qquad (n \text{ — целое число}) \ (\textit{формула Муавра}). \end{aligned}\right\} \quad (1.3\text{-}7)$$

Случай, когда показатели степени комплексны, см. в п. 21.2-9.

Если n — натуральное число и c — комплексное число, то $\sqrt[n]{c}$ (корень n-й степени из c) есть решение уравнения $z^n = c$. При $c \neq 0$ существует ровно n различных корней n-й степени из c. Они определяются формулами

$$\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{|c|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

где $\sqrt[n]{|c|}$ — арифметический корень из положительного числа $|c|$ (п. 1.2-1), $\varphi = \arg c$ и $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Отметим, что

$$\left.\begin{aligned} & \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \\ & \sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}, \end{aligned}\right\} \quad (1.3\text{-}8)$$

$$(n = 1, 2, \ldots; \quad k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

В частности,

$$\sqrt{1} = \pm 1, \quad \sqrt{-1} = \pm i, \qquad (1.3\text{-}9)$$

$$\left.\begin{aligned} & \sqrt[3]{1} = \begin{cases} 1 \\ \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \\ \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \\ & \sqrt[3]{-1} = \begin{cases} -1, \\ \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \\ \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (1.3\text{-}10)$$

1.4. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМУЛЫ

1.4-1. Бином Ньютона и родственные формулы. Если a, b и c — действительные или комплексные числа, то

$$\left.\begin{aligned} & (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \\ & (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, \\ & (a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j a^{n-j} b^j \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ & \text{где} \\ & C_n^j \equiv \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots \leqslant n = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \quad (1.4\text{-}1)$$

(*Бином Ньютона* для целочисленных показателей n; см. также п. 21.2-12.) **Биномиальные коэффициенты** C_n^j подробно рассматриваются в п. 21.5-1

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc; \tag{1.4-2}$$

$$\left.\begin{aligned} a^2-b^2 &= (a+b)(a-b), \\ a^2+b^2 &= (a+ib)(a-ib). \end{aligned}\right\} \tag{1.4-3}$$

Если n — *любое* натуральное число, то

$$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}). \tag{1.4-4}$$

Если n — *четное* положительное число, то

$$a^n-b^n = (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}-b^{n-1}). \tag{1.4-5}$$

Если n — *нечетное* положительное число, то

$$a^n+b^n = (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Отметим также:

$$a^4+a^2b^2+b^4 = (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2). \tag{1.4-6}$$

1.4-2. Пропорции. Из $a:b=c:d$ или $a/b=c/d$ следует:

$$\frac{ma+nb}{pa+qb} = \frac{mc+nd}{pc+qd} \text{ (производные пропорции)}. \tag{1.4-7}$$

В частности,

$$\frac{a\pm b}{b} = \frac{c\pm d}{d}, \qquad \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}. \tag{1.4-8}$$

1.4-3. Многочлены. Симметрические функции.

(a) **Многочлен (целая рациональная функция)** относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть сумма конечного числа членов вида $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$, где каждое k_j есть неотрицательное целое число. Наибольшее значение суммы $k_1+k_2+\ldots+k_n$, встречающееся в каком-либо из членов, называется **степенью** многочлена. Многочлен называется **однородным**, если все его члены имеют одну и ту же степень (см. также п. 4.5-5).

(b) Многочлен относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется **симметрическим**, если для любого множества значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значение этого многочлена не изменяется при какой угодно перестановке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (это определение распространяется и на любые функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$). **Элементарными симметрическими функциями** от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются многочлены $S_1, S_2, \ldots, S_n$, определяемые следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &S_1 \equiv x_1+x_2+\ldots+x_n, \quad S_2 \equiv x_1x_2+x_1x_3+\ldots, \\ &S_3 \equiv x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots, \quad S_n \equiv x_1x_2\ldots x_n, \end{aligned}\right\} \tag{1.4-9}$$

где S_k — есть сумма всех $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ произведений, каждое из которых содержит k сомножителей x_j с несовпадающими индексами. *Каждый симметрический многочлен относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ может быть единственным образом записан как многочлен относительно $S_1, S_2, \ldots, S_n$*; коэффициенты этого нового многочлена являются алгебраическими суммами целочисленных кратных заданных коэффициентов.

Каждый симметрический многочлен относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ может также быть выражен как многочлен относительно конечного числа симметрических функций

$$s_0 \equiv n, \; s_1 \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i, \; s_2 \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \; \ldots, \; s_k \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^k, \; \ldots \tag{1.4-10}$$

Симметрические функции (9) и (10) связаны *формулами Ньютона*

$$\left.\begin{aligned} &s_k - s_{k-1}S_1 + s_{k-2}S_2 - \ldots + (-1)^{k-1}s_1 S_{k-1} + (-1)^k kS_k = 0 \quad (k \leqslant n), \\ &s_k - s_{k-1}S_1 + s_{k-2}S_2 - \ldots + (-1)^n s_{k-n}S_n = 0 \quad (k > n) \end{aligned}\right\} \quad (1.4\text{-}11)$$

(см. также п. 1.6-4). Заметим, что в соотношения (11) в явном виде не входит n.

1.5. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.5-1. Определение. Определитель (детерминант)

$$D = \det [a_{ik}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.5\text{-}1)$$

квадратной таблицы (матрицы, п. 13.2-1) с n^2 (действительными или комплексными) числами (**элементами**) a_{ik} есть сумма $n!$ членов $(-1)^r a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{nk_n}$, каждый из которых соответствует одному из $n!$ различных упорядоченных множеств $k_1, k_2, \ldots, k_n$, полученных r попарными перестановками (транспозициями) элементов из множества $1, 2, \ldots, n$. Число n есть **порядок** определителя (1).

Фактическое вычисление определителя по его элементам упрощается с помощью пп. 1.5-2 и 1.5-5,а. Отметим, что

$$|D|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \quad \textit{(неравенство Адамара)}. \quad (1.5\text{-}2)$$

1.5-2. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или по столбцу. (Дополнительный) **минор** D_{ik} элемента a_{ik} в определителе n-го порядка (1) есть определитель $(n-1)$-го порядка, получающийся из определителя (1), если из него вычеркнуть i-ю строку и k-й столбец. **Алгебраическое дополнение** A_{ik} элемента a_{ik} есть коэффициент при a_{ik} в разложении определителя D, или

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik} = \frac{\partial D}{\partial a_{ik}}. \quad (1.5\text{-}3)$$

Определитель D можно следующим образом выразить через элементы произвольной его строки или столбца и их алгебраические дополнения:

$$D = \det [a_{ik}] = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{jk} \quad (1.5\text{-}4)$$

$(j = 1, 2, \ldots, n)$ *(разложение по столбцу или по строке)*.

Отметим также, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{il} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{lk} = 0 \quad (j \neq l). \quad (1.5\text{-}5)$$

1.5-3. Примеры. Определители второго и третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (1.5\text{-}6)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \text{ и т. д.} \quad (1.5\text{-}7)$$

1.5-4. Дополнительные миноры. Разложение Лапласа. Определитель m-го порядка M, получающийся из определителя n-го порядка D ($m \leqslant n$), если из него вычеркнуть какие-либо $n-m$ строк и какие-либо $n-m$ столбцов, называется **минором** m-го **порядка** определителя D. Минор m-го порядка M и минор $(n-m)$-го порядка M' определителя D, получающийся, если из D вычеркнуть строки и столбцы, сохранившиеся в M, называются **дополнительными минорами**: в частном случае $m=n$, $M'=1$. **Алгебраическое дополнение** M'' минора M в D по определению равно $(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_m+k_1+k_2+\ldots+k_m}M'$, где $i_1, i_2, \ldots, i_m$ — номера строк, а $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — номера столбцов, входящих в M. *Пусть заданы любые m строк (или столбцов) определителя D. Тогда D равен сумме произведений MM'' всевозможных миноров m-го порядка M, расположенных в этих строках (или столбцах), на их алгебраические дополнения M'' (разложение Лапласа по нескольким строкам или столбцам).*

Определитель n-го порядка D имеет C_n^m **главных миноров** m-го порядка, диагональные элементы которых являются и диагональными элементами D.

1.5-5. Различные теоремы.

(a) *Величина D определителя* (1) *не меняется при любой из следующих операций:*

1) *замене строк столбцами и столбцов строками* (*перемене местами индексов i и k в равенстве* (1));

2) *четном числе перемен местами любых двух строк или любых двух столбцов;*

3) *прибавлении к элементам любой строки* (*или столбца*) *соответствующих элементов какой-либо другой строки* (*или соответственно столбца*), *умноженных на одно и то же число α.*

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{12} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}+\alpha a_{22} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}+\alpha a_{n2} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.5\text{-}8)$$

(b) *Нечетное число перемен местами любых двух строк или любых двух столбцов равносильно умножению определителя на* -1.

(c) *Умножение всех элементов какой-либо строки или столбца на множитель α равносильно умножению определителя на α.*

(d) *Если элементы j-й строки* (*или столбца*) *определителя n-го порядка D представлены в виде сумм $\sum_{r=1}^{m} c_{r1}, \sum_{r=1}^{m} c_{r2}, \ldots, \sum_{r=1}^{m} c_{rn}$, то определитель D равен сумме $\sum_{r=1}^{m} D_r$ определителей n-го порядка. Все элементы каждого из определителей D_r, кроме элементов j-й строки* (*столбца*), *совпадают с соответствующими элементами определителя D, а в j-й строке определителя D_r стоят элементы $c_{r1}, c_{r2}, \ldots, c_{rn}$.*

Пример.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.5\text{-}9)$$

(е) *Определитель равен нулю, если*

1) *все элементы какой-либо его строки или столбца равны нулю,*

2) *соответствующие элементы каких-либо двух его строк или столбцов равны или же пропорциональны.*

1.5-6. Умножение определителей (см. также п. 13.2-2). Произведение двух определителей n-го порядка $\det[a_{ik}]$ и $\det[b_{ik}]$ равно

$$\det[a_{ik}]\det[b_{ik}]=\det\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right]=\det\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ji}b_{kj}\right]=$$
$$=\det\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{kj}\right]=\det\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ji}b_{jk}\right]. \qquad (1.5\text{-}10)$$

1.5-7. Изменение порядка определителей. Данный определитель можно следующим образом записать в виде определителя более высокого порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad (1.5\text{-}11)$$

где числа α_i произвольны. Этот процесс можно повторять сколько угодно раз.

Порядок данного определителя иногда можно понизить с помощью соотношения

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}. \qquad (1.5\text{-}12)$$

§ 1.6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ: ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

1.6-1. Вводные замечания. Решение алгебраических уравнений имеет особо важное значение в связи с тем, что к этому виду относятся характеристические уравнения систем линейных дифференциальных уравнений (см. также пп. 9.4-1, 9.4-4 и 14.8-5). Общая задача отделения корней (возникающая, например, при исследовании устойчивости) может быть изучена методами п. 1.6-6 и/или п. 7.6-9. Приближенное решение уравнений рассматривается в пп. 20.2-1 — 20.2-5.

1.6-2. Решение уравнения. Корни. Решить уравнение (см. также п. 1.1-4)

$$f(x)=0 \qquad (1.6\text{-}1)$$

с неизвестным x — значит найти значения x (**корни** уравнения (1), **нули** функции $f(x)$), удовлетворяющие этому уравнению. Решение можно проверить подстановкой.

1.6-3. Алгебраические уравнения. Уравнение (1) вида

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (a_0\neq 0), \qquad (1.6\text{-}2)$$

где **коэффициенты** a_i — действительные или комплексные числа, называется **алгебраическим уравнением степени** n **с неизвестным** x; $f(x)$ — **многочлен**

степени n **относительно** x **(целая рациональная функция**; см. также пп. 4.2-2, d и 7.6-5). Коэффициент a_n — **свободный член** многочлена (2).

Значение $x = x_1$ есть **корень кратности (порядка)** m (**кратный** корень, если $m > 1$) уравнения (2) (**нуль порядка** m функции $f(x)$; см. также п. 7.6-1) если $f(x) = g(x)(x - x_1)^m$, где $g(x)$ — многочлен и $g(x_1) \neq 0$. *Алгебраическое уравнение степени n имеет равно n корней, если корень кратности m считать m раз* (*основная теорема алгебры многочленов*). **Полное решение** уравнения (2) указывает все корни вместе с их кратностями.

Числа, являющиеся корнями алгебраических уравнений с целочисленными коэффициентами, называются **алгебраическими числами** (вообще говоря, комплексными); если коэффициенты — алгебраические числа, то корни все еще остаются алгебраическими (см. также п. 1.1-2). Общие формулы, выражающие корни алгебраических уравнений через их коэффициенты и содержащие только конечное число сложений, вычитаний, умножений, делений и извлечений корня, существуют только для уравнений следующих степеней: первой (**линейные уравнения**, п. 1.8-1), второй (**квадратные уравнения**, п. 1.8-2), третьей (**кубичные уравнения**, пп. 1.8-3 и 1.8-4) и четвертой (**уравнения четвертой степени**, пп. 1.8-5 и 1.8-6).

1.6-4. Соотношения между корнями и коэффициентами. Симметрические функции S_k и s_k (п. 1.4-3) корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ алгебраического уравнения (2) связаны с его коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$ следующим образом:

$$\frac{a_k}{a_0} = (-1)^k S_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.6-3}$$

$$ka_k + a_{k-1}s_1 + a_{k-2}s_2 + \ldots + a_0 s_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.6-4}$$

Равенства (1.6-4) представляют собой другой вариант *формул Ньютона* (1.4-11). Отметим также

$$\frac{a_k}{a_0} = \frac{(-1)^k}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & . & . & \ldots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & . & \ldots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ s_k & s_{k-1} & . & . & . & \ldots & s_1 \end{vmatrix},$$

$$s_k = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^k \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & . & . & \ldots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & 0 & . & \ldots & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ ka_k & a_{k-1} & . & . & . & \ldots & a_1 \end{vmatrix} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.6-5}$$

1.6-5. Дискриминант алгебраического уравнения. Дискриминант Δ алгебраического уравнения (2) есть произведение a_0^{2n-2} и квадратов всех разностей $(x_i - x_k)$ $(i > k)$ корней x_i уравнения (квадратные корни порядка m рассматриваются как m равных корней с разными индексами):

$$\Delta = a_0^{2n-2} \prod_{i>k} (x_i - x_k)^2 = a_0^{2n-2} [W(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^2 =$$

$$= a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ . & . & . & . & . \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{a_0} R(f, f'), \tag{1.6-6}$$

где

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>k} (x_i - x_k)$$

(Этот определитель называется *определителем Вандермонда*). s_k — суммы k-х степеней корней многочлена $f(x)$ ($s_0 = n$) и $R(f, f')$ — *результант* (п. 1.7-3) многочлена $f(x)$ и его производной (п. 4.5-1) $f'(x)$. Дискриминант Δ есть симметрическая функция корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращающаяся в нуль в том и только в том случае, если $f(x)$ имеет по крайней мере один кратный корень (необходимо являющийся общим корнем $f(x)$ и $f'(x)$; см. также п. 1.6-6, g).

1.6-6. Действительные алгебраические уравнения и их корни. Алгебраическое уравнение (2) называется **действительным**, если все его коэффициенты a_i — действительные числа. Соответствующий действительный многочлен $f(x)$ при всех действительных значениях x принимает действительные значения. Для отделения корней (действие, которое предшествует приближенному решению уравнений, п. 20.2-1) полезны нижеследующие теоремы. В теоремах (b) — (f) корень кратности m рассматривается как m корней.

(a) Комплексные корни. *Комплексные корни действительного алгебраического уравнения появляются парами комплексных сопряженных чисел* (п. 1.3-1). *Действительное алгебраическое уравнение нечетной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень.*

Все корни уравнения (2) по модулю не превосходят числа $N = 1 + \frac{A}{|a_0|}$, где A — наибольшее из чисел $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$; это правило справедливо и для уравнений с комплексными коэффициентами.

(b) Теорема Рауса — Гурвица. *Число корней с положительной действительной частью действительного алгебраического уравнения* (2) *равно числу перемен знака в любой из последовательностей* (в предположении, что T_i отличны от нуля)

$$\left.\begin{aligned} &T_0,\ T_1,\ \frac{T_2}{T_1},\ \frac{T_3}{T_2},\ \ldots,\ \frac{T_n}{T_{n-1}}, \\ \text{или}\quad &T_0,\ T_1,\ T_1T_2,\ T_2T_3,\ \ldots,\ T_{n-2}T_{n-1},\ a_n \end{aligned}\right\} \qquad (1.6\text{-}7)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &T_0 = a_0 > 0,\ T_1 = a_1,\ T_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \\ &T_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\qquad T_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix}, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (1.6\text{-}8)$$

(элементы a_i, отсутствующие в уравнении (2), полагаем равными нулю).

Если среди T_i есть равные нулю, то подсчет усложняется (см. [1.2]).

Критерий Рауса — Гурвица. *Для того чтобы все корни действительного уравнения* (2) *имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$T_0 > 0,\ T_1 > 0,\ T_2 > 0, \ldots\ T_n > 0.$$

Из положительности всех T_i следует положительность всех коэффициентов a_i уравнения (2).

Альтернативная формулировка. *Все корни действительного уравнения* (2) *n-й степени имеют отрицательную действительную часть в том и только в том случае, если это верно для уравнения* ($n-1$)*-й степени*

$$a_0'x^{n-1} + a_1'x^{n-2} + a_2'x^{n-3} + a_3'x^{n-4} + \ldots \equiv$$

$$\equiv a_1x^{n-1} + \left(a_2 - \frac{a_0}{a_1}a_3\right)x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \left(a_4 - \frac{a_0}{a_1}a_5\right)x^{n-4} + \ldots = 0.$$

Эта теорема может применяться повторно и дает простую рекуррентную схему, полезную, например, при исследовании устойчивости. Если один из коэффициентов $a_1^{(j)}$ равен нулю, то метод усложняется.

* Критерий Льенара — Шипара. *Для действительного уравнения* (2) *с положительными коэффициентами все корни имеют отрицательную действительную часть, если положительны или все* T_i *с четными индексами, или все* T_i *с нечетными индексами.*

(Более общая формулировка этого критерия приведена в [1.2].) *

(c) Отделение действительных корней: правило знаков Декарта. *Число положительных корней действительного алгебраического уравнения* (2) *либо равно числу* N *перемен знака в последовательности* $a_0, a_1 \ldots, a_n$ *коэффициентов, причем коэффициенты, равные нулю, не учитываются, либо меньше числа* N *на четное число.*

Если перемен знака нет, то уравнение (2) положительных корней не имеет: если есть одна перемена знака, то имеется в точности один положительный корень. Применяя эту теорему к $f(-x)$, получаем аналогичную теорему для отрицательных корней.

(d) Отделение действительных корней: верхняя граница действительных корней (пп. 4.3-3). 1) *Если первые* k *коэффициентов* $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ *действительного алгебраического уравнения* (2) *неотрицательны* (a_k — *первый отрицательный коэффициент*), *то все положительные корни уравнения* (2) (*если они есть*) *меньше, чем* $1+\sqrt[k]{q/a_0}$, *где* q — *наибольшая из абсолютных величин отрицательных коэффициентов.*

Применяя эту теорему к $f(-x)$, можно таким же образом получить нижнюю границу отрицательных корней.

* 2) *Если при* $x=c$ *многочлен* $f(x)$ *и его производные* $f'(x)$, $f''(x), \ldots$ $\ldots, f^{(n)}(x)$ (п. 4.5-1) *принимают положительные значения, то* c *является верхней границей действительных корней уравнения* (2). *

(e) Отделение действительных корней: теорема Ролля (см. также п. 4.7-10). *Производная* (п. 4.5-1) $f'(x)$ *действительного многочлена* $f(x)$ *имеет нечетное число действительных корней между двумя соседними действительными корнями многочлена* $f(x)$.

Пусть a и b — два соседних действительных корня уравнения $f'(x)=0$ и пусть $f(a)\neq 0$ и $f(b)\neq 0$. Уравнение $f(x)=0$ между a и b либо вовсе не имеет действительных корней, либо имеет один действительный корень в зависимости от того, будут ли числа $f(a)$ и $f(b)$ иметь одинаковые или противоположные знаки. Лишь один действительный корень уравнения $f(x)=0$ может оказаться больше наибольшего корня или меньше наименьшего корня уравнения $f'(x)=0$.

(f) Отделение действительных корней: теорема Бюдана — Фурье. *Пусть* $N(x)$ — *число перемен знака в последовательности значений* $f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ *для любого действительного алгебраического уравнения* (2). *Тогда число действительных корней уравнения* (2), *заключенных между двумя действительными числами* a *и* $b>a$, *не являющимися корнями уравнения* (2), *либо равно* $N(a)-N(b)$, *либо меньше* $N(a)-N(b)$ *на четное число. При подсчете* $N(a)$ *члены последовательности, равные нулю, вычеркиваются. Если при подсчете* $N(b)$ *окажется, что* $f^{(i)}(b)=0$ *для* $k+1\leqslant i\leqslant l-1$, *а* $f^{(k)}(b)\neq 0$ *и* $f^{(l)}(b)\neq 0$, *то* $f^{(i)}(b)$ *заменяются на* $(-1)^{l-i}\operatorname{sgn} f^{(l)}(b)$.

Число действительных корней уравнения (2), заключенных между a и b, нечетно или четно в зависимости от того, будут ли $f(a)$ и $f(b)$ иметь противоположные или одинаковые знаки.

(g) Отделение действительных корней: метод Штурма. *Пусть для данного действительного алгебраического уравнения* (2) *без кратных корней* (п. 1.6-2) $N(x)$ *есть число перемен знака в последовательности значений многочленов (члены, обращающиеся в нуль, не учитываются):*

$$\left.\begin{array}{l} f_0(x)=f(x)=g_0(x)f_1(x)-f_2(x),\ f_1(x)=f'(x)=g_1(x)f_2(x)-f_3(x), \\ f_2(x)=g_2(x)f_3(x)-f_4(x), \ldots, \end{array}\right\} \quad (1.6\text{-}9)$$

где при $i>1$ *каждый многочлен* $f_i(x)$ *есть взятый с коэффициентом* -1 *остаток* (п. 1.7-2), *получаемый при делении* $f_{i-2}(x)$ *на* $f_{i-1}(x)$; *многочлен* $f_n(x)\neq 0$

есть постоянная. Тогда число действительных корней уравнения (2), *заключенных между двумя действительными числами a и $b > a$, не являющимися корнями уравнения* (2), *равно* $N(a) - N(b)$.

Метод Штурма применим и в том случае, если для удобства вычислений какой-либо из многочленов $f_i(x)$ в описанном выше процессе заменить многочленом $F_i(x) = f_i(x)/k(x)$, где $k(x)$ — положительная постоянная или многочлен относительно x, положительный при $a \leqslant x \leqslant b$, а оставшиеся многочлены получить, исходя из $F_i(x)$, а не из $f_i(x)$. Подобную же операцию можно вновь проделать над любым из многочленов $F_i(x)$ и т.д.

Если уравнение $f(x) = 0$ имеет кратные корни, то $f(x)$ и $f'(x)$ имеют общий делитель (п. 1.7-3). В этом случае многочлен $f_n(x)$ не является постоянной, и $N(a) - N(b)$ есть число корней между a и b, причем каждый кратный корень считается только *один* раз.

1.7. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ И ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДРОБИ

1.7-1. Разложение многочленов на множители (см. также п. 7.6-6). Если многочлен $F(x)$ может быть представлен в виде произведения многочленов $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_s(x)$, то эти многочлены называются **множителями (делителями)** многочлена $F(x)$. Если $x = x_1$ — корень кратности m произвольного множителя $f_i(x)$, то он является и корнем кратности $M \geqslant m$ многочлена $F(x)$. *Каждый (действительный или комплексный) многочлен $f(x)$ степени n относительно x может быть единственным способом представлен в виде произведения постоянной и n линейных множителей $(x - \alpha_k)$, именно*

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \equiv a_0 \prod_{k=1}^{n} (x - x_k), \qquad (1.7\text{-}1)$$

где x_k — корни многочлена $f(x)$; корню x_k кратности m_k (п. 1.6-2) *соответствует m_k множителей $(x - x_k)$* (теорема о разложении многочлена на множители). Каждая пара множителей $[x - (a_k + i\omega_k)]$ и $[x - (a_k - i\omega_k)]$, соответствующая паре комплексных сопряженных корней $x_k = a_k + i\omega_k$ и $x_k = a_k - i\omega_k$ (см. также п. 1.6-6а), может быть объединена в действительный квадратный множитель $[(x - a_k)^2 + \omega_k^2]$.

1.7-2. Деление многочленов. Остаток. Частное $F(x)/f(x)$ от деления многочлена $F(x)$ степени N на многочлен $f(x)$ степени $n < N$ может быть представлено в виде

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_0 x^N + A_1 x^{N-1} + \ldots + A_N}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n} \equiv$$

$$\equiv (b_0 x^{N-n} + b_1 x^{N-n-1} + \ldots + b_{N-n}) + \frac{r_1(x)}{f(x)}, \qquad (1.7\text{-}2)$$

где **остаток** $r_1(x)$ есть многочлен степени, меньшей, чем n. Коэффициенты b_k и остаток $r_1(x)$ определяются однозначно, например с помощью процесса **деления углом (алгоритма деления)**.

Остаток $r_1(x)$ отсутствует в том и только в том случае, когда многочлен $f(x)$ является делителем (п. 1.7-1) многочлена $F(x)$.

Остаток, получаемый при делении любого многочлена $f(x)$ на $(x - c)$, равен $f(c)$ (теорема Безу).

1.7-3. Общие делители и общие корни двух многочленов. Если многочлен $g(x)$ является общим делителем (множителем) многочленов $F(x)$ и $f(x)$, то его корни являются общими корнями этих многочленов. Отношение (2), как и числовую дробь, можно сократить на любой общий множитель числителя и знаменателя.

Многочлены

$$F(x) = A_0 x^N + A x^{N-1} + \ldots + A_N$$

и

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

имеют по крайней мере один общий корень (и, таким образом, общий делитель ненулевой степени) в том и только в том случае, если определитель порядка $N+n$

$$R(F, f) = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{N-1} & A_N & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{N-1} & A_N & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{N-1} & A_N \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \ldots & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & \cdot & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} \tag{1.7-3}$$

(**результант** многочленов $F(x)$ и $f(x)$) равен нулю. В противном случае $F(x)$ и $f(x)$ *взаимно просты.*

* Имеет место формула

$$R(F, f) = (-1)^{Nn} R(f, F) = A_0^n a_0^N \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{n} (\alpha_i - \beta_j),$$

где α_i и β_j — соответственно корни $F(x)$ и $f(x)$. *

Наибольший общий делитель (общий множитель наибольшей степени) многочленов $F(x)$ и $f(x)$ определен однозначно с точностью до постоянного множителя и может быть найден следующим образом. Делим $f(x)$ на $r_1(x)$, где $r_1(x)$ определен формулой (1.7-2); получаем остаток $r_2(x)$. Затем делим $r_1(x)$ на получившийся остаток $r_2(x)$ и продолжаем этот процесс до тех пор, пока некоторый остаток, скажем, $r_k(x)$, не окажется равным нулю. Тогда остаток $r_{k-1}(x)$, умноженный на произвольный постоянный множитель, и будет искомым наибольшим общим делителем. Если $r_1(x) = 0$, то наибольшим общим делителем будет сам многочлен $f(x)$.

1.7-4. Разложение на элементарные дроби. Любое отношение $g(x)/f(x)$ многочлена $g(x)$ степени m и многочлена $f(x)$ степени $n > m$ без общих корней (п. 1.7-3) может быть следующим образом представлено в виде суммы n **элементарных дробей**, соответствующих корням x_k (кратности m_k) многочлена $f(x)$:

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum_k \sum_{j=1}^{m_k} \frac{b_{kj}}{(x-x_k)^j} = \sum_k \left[\frac{b_{k1}}{(x-x_k)} + \frac{b_{k2}}{(x-x_k)^2} + \ldots + \frac{b_{km_k}}{(x-x_k)^{m_k}}\right]. \tag{1.7-4}$$

Коэффициенты b_{kj} можно найти одним из следующих методов или же комбинацией этих методов:

1. Если $m_k = 1$ (x_k — простой корень), то $b_{k1} = g(x_k)/f'(x_k)$.

2. Умножая обе части равенства (4) на $f(x)$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного равенства.

3. Умножая обе части равенства (4) на $f(x)$ и последовательно дифференцируя полученное равенство. Пусть $\varphi_k(x) = f(x)/(x-x_k)^{m_k}$. Тогда b_{km_k}, b_{km_k-1}, ... последовательно находятся из соотношений

$$g(x_k) = b_{km_k}\varphi_k(x_k),$$
$$g'(x_k) = b_{km_k}\varphi_k'(x_k) + b_{km_k-1}\varphi_k(x_k),$$
$$g''(x_k) = b_{km_k}\varphi_k''(x_k) + 2b_{km_k-1}\varphi_k'(x_k) + 2b_{km_k-2}\varphi_k(x_k),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g^{(m_k-1)}(x_k) = b_{km_k}\varphi^{(m_k-1)}(x_k) + m_k b_{km_k-1}\varphi_k^{(m_k-2)}(x_k) + {}$$
$$+ m_k(m_k-1)\, b_{km_k-2}\varphi_k^{(m_k-3)}(x_k) + \ldots + m_k!\, b_{k1}\varphi_k(x_k).$$

Элементарные дроби, соответствующие произвольной паре комплексных сопряженных корней $a_k+i\omega_k$ и $a_k-i\omega_k$ кратности m_k, обычно соединяются в

$$c_{k1}\frac{x+d_{k1}}{\left[(x-a_k)^2+\omega_k^2\right]}+c_{k2}\frac{x+d_{k2}}{\left[(x-a_k)^2+\omega_k^2\right]^2}+\ldots+\frac{x+d_{km_k}}{\left[(x-a_k)^2+\omega_k^2\right]^{m_k}}. \quad (1.7\text{-}5)$$

Коэффициенты c_{kj} и d_{kj} могут быть определены непосредственно описанным выше методом 2. Если $g(x)$ и $f(x)$ — действительные многочлены (п. 1.6-6), то все коэффициенты b_{kj}, c_{kj}, d_{kj} в окончательном разложении на элементарные дроби действительны.

Каждая рациональная функция от x (п. 4.2-2, с) *может быть представлена в виде суммы многочлена и конечного числа элементарных дробей* (см. также п. 7.6-8). Разложение на элементарные дроби играет важную роль в связи с интегрированием (п. 4.6-6, с) и интегральными преобразованиями (п. 8.4-5).

1.8. ЛИНЕЙНЫЕ, КВАДРАТНЫЕ, КУБИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

1.8-1. Решение линейных уравнений. Общее уравнение первой степени **(линейное уравнение)**

$$ax=b \quad \text{или} \quad ax-b=0 \qquad (a\neq 0) \quad (1.8\text{-}1)$$

имеет решение

$$x=\frac{b}{a}. \quad (1.8\text{-}2)$$

1.8-2. Решение квадратных уравнений. Квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0) \quad (1.8\text{-}3)$$

имеет корни

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad (1.8\text{-}4)$$

где в случае, когда a, b и c — любые комплексные числа, $\sqrt{b^2-4ac}$ есть одно из значений квадратного корня.

Если уравнение (3) действительно, то его корни x_1 и x_2 либо действительные различные, либо действительные равные, либо комплексные сопряженные в зависимости от того, будет ли (п. 1.6-5) $D=b^2-4ac$ соответственно положителен, равен нулю или отрицателен. Отметим, что

$$x_1+x_2=-b/a \quad \text{и} \quad x_1x_2=c/a.$$

1.8-3. Кубичные уравнения: решение Кардано. Кубичное уравнение

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \quad (1.8\text{-}5)$$

подстановкой $x=y-\frac{a}{3}$ приводится к «неполному» виду

$$y^3+py+q=0, \qquad p=-\frac{a^2}{3}+b, \qquad q=2\left(\frac{a}{3}\right)^3-\frac{ab}{3}+c. \quad (1.8\text{-}6)$$

Корни y_1, y_2, y_3 «неполного» кубичного уравнения (6) равны

$$\left.\begin{aligned} &y_1=A+B, \qquad y_{2,3}=-\frac{A+B}{2}\pm i\frac{A-B}{2}\sqrt{3},\\ &A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{Q}}, \qquad B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{Q}},\\ &Q=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2, \end{aligned}\right\} \quad (1.8\text{-}7)$$

где

причем в качестве A и B берутся любые значения кубичных корней из соответствующих комплексных чисел, удовлетворяющие соотношению $AB=-p/3$. Если уравнение (6) действительно, то (в тех случаях, когда это возможно) следует брать действительные значения этих корней. *Если кубичное уравнение* (6) *действительно, то оно имеет или один действительный корень и два сопряженных комплексных корня, или три действительных корня, по крайней мере два из которых равны, или три различных действительных корня в зависимости от того, будет ли Q соответственно положительно, равно нулю или отрицательно.* В последнем случае («неприводимый» случай) можно воспользоваться методом п. 1.8-4,a. Отметим, что дискриминанты (п. 1.6-5) уравнений (5) и (6) равны $-108\,Q$.

1.8-4. Кубичные уравнения: тригонометрическое решение. Пусть «неполное» кубичное уравнение (6) действительно.

(a) Если $Q<0$ («неприводимый» случай), то $p<0$ и

$$\left.\begin{aligned} y_1&=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3},\\ y_{2,3}&=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha}{3}\pm\frac{\pi}{3}\right),\\ \cos\alpha&=-\frac{q}{2\sqrt{-(p/3)^3}}.\end{aligned}\right\}\tag{1.8-8}$$

где (b) Если $Q\geqslant 0$, $p>0$, то

$$\left.\begin{aligned} &y_1=-2\sqrt{p/3}\operatorname{ctg}2\alpha,\qquad y_{2,3}=\sqrt{p/3}\,(\operatorname{ctg}2\alpha\pm i\sqrt{3}\operatorname{cosec}2\alpha),\\ &\operatorname{tg}\alpha=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\left(|\alpha|\leqslant\frac{\pi}{4}\right),\qquad \operatorname{tg}\beta=\frac{2}{q}\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}\left(|\beta|\leqslant\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}\right\}\tag{1.8-9a}$$

где

(c) Если $Q\geqslant 0$, $p<0$, то

$$\left.\begin{aligned} &y_1=-2\sqrt{-p/3}\operatorname{cosec}2\alpha,\qquad y_{2,3}=\sqrt{-p/3}\,(\operatorname{cosec}2\alpha\pm i\sqrt{3}\operatorname{ctg}2\alpha),\\ &\operatorname{tg}\alpha=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\left(|\alpha|\leqslant\frac{\pi}{4}\right),\qquad \sin\beta=\frac{2}{q}\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}\left(|\beta|\leqslant\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}\right\}\tag{1.8-9b}$$

где

Во всех случаях берется действительное значение кубичного корня.

1.8-5. Уравнения четвертой степени: решение Декарта — Эйлера. Уравнение четвертой степени

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\tag{1.8-10}$$

подстановкой $x=y-\frac{a}{4}$ приводится к «неполному» виду

$$y^4+py^2+qy+r=0.\tag{1.8-11}$$

Корни y_1, y_2, y_3, y_4 «неполного» уравнения четвертой степени (11) равны одному из выражений

$$\pm\sqrt{z_1}\pm\sqrt{z_2}\pm\sqrt{z_3},\tag{1.8-12}$$

в которых сочетания знаков выбираются так, чтобы удовлетворялось условие

$$\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}=-\frac{q}{8},\tag{1.8-13}$$

причем z_1, z_2 и z_3 — корни кубичного уравнения

$$z^3+\frac{p}{2}z^2+\frac{p^2-4r}{16}z-\frac{q^2}{64}=0.\tag{1.8-14}$$

1.8-6. Уравнения четвертой степени: решение Феррари. Если y_1 — произ-

(**резольвенты** уравнения (10)), то четыре корня уравнения (10) находятся как корни двух квадратных уравнений

$$x^2+\frac{a}{2}x+\frac{y_1}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b+y_1\right)x^2+\left(\frac{a}{2}y_1-c\right)x+\frac{y_1^2}{4}-d}, \qquad (1.8\text{-}16)$$

где подкоренное выражение в правой части является полным квадратом. Отметим, что дискриминанты (п.1.6-5) уравнений (10) и (15) совпадают.

1.9. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

1.9-1. Системы уравнений. Решением некоторого множества (**системы**) уравнений

$$f_i(x_1, x_2, \ldots)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots) \qquad (1.9\text{-}1)$$

с неизвестными $x_1, x_2, \ldots$ называется множество значений неизвестных $x_1, x_2, \ldots$, удовлетворяющих одновременно *каждому* из уравнений системы (1). Система (1) решена полностью, если найдены все такие решения. Часто можно последовательно *исключать* неизвестные x_j из системы (1), например разрешая одно из уравнений относительно x_j и подставляя полученное выражение в оставшиеся уравнения. Число уравнений и неизвестных таким путем уменьшается до тех пор, пока не остается решить одно уравнение с одним неизвестным После этого процесс повторяется в обратном порядке, для нахождения второго неизвестного и т. д. Решения можно проверить подстановкой.

Чтобы исключить x_1, скажем, из двух уравнений $f_1(x_1, x_2)=0$ и $f_2(x_1, x_2)=0$, где $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ — многочлены относительно x_1 и x_2 (п. 1.4-3), рассматривают обе эти функции как многочлены относительно x_1 и составляют их результант R (п.1.7-3). Тогда x_2 должно удовлетворять уравнению $R=0$.

1.9-2. Системы линейных уравнений: правило Крамера. Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{array} \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k=b_i \quad (i=1, 2, \ldots, n). \right\} \qquad (1.9\text{-}2)$$

Если определитель системы (2)

$$D=\det[a_{ik}]=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.9\text{-}3)$$

не равен нулю, то система (2) имеет единственное решение

$$x_k=\frac{D_k}{D} \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \text{ (}\textit{правило Крамера}\text{)}, \qquad (1.9\text{-}4)$$

где D_k — определитель, получающийся из D при замене элементов $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$ k-го столбца соответствующими свободными членами $b_1, b_2, \ldots, b_n$, или

$$D_k=\sum_{i=1}^{n} A_{ik}b_i \qquad (k=1, 2, \ldots, n), \qquad (1.9\text{-}5)$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение (п. 1.5-2) элемента a_{ik} в определителе D (см. также пп. 13.2-3 и 14.5-3).

1.9-3. Линейная независимость (см. также пп. 9.3-2, 14.2-3 и 15.2-1, а).

(а) m уравнений $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ или m функций $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенных при всех значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$, линейно

независимы, если

$$\left.\begin{array}{c}\text{из того, что } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i (x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0 \text{ при всех значениях} \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ следует, что } \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0.\end{array}\right\} \quad (1.9\text{-}6)$$

В противном случае эти m уравнений или функций **линейно зависимы**, т. е. по крайней мере одно из них может быть представлено в виде линейной комбинации остальных. Это всегда имеет место в тривиальном частном случае, когда одно или более из уравнений $f_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ есть тождество.

n однородных линейных функций $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$ *($i = 1, 2, \ldots, n$) линейно независимы в том и только в том случае, если* $\det [a_{ik}] \neq 0$ (см. также п. 1.9-5).

Более общее утверждение: *m однородных линейных функций* $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *линейно независимы в том и только том случае если ($m \times n$)-матрица* $[a_{ik}]$ *имеет ранг m* (п. 13.2-7).

(b) m множеств, каждое из которых состоит из n чисел $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$; $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}; \ldots; x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}$ (например, решения системы уравнений или наборы компонент m штук n-мерных векторов), **линейно независимы**, если

$$\text{из } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_j^{(i)} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \text{ следует } \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0. \quad (1.9\text{-}7)$$

Это выполняется в том и только том случае, если ($m \times n$)-матрица $\left[x_j^{(i)}\right]$ *имеет ранг m* (п. 13.2-7).

1.9-4. Системы линейных уравнений: общая теория (см. также п. 14.8-10). *Система m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (1.9\text{-}8)$$

имеет решение в том и только в том случае, если матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \qquad (1.9\text{-}9)$$

(матрица системы *и* **расширенная матрица системы)** *имеют один и тот же ранг* (п. 13.2-7). В противном случае уравнения *несовместны*.

Единственное решение, о котором говорилось в п. 1.9-2, существует, если $r = m = n$. Если обе матрицы (9) имеют ранг $r \leqslant m$, то уравнения (8) *линейно независимы* при $r = m$ и *линейно зависимы* при $r < m$ (п. 1.9-3, а). В случае $r < m$ некоторые $m - r$ уравнений можно выразить в виде линейных комбинаций остальных r уравнений (независимых), и им удовлетворяют решения этих r уравнений. Линейно независимые уравнения определяют некоторые $r \leqslant m$ неизвестных как линейные функции остальных $n - r$ неизвестных, остающихся произвольными.

1.9-5. Системы линейных уравнений: n однородных уравнений с n неизвестными. В частности, *система n однородных линейных уравнений с n неизвестными*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1.9\text{-}10)$$

имеет решение, отличное от тривиального (нулевого) решения $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, *в том и только в том случае, если* $D=\det[a_{ik}]=0$ (см. также п. 1.9-3, а).

В этом случае существует точно $n-r$ *линейно независимых решений* $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}; x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}; \ldots; x_1^{(n-r)}, x_2^{(n-r)}, \ldots, x_n^{(n-r)}$, *где* r — *ранг матрицы системы* (п. 1.9-4). *Наиболее общим решением тогда является*

$$x_i=\sum_{j=1}^{n-r} c_j x_i^{(j)} \quad (i=1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{1.9-11}$$

где c_j — *произвольные постоянные* (см. также п. 14.8-10).

В важном частном случае, когда $r=n-1$,

$$x_1=cA_{k1},\ x_2=cA_{k2},\ \ldots,\ x_n=cA_{kn}, \tag{1.9-12}$$

где A_{kj} — *алгебраическое дополнение* (п. 1.5-2) *элемента* a_{kj} *в определителе* D *(причем* k *выбрано так, что хотя бы одно из* A_{kj} $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ *отлично от нуля) есть решение при любой произвольной постоянной* c. *Это значит, что все отношения* x_i/x_k *определены однозначно;* решения (12), получающиеся при различных таких значениях k, тождественны (см. также п. 14.8-6).

1.10. ФОРМУЛЫ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ПЛОСКИЕ ФИГУРЫ И ТЕЛА

1.10-1. Трапеция (стороны a, b, c, d; a и b параллельны; высота h есть расстояние между a и b; площадь S):

$$S=\frac{1}{2}(a+b)\,h,\quad h=\frac{2}{a-b}\sqrt{s\,(s-a+b)\,(s-c)\,(s-d)},\quad \text{где } s=\frac{a-b+c+d}{2}.$$

Трапеция является **параллелограммом** при $a=b$ (тогда $c=d$) и **ромбом** при $a=b=c=d$.

Таблица 1.10-1

Правильные многоугольники (длина стороны равна a)

Число сторон n	Правильный многоугольник	Радиус описанной окружности $R=\frac{a}{2\sin(\pi/n)}$	Радиус вписанной окружности $r=\frac{a}{\operatorname{tg}(\pi/n)}$	Площадь $S=\frac{nar}{2}$
3	Треугольник	$\frac{a}{3}\sqrt{3}$	$\frac{a}{6}\sqrt{3}$	$\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$
4	Квадрат	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{2}$	a^2
5	Пятиугольник	$a\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}}$	$a\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{10}}$	$\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
6	Шестиугольник	a	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$
8	Восьмиугольник	$a\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\frac{a}{2}(1+\sqrt{2})$	$2a^2(1+\sqrt{2})$
10	Десятиугольник	$\frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

1.10-2. Правильные многоугольники. В табл. 1.10-1 приведены выражения для радиусов описанной и вписанной окружностей и для площади некоторых правильных многоугольников.

1.10-3. Круг (радиус r).

(a) Длина окружности $2\pi r$, площадь πr^2.

(b) Центральный угол, равный φ радианам, определяет дугу длиной $r\varphi$, сектор с площадью $r^2\varphi/2$, хорду длиной $2r\sin(\varphi/2)$, сегмент с площадью $r^2(\varphi-\sin\varphi)/2$.

(c) Площадь между окружностью радиуса r_1 и заключенной внутри нее (не обязательно концентрической) окружностью радиуса r_2 равна $\pi(r_1+r_2)\times\times(r_1-r_2)$.

1.10-4. Призмы, пирамиды, цилиндры и конусы.

(a) Объем призмы или цилиндра с основанием S_1 и высотой h равен hS_1.

(b) Объем пирамиды или конуса с основанием S_1 и высотой h равен $hS_1/3$.

(c) Объем усеченной пирамиды или конуса с основаниями S_1, S_2 и высотой h равен $h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)/3$.

(d) Боковая поверхность прямого кругового конуса с радиусом основания r и высотой h равна $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$.

1.10-5. Тела вращения (см. табл. 1.10-2).

Таблица 1.10-2

Тела вращения

	Тело	Площадь поверхности	Объем
1	**Сфера радиуса** r	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
2	**Сплюснутый эллипсоид вращения (сфероид)** (Ось $2a>2b$, $\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$; вращение вокруг малой оси.)	$2\pi a^2+\pi\frac{b^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$	$\frac{4}{3}\pi a^2b$
3	**Вытянутый эллипсоид вращения** (Ось $2a>2b$, $\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$; вращение вокруг большой оси.)	$2\pi b^2+2\pi\frac{ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon$	$\frac{4}{3}\pi ab^2$
4	**Тор**, образованный вращением круга радиуса r вокруг оси, отстоящей на расстоянии R от центра	$4\pi^2Rr$	$2\pi^2Rr^2$
5	**Сферический сегмент** радиуса r, заключенный между параллельными плоскостями; h — расстояние между плоскостями; r_1, r_2 — радиусы оснований	$2\pi rh+\pi(r_1^2+r_2^2)$	$\frac{\pi}{6}h(3r_1^2+3r_2^2+h^2)$

1.10-6. Правильные многогранники. В таблице 1.10-3 приведены основные элементы всех правильных многогранников.

Таблица 1.10-3

Пять правильных многогранников

(Длина ребра равна a; соответствующие числа F граней, E вершин и K ребер связаны формулой Эйлера $E+F-K=2$ *))

Правильный многогранник	Число и тип граней	Радиус описанной сферы	Радиус вписанной сферы	Площадь поверхности	Объем
Тетраэдр	4 равносторонних треугольника	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$
Куб	6 квадратов	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$	$6a^2$	a^3
Октаэдр	8 равносторонних треугольников	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$
Додекаэдр	12 правильных пятиугольников	$\frac{a}{4}(1+\sqrt{5})\sqrt{3}$	$\frac{a}{4}\sqrt{10+\frac{22}{\sqrt{5}}}$	$3a^2 \times \times\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$
Икосаэдр	20 равносторонних треугольников	$\frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$	$\frac{a}{4\sqrt{3}}(3+\sqrt{5})$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5})$

*) Формула Эйлера справедлива для любого выпуклого многогранника.

1.11. ТРИГОНОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

1.11-1. Вводные замечания. Прямоугольные треугольники. Тригонометрия на плоскости описывает соотношения между сторонами и углами плоских треугольников в терминах тригонометрических функций (п. 21.2-1 — 21.2-4); заметим, что все плоские фигуры, ограниченные прямыми линиями, можно рассматривать как комбинации треугольников. Так как каждый плоский треугольник можно разложить на прямоугольные треугольники, то наиболее важными тригонометрическими соотношениями являются соотношения между сторонами и углами прямоугольных треугольников.

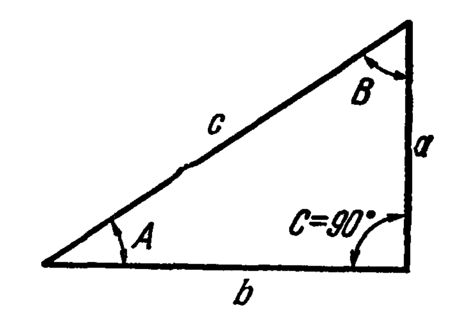


Рис. 1.11-1. Прямоугольный треугольник.

Прямоугольные треугольники. В каждом прямоугольном треугольнике (рис. 1.11-1) с катетами a, b и гипотенузой c:

$$\left.\begin{aligned} &A+B=90^\circ, \qquad a^2+b^2=c^2\ (\textit{теорема Пифагора}),\\ &\sin A=\cos B=\frac{a}{c}, \qquad \sin B=\cos A=\frac{b}{c},\\ &\operatorname{tg} A=\operatorname{ctg} B=\frac{a}{b}, \qquad \operatorname{tg} B=\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.11\text{-}1)$$

1.11-2. Свойства плоских треугольников. В каждом плоском треугольнике (рис. 1.11-2) сумма углов равна 180°. Сумма любых двух сторон больше третьей стороны, против большей из двух сторон лежит больший угол.

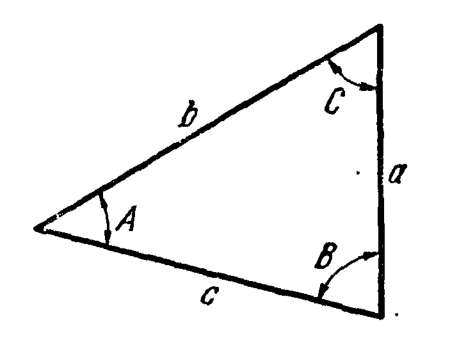


Рис. 1.11-2. Косоугольный треугольник.

Треугольник на плоскости единственным образом определяется (с точностью до преобразования симметрии):

1) тремя сторонами,

2) двумя сторонами и углом, заключенным между ними,

3) стороной и двумя прилежащими к ней углами.

В каждом плоском треугольнике три биссектрисы его углов пересекаются в центре M вписанной окружности. Три перпендикуляра к его сторонам, проходящих через середины этих сторон, пересекаются в центре F описанной окружности, Три медианы пересекаются в центре тяжести G треугольника. Три высоты треугольника пересекаются в точке H, лежащей на одной прямой с точками F и G, причем $\overrightarrow{HG} : \overrightarrow{GF} = 2$. Середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих H с каждой из вершин треугольника, лежат на одной окружности (*окружность девяти точек, окружность Фейербаха*). Центр этой окружности есть середина отрезка HF.

1.11-3. Формулы для решения треугольников. В нижеследующих соотношениях A, B, C являются углами, лежащими соответственно против сторон a, b, c треугольника. Площадь треугольника обозначена через S; R и r являются соответственно радиусами описанной и вписанной окружностей, а $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Таблица 1. 11-1

Решение плоских треугольников

(Все остальные случаи получаются циклической перестановкой.)

Случай	Даны	Использованные формулы ($A+B+C=180°$)	Условия существования решения
1	Три стороны a, b, c	A, B, C из (2) или (5)	Сумма двух сторон должна быть больше третьей
2	Две стороны и угол между ними b, c, A	$\frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$; $\frac{B-C}{2}$ из (6) или (7), затем B и C; или B, C из (3) и (4): $\operatorname{tg} B = \frac{b \sin A}{c - b \cos A}$, a из (3) или (4)	
3	Одна сторона и два угла a, B, C	b, c из (3); $A = 180° - B - C$	
4	Две стороны и угол против одной из них b, c, B	из (3): $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$, $\sin C = \frac{c \sin B}{b}$ $A = 180° - B - C$	Задача имеет одно решение, если $b \geqslant c$; два решения, если $b < c$, $c \sin B < b$; одно решение, если $b < c$, $c \sin B = b$; при $b < c$, $c \sin B > b$ решения нет

Для того, чтобы получить все формулы, необходимые для решения треугольников, нужно произвести одновременную циклическую перестановку A, B, C и a, b, c. Табл. 1.11-1 позволяет вычислить все стороны и углы треугольника по определяющим его сторонам и углам.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{A}{2} \text{ (теорема косинусов)}, \qquad (1.11\text{-}2)$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ (теорема синусов)}, \qquad (1.11\text{-}3)$$

$$c = a\cos B + b\cos A \text{ (теорема о проекциях)} \qquad (1.11\text{-}4)$$

$$\sin\frac{A}{2} = +\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \qquad \cos\frac{A}{2} = +\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = +\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \qquad (1.11\text{-}5)$$

$$\sin A = +\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}, \qquad (1.11\text{-}6)$$

$$(b+c)\sin\frac{A}{2} = a\cos\frac{B-C}{2}, \qquad (b-c)\cos\frac{A}{2} = a\sin\frac{B-C}{2}, \qquad (1.11\text{-}7)$$

$$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2} =$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}, \qquad (1.11\text{-}8)$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}, \qquad (1.11\text{-}9)$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B =$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= 2R^2\sin A\sin B\sin C = \frac{abc}{4R} = pr. \qquad (1.11\text{-}10)$$

Длина *высоты* $h_a = \frac{bc}{2R}$ $\left(S = \frac{1}{2}ah_a\right)$.

Длина *биссектрисы* $w_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}$.

Длина *медианы* $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

1. 12. СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

1.12-1. Введение. Сферические треугольники. На поверхности шара кратчайшее расстояние между двумя точками измеряется вдоль окружности большого круга, т. е. окружности, плоскость которой проходит через центр шара (геодезической, п. 17.3-12). **Вершины сферического треугольника** являются точками пересечения трех лучей, выходящих из центра шара, и сферической поверхности. **Сторонами** a, b, c сферического треугольника

называют те углы между лучами, которые меньше 180° *). Каждой стороне треугольника соответствует дуга большого круга на поверхности шара (рис. 1.12-1). **Углы** A, B, C сферического треугольника, противолежащие сторонам a, b, c соответственно, представляют собой, по определению, меньшие, чем 180°, углы между дугами больших кругов, соответствующими сторонам треугольника, или углы между плоскостями, определяемыми данными лучами.

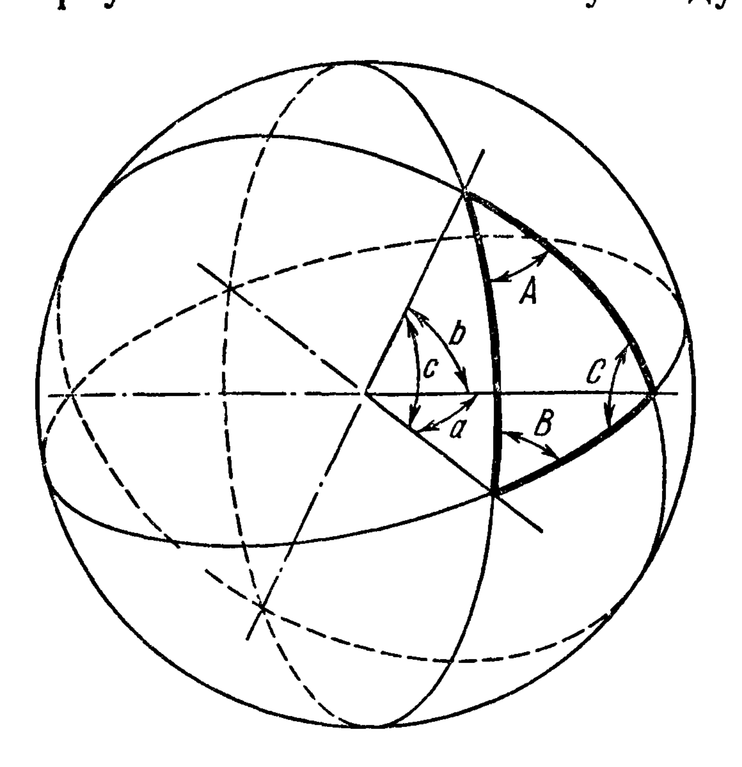


Рис. 1.12-1. Сферический треугольник.

Сферическая тригонометрия занимается изучением соотношений между сторонами и углами сферических треугольников (например, на поверхности Земли и на небесной сфере). Однако физики и инженеры во многих задачах предпочитают использовать преобразования вращения (п. 14. 10-1), а не сферическую тригонометрию.

1.12-2. Свойства сферических треугольников. Каждая сторона и угол сферического треугольника по определению меньше 180°.

Геометрия на поверхности шара является неевклидовой (см. также п. 17.3-13); в каждом сферическом треугольнике сумма сторон заключена между 0 и 360°, сумма углов заключена между 180° и 540°. В каждом сферическом треугольнике против большей стороны лежит больший угол. Сумма любых двух сторон больше третьей стороны, сумма любых двух углов меньше, чем 180° плюс третий угол.

Сферический треугольник единственным образом определяется (с точностью до преобразования симметрии):

1) тремя сторонами,
2) тремя углами,
3) двумя сторонами и заключенным между ними углом,
4) стороной и двумя прилежащими к ней углами.

Замечание. Для каждого сферического треугольника можно определить большие круги, играющие роль перпендикуляров, проведенных через середины сторон, биссектрис, медиан и высот. Плоскости трех больших кругов каждого типа пересекаются по прямой.

В полной аналогии с описанной окружностью плоского треугольника существует *описанный прямой круговой конус*, содержащий три прямые линии, определяющие треугольник; ось этого конуса есть прямая, по которой пересекаются плоскости перпендикуляров, проведенных через середины сторон. Существует также *вписанный прямой круговой конус*, касающийся трех плоскостей, соответствующих сферическому треугольнику; ось этого конуса есть прямая, по которой пересекаются плоскости биссектрис. «Радиус» описанной окружности и «радиус» вписанной окружности представляют собой углы, равные соответственно половинам углов при вершинах первого и второго конусов.

Если R — радиус шара, то площадь S_R сферического треугольника выражается формулой

$$S_R = R^2\varepsilon, \tag{1.12-1}$$

где ε — **сферический эксцесс (избыток)**:

$$\varepsilon = A + B + C - \pi, \tag{1.12-2}$$

измеряемый в *радианах*. Величина $d = 2\pi - (a + b + c)$ называется **сферическим дефектом**.

Полярный треугольник, соответствующий данному сферическому треугольнику, определяется тремя лучами, перпендикулярными к плоскостям, связанным со сторонами данного треугольника. Если один сферический треугольник полярен относительно другого, то и второй будет полярен относительно первого Стороны одного из полярных относительно друг друга треугольников дополняют углы другого до 180°. Таким образом, каждая теорема или формула, относящаяся к *сторонам и углам* треугольника, может быть преобразована в теорему или формулу об *углах и сторонах* полярного треугольника.

---

*) Если один из этих углов равен 180°, то сферический треугольник вырождается в полуокружность большого круга.

1.12-3. Прямоугольный сферический треугольник. В прямоугольном сферическом треугольнике по меньшей мере один угол, например C, равен $90°$; противоположная сторона c называется гипотенузой. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного сферического треугольника могут быть извлечены из следующих двух мнемонических *правил Непера:*

В диаграмме на рис. 1.12-2 *синус любого из указанных в ней углов равен*

1) *произведению тангенсов двух углов, прилежащих к нему на диаграмме,*

2) *произведению косинусов двух углов, противолежащих ему на диаграмме.*



Рис. 1.12-2. Правила Непера.

Пример. Найти стороны и углы прямоугольного сферического треугольника, зная гипотенузу c и сторону a.

Эта задача имеет решение только при условии $\sin a \leqslant \sin c$; тогда

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}, \qquad \cos B = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}, \qquad \sin A = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

Замечание. Если a меньше, равно или больше $90°$, то и A соответственно меньше, равно или больше $90°$, и наоборот.

Если даны a и A, то задача имеет решение только в том случае, когда предыдущее условие выполнено и, кроме того, $\sin a \leqslant \sin A$; если $a \neq A$, то решений два.

Если даны A и B, задача имеет решение только при выполнении условий $90° < A + B < 270°$ и $-90° < A - B < 90°$ (см. п. 1.12-2).

Сферический треугольник со стороной, равной $90°$, называется **квадрантным треугольником** и может рассматриваться как полярный треугольник прямоугольного сферического треугольника.

Ко всем задачам, включающим решение сферических треугольников (прямоугольных или косоугольных), настоятельно рекомендуется делать эскиз, ясно показывающий, будут ли различные углы и стороны меньше, равны или больше $90°$.

1.12-4. Формулы для решения сферических треугольников (см. также рис. 1.12-1). В следующих ниже соотношениях A, B, C являются углами, противолежащими соответственно сторонам a, b, c сферического треугольника. «Радиусы» описанного и вписанного конусов обозначены соответственно через r и ρ. *Формулы, не включенные в перечень, могут быть получены одновременной циклической перестановкой A, B, C и a, b, c.* Таблица 1.12-1 позволяет вычислять стороны и углы любого сферического треугольника по трем подходящим образом заданным сторонам и/или углам. Неравенства, отмеченные в начале п. 1.12-2, должны быть приняты во внимание, для того чтобы исключить посторонние результáты при решении треугольников.

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad (\textit{теорема синусов}), \tag{1.12-3}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (\textit{теорема косинусов для сторон}), \tag{1.12-4}$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad (\textit{теорема косинусов для углов}), \tag{1.12-5}$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}\cos\frac{B+C}{2} &= \operatorname{tg}\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2},\\
\operatorname{tg}\frac{b-c}{2}\sin\frac{B+C}{2} &= \operatorname{tg}\frac{a}{2}\sin\frac{B-C}{2},\\
\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}\cos\frac{b+c}{2} &= \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2},\\
\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}\sin\frac{b+c}{2} &= \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\sin\frac{b-c}{2};
\end{aligned}\right\} \quad (\textit{аналогии Непера}) \tag{1.12-6}$$

Таблица 1. 12-1

Решение сферических треугольников

(см. формулы п. 1.12-4 и рис. 1.12-1)

Случай	Даны	Формулы для вычисления	Условия существования решения
1	Три стороны a, b, c	A, B, C из (8) и циклической перестановки	$0 < a+b+c < 360°$ Сумма двух сторон должна быть больше третьей
2	Три угла A, B, C	a, b, c из (8) и циклической перестановки	$180° < A+B+C < 540°$; Сумма двух углов должна быть меньше 180° плюс третий угол
3	Две стороны и заключенный между ними угол b, c, A	$\frac{B+C}{2}$ и $\frac{B-C}{2}$ из (6), затем B и C; a из (7), (8) или (4)	
4	Два угла и заключенная между ними сторона B, C, a	$\frac{b+c}{2}$ и $\frac{b-c}{2}$ из (6), затем b и c; A из (7), (8) или (5)	
5	Две стороны и противолежащий одной из них угол b, c, B	C из (3); A и a из (6)	Задача имеет одно или два решения, если $\sin c \sin B \leqslant \sin b$. Сохраняются те из величин C, для которых $A-B$ и $a-b$ имеют одинаковый знак; $A+B-180°$ и $a+b-180°$ также должны быть одного знака
6	Два угла и противолежащая одному из них сторона B, C, b	c из (3); A и a из (6)	Задача имеет одно или два решения, если $\sin b \sin C \leqslant \sin B$. Сохраняются те из величин c, для которых $A-B$ и $a-b$ имеют одинаковый знак; $A+B-180°$ и $a+b-180°$ также должны быть одного знака

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{b+c}{2}&=\sin\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2},\\ \sin\frac{A}{2}\cos\frac{b+c}{2}&=\cos\frac{a}{2}\cos\frac{B+C}{2},\\ \cos\frac{A}{2}\sin\frac{b-c}{2}&=\sin\frac{a}{2}\sin\frac{B-C}{2},\\ \cos\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2}&=\cos\frac{a}{2}\sin\frac{B+C}{2},\end{aligned}\right\}\ \text{(аналогии Деламбра и Гаусса)}\qquad(1.12\text{-}7)$$

$$\left.\begin{aligned}&s=\frac{a+b+c}{2},\quad S=\frac{A+B+C}{2},\\ &\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}},\\ &\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}},\\ &\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}},\\ &\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}};\end{aligned}\right\}\ \text{(формулы половинных углов)}\qquad(1.12\text{-}8)$$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{ctg} r=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{-\cos S}},\\ &\operatorname{tg}\rho=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}},\\ &\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{\sin(s-a)}{\operatorname{tg}\rho},\quad \operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{\cos(S-A)}{\operatorname{ctg} r};\end{aligned}\right\}\qquad(1.12\text{-}9)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}},\qquad(1.12\text{-}10)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)=+\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}}}\ \text{(уравнение Люилье)}.\qquad(1.12\text{-}11)$$

Некоторые тригонометрические соотношения становятся особенно удобными для вычислений с помощью логарифмов, если в них использованы новые тригонометрические функции

$$\operatorname{vers} A=1-\cos A,\qquad \operatorname{covers} A=1-\sin A,\qquad \operatorname{hav} A=\frac{1}{2}(1-\cos A).\qquad(1.12\text{-}12)$$

Таким образом, если имеются в наличии таблицы функции hav, то для решения сферических треугольников можно использовать следующие формулы:

$$\operatorname{hav} A=\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c},\qquad \operatorname{hav} a=\operatorname{hav}(b-c)+\sin b\sin c\operatorname{hav} A.\qquad(1.12\text{-}13)$$

Другие аналогичные соотношения можно получить циклической перестановкой.

ГЛАВА 2

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

2.1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

2.1-1. Вводные замечания (см. также п. 12.1-1). *Геометрия* занимается изучением объектов, которые могут быть в том или ином смысле отождествлены с точками, и представляет собой математическую модель, воспроизводящую отношения между этими объектами. В основе каждой геометрической системы лежат определенные *аксиомы*. Они могут быть выбраны таким образом, чтобы соответствующая модель отражала свойства реального физического пространства. Однако задачей геометрии является также логическое построение самых разнообразных аксиоматических систем, в том числе и таких, которые не всегда отвечают наглядным представлениям. В *аналитической геометрии* точка определяется системой чисел (ее **координат**), и, следовательно, геометрические факты записываются в виде соотношений между координатами.

Главы 2 (аналитическая геометрия на плоскости) и 3 (аналитическая геометрия в пространстве) следуют тому способу изложения, который принят в большинстве элементарных курсов: основные понятия геометрии предполагаются известными и просто переводятся на язык алгебры, становящейся вследствие этого средством исследования геометрических форм.

В гл. 17 кратко изложен и использован более глубокий метод, состоящий в построении различных геометрических систем на основании заданных аксиом. В пп. 17.1-1 — 17.1-6 содержатся краткие сведения из дифференциальной геометрии плоских кривых, включая определения касательной, нормали и кривизны.

Рис. 2.1-1. Правая декартова косоугольная система координат. Отрезки OE_1 и OE_2 — единицы масштаба на осях.

2.1-2. Декартова система координат. Декартова система координат связывает с каждой точкой P плоскости, на которой выбраны две направленные прямые (**оси координат**) Ox и Oy, пересекающиеся в начале координат O (рис. 2.1-1), пару действительных чисел, **абсциссу** x **и ординату** y; при этом пишут $P(x, y)$. Прямая, проходящая через точку P параллельно оси Oy, пересекает ось Ox в точке P'. Аналогично прямая, проходящая через точку P параллельно Ox, пересекает Oy в точке P''. Величина направленного отрезка $OP'=x$ (положительная, если направление $\overline{OP'}$ совпадает с направлением оси Ox, и отрицательная в противном случае) и определенная аналогичным способом величина $OP''=y$ называются **декартовыми координатами точки** P.

В общей (косоугольной) декартовой системе координат угол ω между осями Ox и Oy может принимать значения $0<\omega<\pi$ (**правая система**) или $-\pi<\omega<0$ (**левая система**). Если для измерения отрезков OP' и OP'' используются различные единицы длины, то система координат называется **общей декартовой** или **аффинной.**

Оси координат делят плоскость на четыре *квадранта* (рис. 2.1-1). Абсцисса x положительна для точек (x, y), расположенных в квадрантах I и IV, отрицательна в квадрантах II и III, равна нулю для точек оси Oy; ордината y положительна для точек

в квадрантах *I* и *II*, отрицательна для точек в квадрантах *III* и *IV*, равна нулю для точек оси Ox. Началом координат служит точка (0, 0).

Замечание. Аналитическая геометрия на евклидовой плоскости *постулирует* взаимно однозначное соответствие между точками прямой и действительными числами (*«координатная» аксиома, аксиома непрерывности*, см. также п. 4.3-1).

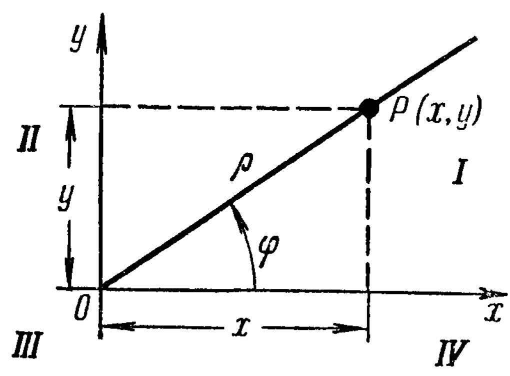


Рис. 2.1-2. Системы координат: правая декартова прямоугольная и полярная.

2.1-3. Правая декартова прямоугольная система координат. В правой декартовой прямоугольной системе координат направления осей выбираются так, что поворот оси Ox на $\pi/2$ в положительном направлении, т. е. в направлении, противоположном вращению часовой стрелки, совмещает полуось положительных x с полуосью положительных y. При этом условии координаты x, y равны соответственно расстояниям от координатных осей Ox и Oy до данной точки P, определенным по величине и знаку (рис. 2.1-2).

В этой главе, если не оговорено противное, всегда применяется правая декартова прямоугольная система координат.

2.1-4. Основные формулы в декартовых прямоугольных координатах.

1. **Расстояние** d между точками $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{2.1-1}$$

2. **Угол** γ между двумя направленными отрезками $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_3P_4}$

$$\cos\gamma=\frac{(x_2-x_1)(x_4-x_3)+(y_2-y_1)(y_4-y_3)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,\sqrt{(x_4-x_3)^2+(y_4-y_3)^2}}. \tag{2.1-2}$$

Направляющими косинусами направленного отрезка $\overrightarrow{P_1P_2}$ называются косинусы углов α_x и $\alpha_y=\frac{\pi}{2}-\alpha_x$, образованных отрезком с положительными направлениями координатных осей:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_x&=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}},\\ \cos\alpha_y&=\sin\alpha_x=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{2.1-3}$$

3. Координаты x, y **точки** P, **делящей направленный отрезок** $\overrightarrow{P_1P_2}$ **между точками** $P_1(x_1, y_1)$ **и** $P_2(x_2, y_2)$ **в отношении** $P_1P:PP_2=m:n=\lambda:1$, определяются формулами

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\\ y&=\frac{my_2+ny_1}{m+n}=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\end{aligned}\quad -\infty<\lambda<+\infty.\right\} \tag{2.1-4}$$

Координаты **середины отрезка** P_1P_2:

$$x_1=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{2.1-5}$$

∗ При $0<\lambda<\infty$ точка P лежит внутри отрезка P_1P_2, а при $-1<\lambda<0$ и $-\infty<\lambda<-1$ — вне его. При $\lambda=0$ точка P совпадает с точкой P_1, а при $\lambda\to\pm\infty$ точка P стремится к точке P_2.

Формулы (4) сохраняют смысл при $\lambda=-1$, если прямая дополнена несобственной или «бесконечно удаленной» точкой, которая делит любой отрезок этой прямой в отношении, равном -1. ∗

4. **Площадь** S **треугольника с вершинами** $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ определяется формулой

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\,[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]. \tag{2.1-6}$$

В частности, если $x_3=y_3=0$, то

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1). \qquad (2.1\text{-}7)$$

Значение S положительно, если направление обхода $P_1P_2P_3$ совпадает с положительным (против часовой стрелки) направлением вращения.

2.1-5. Преобразование декартовых координат при параллельном переносе осей. Пусть x, y — координаты произвольной точки P относительно декартовой системы координат; пусть $\bar{x}$, $\bar{y}$ — координаты этой же точки P относительно другой декартовой системы координат, оси которой соответственно параллельны осям первой системы и направлены так же, как они, и начало которой имеет относительно системы Oxy координаты x_0, y_0. Если на осях этих систем выбраны одинаковые единицы масштаба, то координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$ связаны с x, y следующими *формулами преобразования* (рис. 2.1-3):

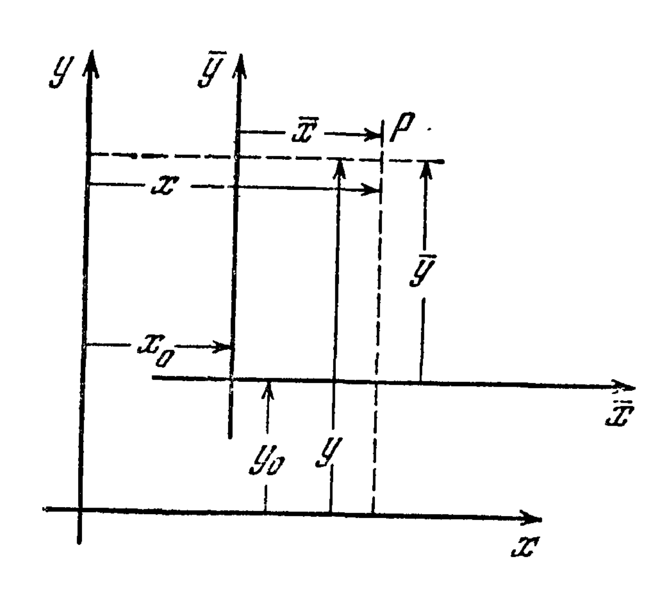


Рис. 2.1-3. Параллельный перенос осей координат.

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}&=x-x_0, & \bar{y}&=y-y_0 \\ \text{или}\quad x&=\bar{x}+x_0, & y&=\bar{y}+y_0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1\text{-}8)$$

Уравнения (8) допускают еще одно истолкование. Если рассматривать $\bar{x}$ и $\bar{y}$ как координаты относительно первоначальной системы координат (т. е. системы Oxy), то *точка* $(\bar{x}, \bar{y})$ *может быть получена из точки* (x, y) *при помощи переноса* на $-x_0$ в направлении оси Ox и на $-y_0$ в направлении оси Oy. Применение этого преобразования к каждой точке некоторой плоской кривой можно рассматривать как преобразование переноса кривой.

2.1-6. Преобразование декартовых прямоугольных координат при повороте осей. Пусть x, y — координаты некоторой точки P относительно декартовой прямоугольной системы координат. Пусть $\bar{x}$, $\bar{y}$ — координаты этой же точки относительно новой прямоугольной системы координат с тем же началом, расположенной относительно системы Oxy таким образом, что угол $xO\bar{x}$ между осью Ox и осью $O\bar{x}$ равен θ; угол отсчитывается в положительном направлении (рис. 2.1-4).

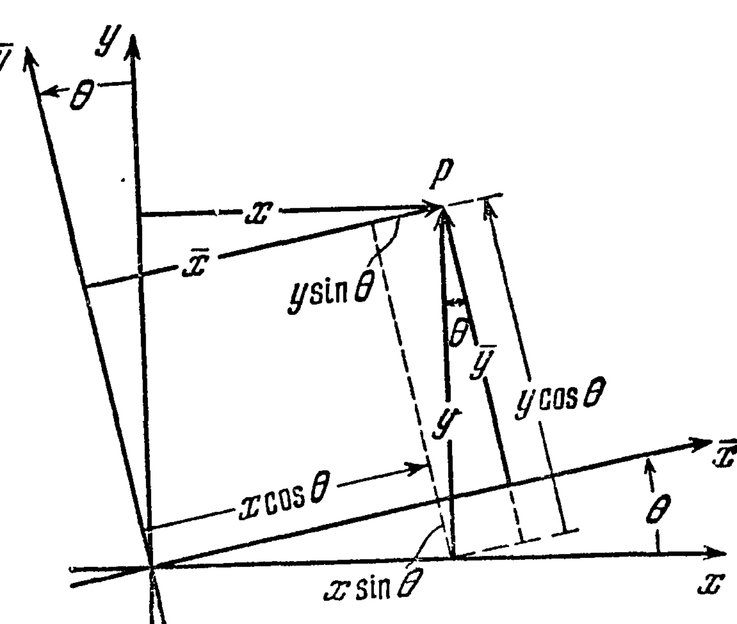


Рис. 2.1-4. Поворот осей координат.

При одинаковых единицах масштаба на осях координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$ связаны с координатами x, y следующими формулами преобразования:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}&=x\cos\theta+y\sin\theta, & \bar{y}&=-x\sin\theta+y\cos\theta, \\ \text{или}\quad x&=\bar{x}\cos\theta-\bar{y}\sin\theta, & y&=\bar{x}\sin\theta+\bar{y}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1\text{-}9)$$

Если рассматривать x, y и $\bar{x}$, $\bar{y}$ как координаты двух различных точек относительно одной и той же системы координат, то формулы (9) определят преобразование поворота на угол $-\theta$ вокруг начала координат, переводящее точку (x, y) в точку $(\bar{x}, \bar{y})$.

2.1-7. Одновременный перенос и поворот координатных осей. Если начало координат системы $O\bar{x}\bar{y}$ из п. 2.1-6 не совпадает с началом системы Oxy и

имеет относительно последней координаты x_0, y_0, то уравнения преобразования принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= (x-x_0)\cos\theta + (y-y_0)\sin\theta, \\ \bar{y} &= -(x-x_0)\sin\theta + (y-y_0)\cos\theta, \\ &\text{или} \\ x &= x_0 + \bar{x}\cos\theta - \bar{y}\sin\theta, \\ y &= y_0 + \bar{x}\sin\theta - \bar{y}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \quad (2.1\text{-}10)$$

Формулы (10) позволяют найти зависимость между координатами точки в любых двух правых декартовых прямоугольных системах координат с одинаковыми единицами масштаба на осях.

Формулы (10) определяют также преобразования переноса и вращения, переводящие точку (x, y) в точку $(\bar{x}, \bar{y})$, где обе точки рассматриваются в одной и той же системе координат.

Замечание. Преобразования (8), (9) и (10) не изменяют расстояния (1) между двумя точками или величину угла, определяемую формулой (2). *Соотношения, составляющие содержание евклидовой геометрии, не изменяются при преобразовании переноса и поворота, т. е. инвариантны относительно этих преобразований* (см. также пп. 12.1-5, 14.1-4, 14.4-5).

2.1-8. Полярные координаты. Полярная система координат на плоскости задается точкой O **(полюс)** и направленной прямой Ox **(полярная ось)**. С каждой точкой P плоскости, на которой задана полярная система координат, можно связать определенную пару чисел ρ, φ **(полярные координаты)**. Полярный радиус ρ есть длина отрезка OP, а полярный угол φ — радианная мера угла xOP, отсчитанная в направлении, противоположном вращению часовой стрелки (см. рис. 2.1-2). Угол φ определен с точностью до слагаемого $2k\pi$, где k — любое целое число. Точка (ρ, φ) по определению совпадает с точкой $(-\rho, \varphi \pm \pi)$; это условие связывает определенную точку плоскости с каждой парой чисел (ρ, φ) не только при положительных, но и при отрицательных значениях ρ. Для полюса O величина φ не определена.

Замечание. В отличие от декартовой системы, полярная система координат не устанавливает взаимно однозначного соответствия между парами чисел (ρ, φ) и точками плоскости. Однако в большинстве приложений возникающая в результате этого неопределенность может быть устранена.

Если полюс и полярная ось совпадают соответственно с началом O и осью Ox прямоугольной системы координат (см. рис. 2.1-2), то при условии, что для измерения r, x и y использованы равные единицы масштаба, декартовы и полярные координаты связаны следующими формулами преобразования:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \\ \rho &= \sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0. \end{aligned}\right\} \quad (2.1\text{-}11)$$

Имеют место следующие формулы (ρ, φ — полярные координаты):

1. **Расстояние** d между точками (ρ_1, φ_1) и (ρ_2, φ_2):

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (2.1\text{-}12)$$

2. **Площадь треугольника** с вершинами $P_1(\rho_1, \varphi_1)$, $P_2(\rho_2, \varphi_2)$, $P_3(\rho_3, \varphi_3)$:

$$S = \frac{1}{2}[\rho_1\rho_2\sin(\varphi_2-\varphi_1) + \rho_2\rho_3\sin(\varphi_3-\varphi_2) + \rho_3\rho_1\sin(\varphi_1-\varphi_3)]. \quad (2.1\text{-}13)$$

В частности, если $\rho_3 = 0$, то

$$S = \frac{1}{2}[\rho_1\rho_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)]. \quad (2.1\text{-}14)$$

О знаке S см. п. 2.1-4.4.

О других криволинейных системах координат см. в гл. 6.

2.1-9. Способы задания кривых (см. также пп. 3.1-13 и 17.1-1).

(a) Уравнение кривой. Уравнение вида

$$\varphi(x,\ y)=0 \quad \text{или} \quad y=f(x) \qquad (2.1\text{-}15)$$

удовлетворяется координатами точек, принадлежащих определенному точечному множеству. В большинстве случаев, представляющих интерес, это точечное множество образует кривую (см. также п. 3.1-13). Обратно, заданную кривую можно определить уравнением (15), которое должно удовлетворяться координатами всех точек кривой и только этих точек. Возможен случай, когда кривая имеет более одной ветви.

Кривые, определяемые уравнениями

$$\varphi(x,\ y)=0 \quad \text{и} \quad \lambda\varphi(x,\ y)=0,$$

где λ — отличная от нуля постоянная, совпадают.

(b) **Параметрическое задание кривых.** Плоская кривая может быть задана также двумя уравнениями

$$x=x(t), \qquad y=y(t), \qquad (2.1\text{-}16)$$

где t — переменный параметр.

(c) Пересечение двух кривых. Значения координат x и y, которые одновременно удовлетворяют уравнениям двух кривых

$$\varphi_1(x,\ y)=0,\ \varphi_2(x,\ y)=0, \qquad (2.1\text{-}17)$$

определяют *точку пересечения* этих кривых. В частности, если уравнение $\varphi(x,\ 0)=0$ имеет действительные корни, то они служат абсциссами точек пересечения кривой $\varphi(x,\ y)=0$ с осью Ox.

Если $\varphi(x,\ y)$ — полином степени n (п. 1.4-3), то кривая $\varphi(x,\ y)=0$ пересекает ось Ox (как и любую прямую линию, п. 2.2-1) в n точках (*кривая n-го порядка*); однако некоторые из этих точек пересечения могут совпадать или быть мнимыми.

Для любого действительного λ уравнение

$$\varphi_1(x,\ y)+\lambda\varphi_2(x,\ y)=0 \qquad (2.1\text{-}18)$$

определяет кривую, проходящую через точки пересечения (действительные или мнимые) двух кривых (17).

(d) Уравнение

$$\varphi_1(x,\ y)\cdot\varphi_2(x,\ y)=0 \qquad (2.1\text{-}19)$$

удовлетворяется координатами точек, принадлежащих любой из кривых (17), и не удовлетворяется координатами других точек.

2.2. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

2.2-1. Уравнение прямой линии. Каждое уравнение, линейное относительно декартовых координат x и y, т. е. уравнение вида

$$Ax+By+C=0, \qquad (2.2\text{-}1)$$

где A и B не равны нулю одновременно, определяет прямую линию (рис. 2.2-1). Обратно, каждая прямая линия может быть определена линейным уравнением (1). При $C=0$ прямая проходит через начало координат.

Особенно важное значение имеют следующие виды уравнения прямой.

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Прямая, образующая угол φ с положительным направлением оси Ox (рис. 2.2-1) и пересекающая ось Oy в точке $(0,\ b)$:

$$y=kx+b, \qquad k=\operatorname{tg}\varphi.$$

Коэффициент k называется **угловым коэффициентом** прямой.

2. Уравнение прямой в отрезках. Прямая линия, пересекающая ось Ox в точке $(a, 0)$ и ось Oy в точке $(0, b)$ (см. рис. 2.2-1):

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (a\neq 0,\ b\neq 0).$$

3. Нормальное уравнение прямой. Пусть p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а θ — угол (измеренный в положительном направлении) между положительным направлением оси Ox и направлением перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую (см. рис. 2.2-1).

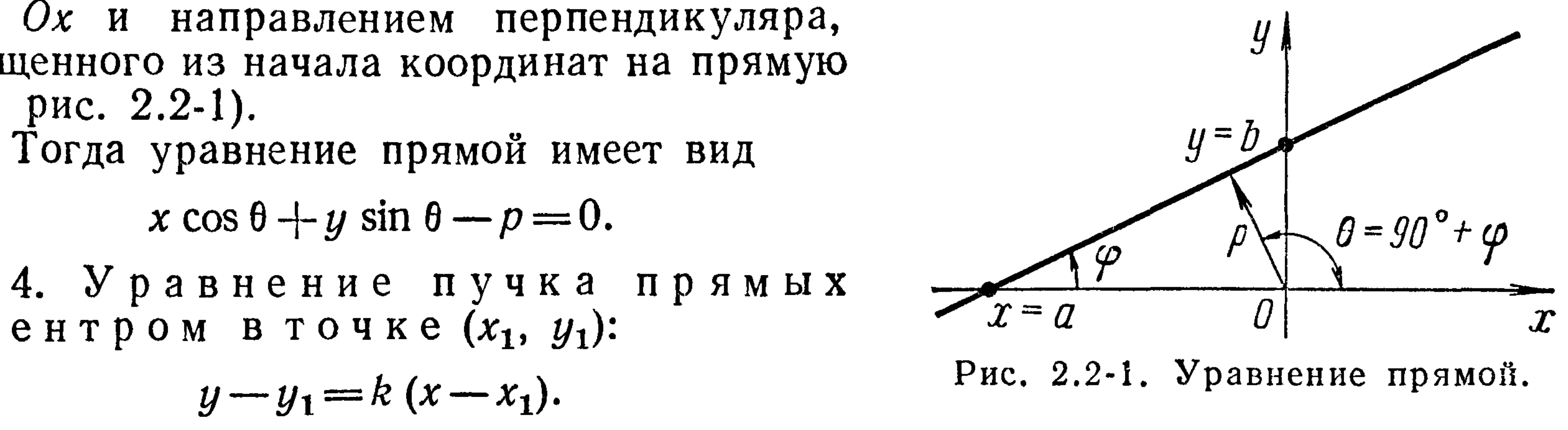


Рис. 2.2-1. Уравнение прямой.

Тогда уравнение прямой имеет вид

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0.$$

4. Уравнение пучка прямых с центром в точке (x_1, y_1):

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

5. Уравнение прямой, проходящей через две данные (несовпадающие) точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Если прямая задана общим уравнением (1), то отрезки a и b, отсекаемые ею на осях, угловой коэффициент k, расстояние прямой от начала координат p, $\cos\theta$ и $\sin\theta$ выражаются через коэффициенты A, B и C следующим образом:

$$a=-\frac{C}{A}, \qquad b=-\frac{C}{B}, \qquad k=\operatorname{tg}\varphi=-\frac{A}{B}, \qquad \varphi=\theta-\frac{\pi}{2}, \tag{2.2-2}$$

$$p=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \cos\theta=\frac{A}{\pm\sqrt{A_2+B_2}}, \qquad \sin\theta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{2.2-3}$$

Во избежание неопределенности знак перед радикалом выбирается так, чтобы соблюдалось условие $p>0$.

В этом случае $\cos\theta$ и $\sin\theta$ являются направляющими косинусами положительной нормали прямой — перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую (см. п. 17.1-2). Если $C=0$, то выбор положительного направления на нормали произволен.

2.2-2. Другие способы задания прямой. Параметрические уравнения прямой могут быть записаны в виде

$$x=a_x t+x_0, \quad y=a_y t+y_0 \quad (t \text{ — переменный параметр}); \tag{2.2-4}$$

при этом

$$k=\frac{a_y}{a_x}, \qquad a=\frac{a_y x_0-a_x y_0}{a_y}, \qquad b=\frac{a_x y_0-a_y x_0}{a_x}, \tag{2.2-5}$$

$$p=\frac{a_x y_0-a_y x_0}{\pm\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2}}, \qquad \cos\theta=\frac{a_y}{\pm\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2}},$$

$$\sin\theta=-\frac{a_x}{\pm\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2}}. \tag{2.2-6}$$

Если знак корня выбран так, что $p>0$, то начало координат будет лежать справа от направления, в котором точка (x, y) перемещается по прямой при возрастании t.

Уравнение прямой в полярных координатах:

$$\rho\,(A\cos\varphi+B\sin\varphi)+C=0 \qquad (2.2\text{-}7)$$

или

$$\rho\cos(\varphi-\theta)=p, \qquad (2.2\text{-}8)$$

где A, B, C, p и θ имеют тот же смысл, что и в п. 2.2-1; ρ, φ — полярные координаты.

2.3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК И ПРЯМЫХ

2.3-1. Точки и прямые. *Расстояние δ от точки $P_0(x_0,\ y_0)$ до прямой* $Ax+By+C=0$, определенное по величине и знаку, может быть найдено по формуле

$$\delta=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad (2.3\text{-}1)$$

где знак перед радикалом противоположен знаку C. Иногда δ называют отклонением точки от прямой; отклонение положительно, если начало координат и точка $P_0(x_0,\ y_0)$ лежат по разные стороны от прямой, и отрицательно, если по одну сторону.

Три точки $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ и *$(x_3,\ y_3)$ лежат на одной прямой в том и только в том случае, если* (см. также п. 2.2-1)

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0. \qquad (2.3\text{-}2)$$

2.3-2. Две или несколько прямых.

(a) *Две прямые*

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{или} \quad y=k_1x+b_1 \qquad (2.3\text{-}3a)$$

и

$$A_2x+B_2y+C_2=0 \quad \text{или} \quad y=k_2x+b_2 \qquad (2.3\text{-}3b)$$

пересекаются в точке

$$x=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}=\frac{b_1-b_2}{k_2-k_1}, \qquad y=\frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}=\frac{k_2b_1-k_1b_2}{k_2-k_1}. \qquad (2.3\text{-}4)$$

(b) *Угол γ_{12} между двумя пересекающимися прямыми* (3*a*) и (3*b*) определяется формулой

$$\operatorname{tg}\gamma_{12}=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (2.3\text{-}5)$$

∗ Под углом γ_{12} при этом понимается угол, на который нужно повернуть прямую (3*a*) вокруг точки пересечения прямых против часовой стрелки до первого совмещения с прямой (3*b*). Поменяв местами k_1 и k_2, получим тангенс смежного угла $\gamma_{21}=\pi-\gamma_{12}$. ∗

(c) Прямые (3*a*) и (3*b*) *параллельны*, если

$$A_1B_2-A_2B_1=0 \quad \text{или} \quad k_2=k_1, \qquad (2.3\text{-}6)$$

и *перпендикулярны*, если

$$A_1A_2+B_1B_2=0 \quad \text{или} \quad k_2=-\frac{1}{k_1}. \qquad (2.3\text{-}7)$$

(d) Уравнения прямых, проходящих через точку $(x_1,\ y_1)$ под углом γ к прямой (3*a*):

$$y-y_1=\frac{B_1\operatorname{tg}\gamma-A_1}{A_1\operatorname{tg}\gamma+B_1}(x-x_1); \qquad y-y_1=\frac{B_1\operatorname{tg}\gamma+A_1}{A_1\operatorname{tg}\gamma-B_1}(x-x_1). \qquad (2.3\text{-}8)$$

В частности, *нормаль* к прямой ($3a$), проходящая через точку (x_1, y_1), определяется уравнением

$$y-y_1=\frac{B_1}{A_1}(x-x_1) \quad \text{или} \quad y-y_1=-\frac{1}{k_1}(x-x_1). \qquad (2.3\text{-}9)$$

(e) Уравнение любой прямой, *параллельной* ($3a$):

$$A_1x+B_1y+C=0. \qquad (2.3\text{-}10)$$

Расстояние δ *между параллельными прямыми* ($3a$) и (10):

$$\delta=\frac{C_1-C}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2}}. \qquad (2.3\text{-}11)$$

Если в (11) знак перед радикалом противоположен знаку C_1, то δ будет положительным, когда начало координат и прямая (10) лежат по разные стороны от прямой ($3a$).

(f) Уравнение *любой прямой, проходящей через точку пересечения прямых* ($3a$) и ($3b$), имеет вид

$$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0, \qquad (2.3\text{-}12)$$

где λ — постоянная (см. также п. 2.1-9, с). Обратно, каждое уравнение вида (12) определяет прямую, проходящую через точку пересечения данных прямых. Если ($3a$) и ($3b$) параллельны, то (12) определяет прямую, которая в свою очередь им параллельна. Совокупность прямых, определяемых уравнением (12) при различных значениях параметра λ, называется *пучком прямых*, а точка их пересечения — *центром пучка*. Если базисные прямые ($3a$) и ($3b$) пучка заданы нормальными уравнениями (п. 2.2-1), то ($-\lambda$) равно отношению расстояний от любой точки прямой (12) до базисных прямых; при $\lambda=1$ и $\lambda=-1$ полученная прямая служит биссектрисой угла между базисными прямыми пучка.

(g) *Для того чтобы три прямые*

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0, \quad A_3x+B_3y+C_3=0 \qquad (2.3\text{-}13)$$

пересекались в одной точке или были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0, \qquad (2.3\text{-}14)$$

т. е. чтобы левые части уравнений (13) были *линейно зависимы* (п. 1.9-3, а).

2.3-3. Тангенциальные координаты. Уравнение

$$\xi x+\eta y+1=0 \qquad (2.3\text{-}15)$$

определяет прямую линию (ξ, η). Числа ξ и η называются ее **тангенциальными (линейными, плюккеровыми) координатами.** Если точечные координаты x, y фиксированы, а ξ, η рассматриваются как переменные, то (15) становится уравнением точки (x, y), т. е. точки пересечения всех прямых (15). Симметрия уравнения (15) относительно точечных и тангенциальных координат влечет за собой соответствие (двойственность) между теоремами, относящимися к взаимному расположению точек и прямых (пп. 2.3-1 и 2.3-2). Уравнение $F(\xi, \eta)=0$ определяет семейство прямых, которое, вообще говоря, имеет огибающую, зависящую от вида функции $F(\xi, \eta)$ (п. 17.1-7).

2.4. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА (КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ)

2.4-1. Общее уравнение второй степени. Кривые второго порядка (конические сечения) определяются уравнениями второй степени относительно декартовых прямоугольных координат. **Общее уравнение второй степени** относительно x, y имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \\ \text{или}\quad &(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})\,x+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23})\,y+(a_{31}x+a_{32}y+a_{33})=0, \\ \text{где}\quad &a_{ik}=a_{ki} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3). \end{aligned}\right\} \quad (2.4\text{-}1)$$

2.4-2. Инварианты. Для любого уравнения (1) три величины

$$I=a_{11}+a_{22},\qquad D=A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\qquad A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2.4\text{-}2)$$

являются *инвариантами* относительно переноса и поворота осей (2.1-8), (2.1-9) и (2.1-10). Эти инварианты определяют свойства кривой второго порядка, не зависящие от ее положения на плоскости.

Инвариант A, а также иногда $\Delta=8A$, называют *дискриминантом* уравнения (1).

2.4-3. Классификация кривых второго порядка. Табл. 2.4-1 содержит классификацию кривых второго порядка, основанную на их инвариантах (2.4-2); в этой таблице

$$A'=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad (2.4\text{-}3)$$

A' является инвариантом относительно поворота осей (*семиинвариантом*).

2.4-4. Условие подобия невырожденных кривых второго порядка. Две невырожденные кривые второго порядка ($A\neq 0$), заданные уравнениями вида (1), *подобны*, если $D=0$ для каждого из уравнений (т. е. если обе кривые — параболы) или если $D\neq 0$ для каждого из уравнений и отношения $a_{11}:a_{12}:a_{22}$ для этих уравнений совпадают.

2.4-5. Характеристическая квадратичная форма и характеристическое уравнение. Многие важные свойства кривых второго порядка могут быть изучены при помощи **характеристической квадратичной формы**

$$F_0(x,\ y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2, \quad (2.4\text{-}4)$$

соответствующей уравнению (1). В частности, невырожденная кривая второго порядка ($A\neq 0$) оказывается действительным эллипсом, мнимым эллипсом, гиперболой или параболой в зависимости от того, будет ли $F_0(x,\ y)$ положительно определенной, отрицательно определенной, неопределенной или полуопределенной квадратичной формой, что устанавливается по корням λ_1, λ_2 ее *характеристического уравнения*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \text{или} \quad \lambda^2-I\lambda+D=0. \quad (2.4\text{-}5)$$

Корни λ_1, λ_2 являются *собственными значениями* действительной симметрической матрицы $[a_{ik}]$ (пп. 13.4-5, 13.5-2) и, как следствие этого, всегда действительны.

∗ Заметим, что инварианты I и D кривой второго порядка следующим образом выражаются через корни характеристического уравнения (5):

$$I=\lambda_1+\lambda_2,\qquad D=\lambda_1\lambda_2.$$

Отсюда следует, что если один из корней λ_1, λ_2 равен нулю, то $D=0$, а если $\lambda_2=-\lambda_1$, т. е. $I=0$, то $D<0$ (см. табл. 2.4-1). ∗

2.4-6. Центры и диаметры кривых второго порядка.

(а) **Диаметром** кривой второго порядка называется прямая, являющаяся геометрическим местом середин параллельных хорд. Говорят, что диаметр **сопряжен** хордам (а также направлению хорд), которые он делит пополам.

Таблица 2.4-1

Классификация кривых второго порядка

			Невырожденные кривые $A \neq 0$		**Вырожденные (распадающиеся) кривые** $A = 0$
Центральные кривые второго порядка $D \neq 0$	$D > 0$	$\frac{A}{I} < 0$	**Действительный эллипс** (окружность, если $I^2 = 4D$ или $a_{11} = a_{22},\ a_{12} = 0$)		Действительная **точка** пересечения двух мнимых прямых (эллипс, выродившийся в точку)
		$\frac{A}{I} > 0$	Мнимый **эллипс** (ни одной действительной точки)		
	$D < 0$		**Гипербола**		**Пара действительных пересекающихся прямых** (выродившаяся гипербола)
Нецентральные кривые второго порядка (без центра или с неопределенным центром) $D = 0$	$D = 0$		**Парабола**	$A' > 0$	**Пара мнимых параллельных прямых** (ни одной действительной точки)
				$A' < 0$	**Пара действительных параллельных прямых**
				$A' = 0$	**Одна действительная прямая** (пара совпавших прямых)

Диаметр, сопряженный хордам, образующим угол θ с положительным направлением оси Ox, определяется уравнением

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) \cos\theta + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) \sin\theta = 0. \tag{2.4-6}$$

(b) При $D \neq 0$ все диаметры кривой второго порядка пересекаются в одной точке — **центре** кривой (другое определение см. в п. 2.4-10). При $D = 0$ все диаметры параллельны или совпадают. В случае $D \neq 0$ кривая второго порядка называется **центральной**.

Координаты центра (x_0, y_0) определяются уравнениями

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \qquad a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0, \tag{2.4-7}$$

откуда следует, что

$$x_0 = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad y_0 = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \quad (D \neq 0). \tag{2.4-8}$$

Если кривая центральная, то перенос (2.1-8) начала координат в ее центр (8) приводит уравнение кривой к виду

$$a_{11}\bar{x}^2 + 2a_{12}\bar{x}\bar{y} + a_{22}\bar{y}^2 + \frac{A}{D} = 0, \tag{2.4-9}$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ — координаты относительно новой системы.

(c) Каждый из двух **сопряженных диаметров** центральной кривой второго порядка делит пополам хорды, параллельные другому диаметру (см. также п. 2.5-2, e).

2.4-7. Главные оси. Диаметр, перпендикулярный к сопряженным ему хордам, называется **главной осью** кривой второго порядка и является осью симметрии кривой. Каждая центральная кривая второго порядка ($D \neq 0$) либо имеет две взаимно перпендикулярные главные оси, либо каждый диаметр является главной осью; в последнем случае кривая является окружностью. При $D = 0$ кривая имеет одну главную ось (см. табл. 2.4-1). Точки пересечения кривой второго порядка с ее главными осями называются **вершинами** этой кривой.

Главные оси имеют направление собственных векторов матрицы $[a_{ik}]$ ($i, k = 1, 2$) (см. п. 14.8-6). Иначе говоря, направляющие косинусы $\cos\theta$, $\sin\theta$ нормалей к главным осям (п. 2.2-1) удовлетворяют уравнениям

$$(a_{11} - \lambda)\cos\theta + a_{12}\sin\theta = 0, \qquad a_{21}\cos\theta + (a_{22} - \lambda)\sin\theta = 0, \tag{2.4-10}$$

где λ — отличный от нуля корень уравнения (5). Направления главных осей и сопряженных им хорд называются **главными направлениями** кривой второго порядка. Угол между положительным направлением оси Ox и каждым из двух главных направлений кривой определяется формулой

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}; \tag{2.4-11}$$

только окружность имеет неопределенные главные направления.

2.4-8. Приведение уравнения кривой второго порядка к стандартному (каноническому) виду. Если ввести новую систему координат, совершив поворот осей на угол, удовлетворяющий уравнению (11), и подходящий перенос начала (п. 2.1-7), то уравнение (1) любой невырожденной кривой второго порядка может быть приведено к следующему стандартному (или каноническому) виду (параметры a^2, b^2 и p, встречающиеся в канонических уравнениях, весьма просто выражаются через корни $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ характеристического уравнения (5) и инварианты A, D, I):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\textit{эллипс}), \\ &a^2 = -\frac{1}{\lambda_2}\frac{A}{D} = -\frac{A}{\lambda_1\lambda_2^2}, \qquad b^2 = -\frac{1}{\lambda_1}\frac{A}{D} = -\frac{A}{\lambda_1^2\lambda_2}, \end{aligned}\right\} \tag{2.4-12a}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\textit{гипербола}), \\ &a^2 = -\frac{1}{\lambda_1}\frac{A}{D} = -\frac{A}{\lambda_1^2\lambda_2}, \qquad b^2 = \frac{1}{\lambda_2}\frac{A}{D} = \frac{A}{\lambda_1\lambda_2^2}; \end{aligned}\right\} \tag{2.4-12b}$$

$$\left.\begin{aligned} &y^2 = 2px \quad (\textit{парабола}), \\ &p = \frac{1}{I}\sqrt{-\frac{A}{I}} = \frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{A}{\lambda_1}} > 0, \qquad \lambda_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.4-12c}$$

Уравнения *вырожденных* (*распадающихся*) кривых второго порядка аналогичным способом приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (\textit{точка}), \\ &\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (\textit{пересекающиеся прямые}), \\ &\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (\textit{параллельные прямые}), \\ &x^2 = 0 \quad (\textit{одна действительная прямая}). \end{aligned}\right\} \tag{2.4-13}$$

Замечание. Поворот координатных осей (2.1-9) на угол, удовлетворяющий уравнению (11), приводит к диагональному виду матрицу $[a_{ik}]$ характеристической квадратичной формы (4) (см. также п. 14.8-6). Изменение θ на угол, кратный $\pi/2$, соответствует некоторой перестановке переменных x, y, $-x$ и $-y$. Канонические уравнения (12, a), (12, b), (12, c) соответствуют такому выбору θ, при котором фокусы (п. 2.4-9) кривых второго порядка лежат на оси Ox.

2.4-9. Геометрическое определение невырожденной кривой второго порядка. Каноническое уравнение любой невырожденной кривой второго порядка (12) может быть при помощи подходящего преобразования начала (п. 2.1-5) приведено к виду

$$y^2=2px-(1-\varepsilon^2)x^2 \qquad (p>0). \tag{2.4-14}$$

В этом случае кривая проходит через начало координат новой системы; ось Ox является осью симметрии кривой. Уравнение (14) выражает тот факт, что *невырожденная кривая второго порядка является геометрическим местом точек, отношение расстояний которых* $\varepsilon \geqslant 0$ **(эксцентриситет)** *от данной точки* **(фокуса)** *и от данной прямой* **(директрисы)** *постоянно. Кривая есть эллипс при* $\varepsilon<1$ *и, в частности, окружность при* $\varepsilon=0$, *гипербола при* $\varepsilon>1$ *и парабола при* $\varepsilon=1$.

Уравнение *директрисы кривой* (14):

$$x=-\frac{p}{\varepsilon(1+\varepsilon)}, \tag{2.4-15}$$

координаты *фокуса:*

$$x=\frac{p}{1+\varepsilon}, \qquad y=0. \tag{2.4-16}$$

Директриса перпендикулярна к оси симметрии, проходящей через фокус и вершину кривой **(фокальная ось)**. Расстояние между фокусом и директрисой равно p/ε. Если кривая второго порядка *центральная* (эллипс или гипербола), то прямая

$$x=\frac{p}{1-\varepsilon^2}=a \tag{2.4-17}$$

является осью симметрии кривой и, следовательно, кривая имеет два фокуса и две директрисы.

Фокальным параметром невырожденной кривой второго порядка называется половина длины ее хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной к фокальной оси *(фокальная хорда);* фокальный параметр равен p.

Замечание. *Все типы кривых второго порядка, вырожденных и невырожденных, могут быть получены как плоские сечения прямого кругового конуса при различных положениях секущей плоскости относительно конуса.* Если кривая распадается на пару параллельных прямых, то следует считать, что конус вырождается в *цилиндр*.

2.4-10. Касательные и нормали к кривым второго порядка. Полюсы и поляры. *Уравнение касательной* (п. 17.1-1) к кривой второго порядка (1) в ее точке (x_1, y_1) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1x+a_{12}(y_1x+x_1y)+a_{22}y_1y+a_{13}(x_1+x)+a_{23}(y_1+y)+a_{33}=0\\ &\text{или}\\ &(a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13})x+(a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23})y+(a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33})=0. \end{aligned}\right\} \tag{2.4-18}$$

Уравнение нормали (п. 17.1-2) к кривой второго порядка (1) в точке (x_1, y_1) имеет вид

$$\frac{x-x_1}{a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}}=\frac{y-y_1}{a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23}}. \tag{2.4-19}$$

Уравнение (18) определяет прямую, называемую **полярой** точки (x_1, y_1) относительно кривой второго порядка (1), независимо от того, лежит ли точка (x_1, y_1) на кривой или нет; точка (x_1, y_1) называется **полюсом** прямой (18). Поляра точки кривой есть касательная к кривой в этой точке.

Таблица 2.4-2

Касательные, нормали, поляры и полюсы кривых второго порядка

Кривая	**Окружность** радиуса R с центром в начале координат	**Парабола** с фокусом $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ и директрисой $x = -\frac{p}{2}$	**Эллипс** с центром в начале координат; большая ось $2a$ на оси Ox, малая ось $2b$	**Гипербола** с центром в начале координат; действительная ось на оси $2a$, мнимая ось $2b$
Уравнение **кривой**	$x^2 + y^2 = R^2$	$y^2 = 2px$	$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Уравнения **касательных к кривой**, проходящих через точку (x_1, y_1)	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{-x_1 y_1 \pm R\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - R^2}}{R^2 - x_1^2}$	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2px_1}}{2x_1}$	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{-x_1 y_1 \pm \sqrt{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2}}{a^2 - x_1^2}$	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{-x_1 y_1 \pm \sqrt{-b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 + a^2 b^2}}{a^2 - x_1^2}$
Уравнения **касательных к кривой**, имеющих данный угловой коэффициент k	$y = kx \pm R\sqrt{1 + k^2}$	$y = kx + \frac{p}{2k}$	$y = kx \pm \sqrt{k^2 a^2 + b^2}$	$y = kx \pm \sqrt{k^2 a^2 - b^2}$
Уравнение **поляры** точки (x_1, y_1) или уравнение **касательной к кривой** в точке (x_1, y_1)	$x_1 x + y_1 y = R^2$	$y_1 y = p(x + x_1)$	$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$	$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$
Координаты x_1, y_1 **полюса** прямой $Ax + By + C = 0$ относительно кривой	$x_1 = -\frac{AR^2}{C}$, $y_1 = -\frac{BR^2}{C}$	$x_1 = \frac{C}{A}$, $y_1 = -\frac{Bp}{A}$	$x_1 = -\frac{a^2 A}{C}$, $y_1 = -\frac{b^2 B}{C}$	$x_1 = -\frac{a^2 A}{C}$, $y_1 = \frac{b^2 B}{C}$
Уравнение **нормали** к кривой в точке (x_1, y_1)	$y = \frac{y_1}{x_1} x$	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{y_1}{p}$	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$
Уравнение, которому удовлетворяют «линейные координаты» ξ, η любой касательной $\xi x + \eta y + 1 = 0$ к кривой	$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{R^2}$	$\eta^2 = \frac{2}{p}\xi$	$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 = 1$	$a^2\xi^2 - b^2\eta^2 = 1$

Уравнения касательных, поляр и нормалей для кривых второго порядка, заданных каноническими уравнениями (п. 2.4-8), приведены в таблице 2.4-2.

Замечание (теоремы о полюсах и полярах).

1. *Если прямая, проведенная через полюс P, пересекает поляру в точке Q, а кривую второго порядка — в точках R_1 и R_2, то точки P и Q* **гармонически разделяют** *R_1 и R_2, т. е.* $\frac{R_1P}{PR_2} = -\frac{R_1Q}{QR_2}$ (новое определение поляры).

2. *Если точка лежит на некоторой прямой, то ее поляра проходит через полюс этой прямой. Если прямая проходит через некоторую точку, то ее полюс лежит на поляре этой точки.*

3. *Диаметр кривой второго порядка есть поляра бесконечно удаленной точки, через которую проходят сопряженные ему хорды; центр кривой второго порядка есть полюс бесконечно удаленной прямой* (новое определение диаметра и центра).

4. *Фокус кривой второго порядка есть центр пучка, обладающего тем свойством, что полюс любой его прямой принадлежит перпендикулярной к ней прямой пучка. Директриса есть поляра фокуса* (новое определение фокуса и директрисы).

Из 1—4 следует, в частности, что:

(a) *Если через точку можно провести две касательные к кривой, то поляра этой точки проходит через точки касания.*

(b) *Касательные к кривой в концах диаметра параллельны сопряженным ему хордам.*

(c) *Точка пересечения касательных к кривой в концах любой ее хорды, проходящей через фокус, лежит на директрисе.*

(d) *Каждая хорда, проходящая через фокус, перпендикулярна к прямой, проведенной через фокус и точку пересечения касательных в концах хорды.*

2.4-11. Другие способы задания кривых второго порядка.

(a) *Кривая второго порядка вполне определяется пятью своими точками, если никакие четыре из них не лежат на одной прямой* (п. 2.3-1). Уравнение кривой второго порядка, проходящей через пять точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5):

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.4\text{-}20)$$

Кривая второго порядка вырождается в том и только в том случае, когда три из заданных точек лежат на одной прямой.

Замечание. Построение кривой второго порядка, проходящей через пять данных точек, осуществляется при помощи *теоремы Паскаля: точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в кривую второго порядка, лежат на одной прямой (или являются бесконечно удаленными).*

Кривая второго порядка также вполне определяется пятью касательными, если никакие четыре из них не пересекаются в одной точке. Построение касательных к этой кривой производится при помощи *теоремы Брианшона: диагонали, проходящие через противоположные вершины шестиугольника, описанного около кривой второго порядка, пересекаются в одной точке (или параллельны).*

(b) Если фокус невырожденной кривой второго порядка принят за полюс, а ось симметрии — за полярную ось, то уравнение этой кривой в полярных координатах ρ, φ будет иметь вид

$$\rho = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}. \qquad (2.4\text{-}21)$$

2.5. СВОЙСТВА ОКРУЖНОСТЕЙ, ЭЛЛИПСОВ, ГИПЕРБОЛ И ПАРАБОЛ

2.5-1. Окружность: формулы и теоремы (см. также табл. 2.4-2).

(a) *Общее уравнение окружности* в декартовых прямоугольных координатах:

$$\left.\begin{aligned} &x^2+y^2+Ax+By+C=0, \\ \text{или}\quad &(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2, \\ \text{где}\quad &2x_0=-A,\quad 2y_0=-B,\quad 2R=\sqrt{A^2+B^2-4C}. \end{aligned}\right\} \tag{2.5-1}$$

Точка (x_0, y_0) — центр окружности, R — ее радиус. Окружность (1) касается оси Ox, если $4C=A^2$, и оси Oy, если $4C=B^2$.

Уравнение окружности с центром в начале координат:

$$x^2+y^2=R^2. \tag{2.5-2}$$

(b) *Уравнение окружности, проходящей через три точки* (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3):

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{2.5-3}$$

(c) Длина L каждой из касательных, проведенных из точки (x_1, y_1) к окружности (1):

$$L=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2-R^2}. \tag{2.5-4}$$

(d) Две окружности

$$x^2+y^2+A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad x^2+y^2+A_2x+B_2y+C_2=0 \tag{2.5-5}$$

являются *концентрическими* в том и только в том случае, когда $A_1=A_2$ и $B_1=B_2$. Необходимое и достаточное условие *ортогональности* окружностей имеет вид

$$A_1A_2+B_1B_2=2(C_1+C_2).$$

(e) Все окружности, проходящие через действительные или мнимые точки пересечения двух окружностей (5), определяются уравнением

$$x^2+y^2+A_1x+B_1y+C_1+\lambda(x^2+y^2+A_2x+B_2y+C_2)=0, \tag{2.5-6}$$

где λ — параметр. Кривая (6) существует и в том случае, когда окружности (5) не имеют действительных точек пересечения.

(f) При $\lambda=-1$ уравнение (6) превращается в уравнение прямой

$$(A_1-A_2)x+(B_1-B_2)y+(C_1-C_2)=0, \tag{2.5-7}$$

которая называется **радикальной осью** двух окружностей (5). Радикальная ось является геометрическим местом точек, из которых могут быть проведены касательные равной длины к двум данным окружностям. Если две окружности пересекаются (касаются), то радикальная ось является их общей хордой (касательной к окружностям в общей точке). Радикальной осью двух концентрических окружностей служит бесконечно удаленная прямая. Три радикальные оси, связанные с тремя попарно взятыми окружностями, пересекаются в одной точке (**радикальный центр**). Этот факт используется при построении радикальной оси двух непересекающихся окружностей. Если центры трех окружностей лежат на одной прямой, то их радикальным центром служит бесконечно удаленная точка.

(g) *Уравнение окружности* радиуса R с центром (ρ_0, φ_0) *в полярных координатах:*

$$\rho^2-2\rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2=R^2. \tag{2.5-8}$$

2.5-2. Эллипс и гипербола: формулы и теоремы (см. рис. 2.5-1, а также п. 2.5-3, табл. 2.4-2 и 2.5-1).

(a) Длины **большой** и **малой осей** эллипса (2.4-12, *a*) т. е. отрезков, отсекаемых эллипсом на его осях симметрии (рис. 2.5-1, *a*), равны соответственно $2a$ и $2b$. *Сумма фокальных радиусов* r_1 и r_2 (табл. 2.5-1,6) *постоянная (и равна* $2a$*) для каждой точки эллипса.*

(b) Гипербола имеет две *асимптоты* (п. 17.1-6), пересекающиеся в ее центре. Для гиперболы (2.4-12 *b*) *уравнения асимптот:*

$$y=\frac{b}{a}x \text{ и } y=-\frac{b}{a}x. \qquad (2.5\text{-}9)$$

Угол φ между асимптотами гиперболы определяется из уравнения $\operatorname{tg}(\varphi/2)=b/a$; если $a=b$, то $\varphi=\pi/2$ (*равносторонняя гипербола*).

(c) Длина *действительной оси* гиперболы, т. е. расстояние между ее вершинами (рис. 2.5-1, *b*), равна $2a$. *Мнимой осью* называется главная ось,

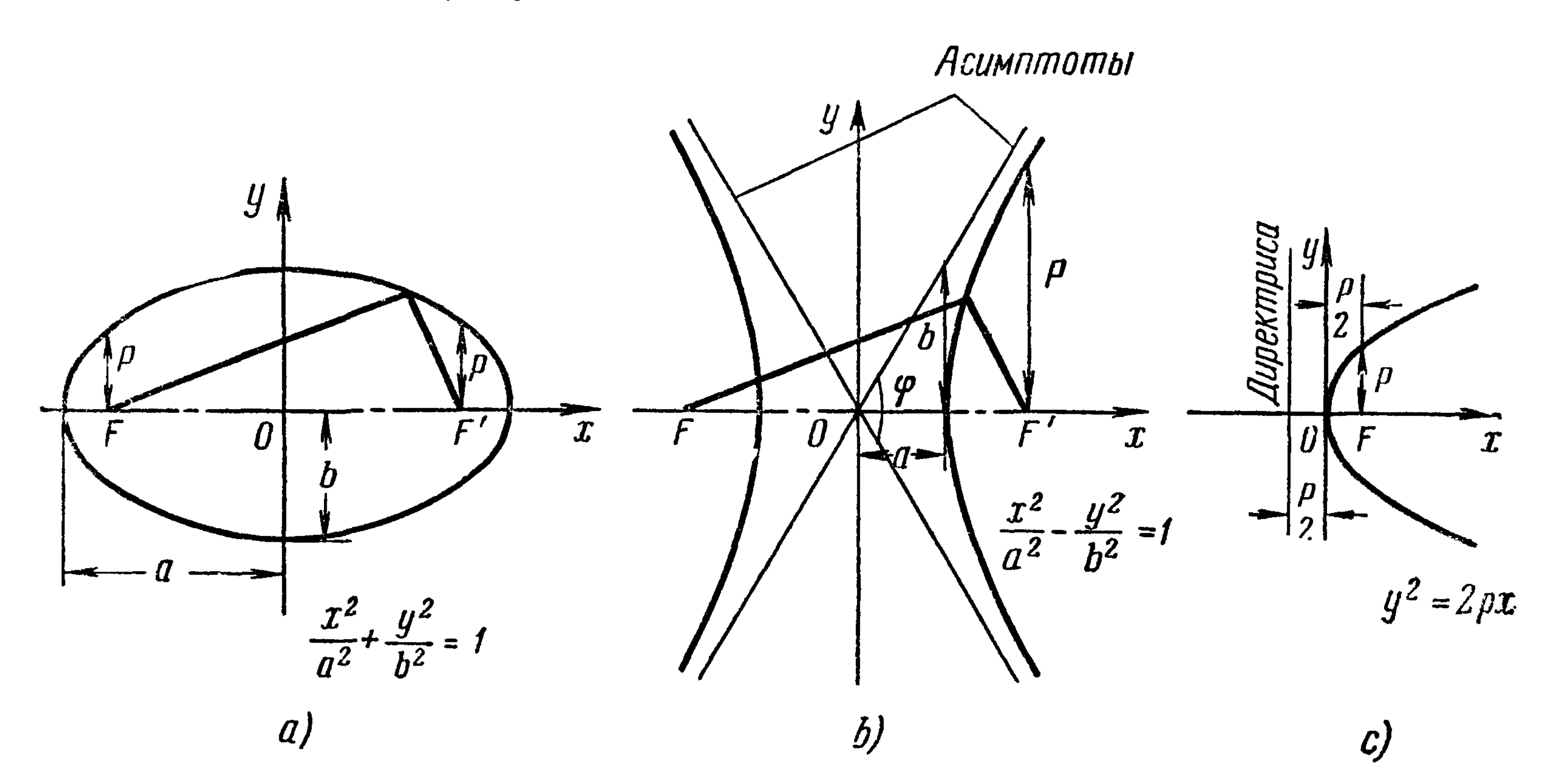


Рис. 2.5-1. *a*) эллипс, *b*) гипербола, *c*) парабола; каждая из кривых задана каноническим уравнением относительно изображенной на рисунке системы координат. Показаны фокусы, оси и фокальный параметр.

перпендикулярная к действительной оси. Касательная к гиперболе в ее вершине пересекает асимптоты в точках, расстояние между которыми равно $2b$ (рис. 2.5-1, *b*). *Разность между фокальными радиусами* r_1 *и* r_2 *гиперболы* (табл. 2.5-1, 6) *постоянна: она равна* $2a$ *для правой ветви и* $-2a$ *для левой.*

(d) Если d_1 и d_2 — длины любых двух сопряженных диаметров (п. 2.4-6, c) эллипса или гиперболы, то

$$d_1d_2\sin(\operatorname{arctg}k_2-\operatorname{arctg}k_1)=4ab, \qquad (2.5\text{-}10)$$

где k_1, k_2 — угловые коэффициенты диаметров.

(e) Для пересечения гиперболы (2.4-12 *b*) со своим диаметром $y=kx$ необходимо и достаточно выполнение условия $k^2<b^2/a^2$. *Асимптоту* можно рассматривать как хорду, встречающую гиперболу в бесконечно удаленной точке и совпадающую с сопряженным ей диаметром (а также как поляру бесконечно удаленной точки кривой).

(f) *Отрезки секущей заключенные между гиперболой и ее асимптотами, равны между собой. Точка касания делит отрезок касательной, заключенный между асимптотами, пополам. Произведение расстояний от точки гиперболы до асимптот постоянно.*

(d) *Площадь треугольника с вершинами в центре эллипса и в концах любой пары его сопряженных диаметров постоянна. Площадь треугольника, заключенного между асимптотами гиперболы и любой ее касательной, постоянна.*

2.5-3. Построение эллипсов и гипербол, их касательных и нормалей.

(a) *Построение эллипса по его осям 2a и 2b.*

1. Пусть O — точка пересечения двух взаимно перпендикулярных прямых. На одной из них строим отрезок $P'OP=2a$, а на другой — отрезок $Q'OQ=2b$. Тем самым уже построены 4 вершины эллипса: P, P', Q, Q'. Проводим через точку O произвольную наклонную, откладываем на ней отрезки $OR=b$ и $OS=a$, затем проводим через точку R прямую, параллельную $P'P$, а через точку S — прямую, параллельную $Q'Q$. В пересечении получим точку искомого эллипса.

2. Из точки Q как из центра раствором циркуля, равным $OP=a$, делаем на отрезке $P'OP$ засечки F' и F (фокусы эллипса). На отрезке $P'P$ выбираем произвольную точку T. Окружности радиусов $P'T$ и PT с центрами соответственно F' и F пересекутся в двух точках искомого эллипса.

Таблица 2.5-1

Эллипс, гипербола и парабола. Канонические уравнения и основные формулы

(см. также пп. 2.4-9, 2.5-2 и рис. 2.5-1)

		Эллипс	Гипербола	Парабола
1	Стандартное (каноническое) уравнение	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 2.5-1, *a*)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 2.5-1, *b*)	$y^2=2px$ (рис. 2.5-1, *c*)
2	Эксцентриситет	$\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}<1$	$\varepsilon=$ $=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>1$	$\varepsilon=1$
3	Фокусы	$(a\varepsilon,\ 0)$, $(-a\varepsilon,\ 0)$	$(a\varepsilon,\ 0)$, $(-a\varepsilon,\ 0)$	$\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$
4	Уравнения директрис	$x=\frac{a}{\varepsilon},\ x=-\frac{a}{\varepsilon}$	$x=\frac{a}{\varepsilon},\ x=-\frac{a}{\varepsilon}$	$x=-\frac{p}{2}$
5	Фокальный параметр (см. п. 2.4-9)	$p=\frac{b^2}{a}$	$p=\frac{b^2}{a}$	p
6	Фокальные радиусы (расстояния от фокусов до произвольной точки $(x,\ y)$ кривой)	$r_1=a+\varepsilon x$, $r_2=a-\varepsilon x$	$r_1=a+\varepsilon x$, $r_2=-a+\varepsilon x$	$r=x+\frac{p}{2}$
7	Уравнение диаметра, сопряженного хордам с угловым коэффициентом k	$y=-\frac{b^2}{a^2k}x$	$y=\frac{b^2}{a^2k}x$	$y=\frac{p}{k}$
8	Площадь сегмента между дугой, выпуклой влево, и хордой, проходящей через точки $(x_1,\ y_1)$ и $(x_1,\ -y_1)$	$\frac{1}{2}\pi ab+$ $+\frac{b}{2}\left(x_1\sqrt{a^2-x_1^2}+\right.$ $\left.+a^2\arcsin\frac{x_1}{a}\right)$	x_1y_1- $-ab\ln\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}\right)$	$\frac{4}{3}x_1y_1$
9	Уравнение в полярных координатах (ср. с уравнением (2.4-21))	$\rho^2=\frac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}$	$\rho^2=\frac{-b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}$	$\rho=\frac{2p\cos\varphi}{1-\cos^2\varphi}$

Построение гиперболы. Пусть $P'OP$ — действительная ось гиперболы, F и F' — ее фокусы. На действительной оси выбираем произвольную точку T так, чтобы соблюдалось условие $OT>OP$. Окружности радиусов $P'T$ и PT с центрами F и F' пересекутся в точках гиперболы (см. табл. 2.5-1, соотношения между $OF=OF'$, a и b).

(b) *Для построения касательных и нормалей к эллипсам и гиперболам оказываются полезными следующие свойства этих кривых:*

1. Касательные к эллипсу (2.4-12 *a*) в произвольной его точке $(x_1,\ y_1)$ пересекают ось Ox в той же точке, что и касательные к окружности $x^2+y^2=a^2$ в точках $(x_1\ \pm\sqrt{a^2-x_1^2})$.

2. Касательная и нормаль к эллипсу в любой его точке делят пополам углы между прямыми, соединяющими эту точку с фокусами («фокальное свойство» эллипса); аналогичным свойством обладает гипербола.

3. Произведение расстояний от фокусов до любой касательной к эллипсу или гиперболе постоянно и равно b^2. Основания перпендикуляров, опущенных из фокуса на касательные, лежат на окружности, построенной на большой оси (на действительной оси) как на диаметре; эта теорема может быть использована для построения эллипса или гиперболы, как огибающей касательных к этим кривым.

(с) *Эллипс или гипербола могут быть приближенно построены при помощи соприкасающихся окружностей в их вершинах* (п. 17.1-4). Центры кривизны эллипса или гиперболы, соответствующие вершинам, лежащим на фокальной оси, также лежат на этой оси; радиусы кривизны в этих точках равны b^2/a. Центры кривизны для вершин, лежащих на малой оси эллипса, также лежат на малой оси, радиус кривизны в каждой из этих точек равен a^2/b.

2.5-4. Построение параболы, ее касательных и нормалей.

(а) Если заданы ось параболы, ее фокус и расстояние между фокусом и директрисой, то для *построения параболы* могут быть использованы следующие ее свойства:

1. *Расстояние между фокусом и любой точкой P параболы равно расстоянию между директрисой и той же точкой P* (см. также п. 2.4-9).

2. Прямая, перпендикулярная к оси параболы и делящая пополам отрезок перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису, касается параболы в ее вершине. Перпендикуляр, восставленный в любой точке Q этой прямой к отрезку, соединяющему Q с фокусом, касается параболы. Обратно, *любая касательная и перпендикуляр к ней, проведенный через фокус, пересекаются в точке, лежащей на касательной к параболе в ее вершине.*

(b) Для построения касательных и нормалей к параболе оказываются полезными следующие ее свойства:

1. *Расстояние между любой точкой P параболы и фокусом равно расстоянию между фокусом и точкой пересечения оси параболы с касательной в P.*

2. *Касательная и нормаль к параболе в любой ее точке P делят пополам углы между проходящими через P диаметром параболы и прямой, соединяющей P с фокусом; заметим, что все диаметры параболы параллельны ее оси. Эта теорема заключает в себе фокальное свойство параболы.*

3. *Нормаль к параболе в любой ее точке P и перпендикуляр, опущенный из P на ось, пересекают последнюю в точках, расстояние между которыми постоянно и равно p.*

4. *Директриса параболы есть геометрическое место точек пересечения взаимно перпендикулярных касательных.*

(с) Для уточнения формы параболы можно использовать соприкасающуюся окружность кривой (п. 17.1-4) в ее вершине. Центр этой соприкасающейся окружности лежит на оси, радиус равен p.

2.6. УРАВНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ *)

2.6-1. Примеры алгебраических кривых (см. рис.2.6-1):

(а) **Парабола Нейля (полукубическая парабола):** $y = ax^{3/2}$.

(b) **Локон Аньези:** $x^2y = 4a^2(2a - y)$.

(с) **Конхоида Никомеда:** $(x^2 + y^2)(x - a)^2 = x^2b^2$.

(d) **Циссоида Диоклеса:**

$$y^2(a - x) = x^3 \text{ или } \rho = a\left(\frac{1}{\cos\varphi} - \cos\varphi\right).$$

(е) **Лемниската Бернулли:**

$$(x^2 + y^2) - a^2(x^2 - y^2) = 0 \text{ или } \rho^2 - a^2\cos 2\varphi = 0.$$

(f) **Овалы Кассини:** $(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = c^4$ (геометрическое место точек, для которых произведение расстояний до точек $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ равно c^2).

(g) **Строфоида:** $x^3 + x(a^2 + y^2) = 2a(y^2 + x^2)$.

(h) **«Крест»** (Cruciform):

$$x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2) \text{ или } \rho = \frac{2a}{\sin 2\varphi}.$$

(i) **Кардиоида:**

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2) \text{ или } \rho = a(1 + \cos\varphi).$$

---

*) Наиболее подробным справочником по плоским кривым служит книга [2 3].

(j) Трисектриса:

$$y^2 = \frac{x^3(3a - x)}{a + x} \quad \text{или} \quad \rho = a\left(4\cos\varphi - \frac{1}{\cos\varphi}\right).$$

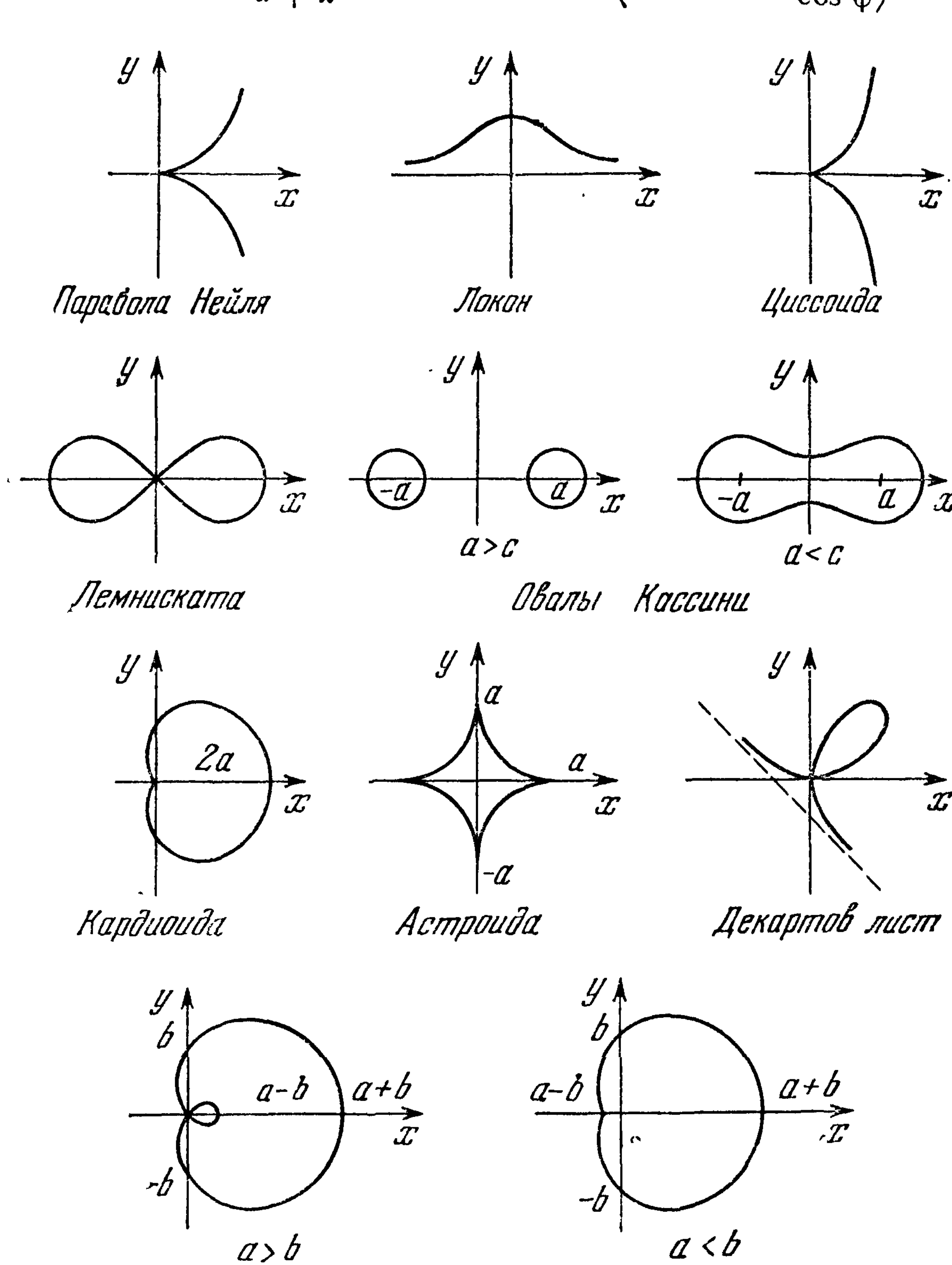


Рис. 2.6-1. Некоторые алгебраические кривые.

(k) Астроида:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad \text{или} \quad x = a\cos^3 t, \ y = a\sin^3 t.$$

(l) Декартов лист:

$$x^3 + y^3 = 3axy \quad \text{или} \quad x = \frac{3at}{t^3+1}, \ y = \frac{3at^2}{t^3+1} \ (-\infty \leqslant t \leqslant +\infty).$$

(m) Улитка Паскаля:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2) \quad \text{или} \quad \rho = b + a\cos\varphi,$$

(на рисунке обозначены декартовы координаты точек пересечения кривой с осями).

2.6-2. Примеры трансцендентных кривых (см. рис. 2.6-2).

(a) **Цепная линия:** $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

(b) **Спираль Архимеда:** $\rho = a\varphi$.

(c) **Параболическая спираль:** $\rho^2 = 2p\varphi$.

(d) **Логарифмическая спираль:** $\rho = ae^{b\varphi}$.

(e) **Циклоида** (кривая, описанная точкой, отстоящей на расстоянии a_1 от центра круга радиуса a, катящегося без скольжения по оси абсцисс):

$$x = at - a_1 \sin t, \qquad y = a - a_1 \cos t. \tag{2.6-1}$$

Замечание. При $a_1 < a$ циклоида называется *укороченной*, при $a_1 > a$ — *удлиненной*. Если $a_1 = a$, то получается обычная циклоида (именно она изображена на рис. 2.6-2).

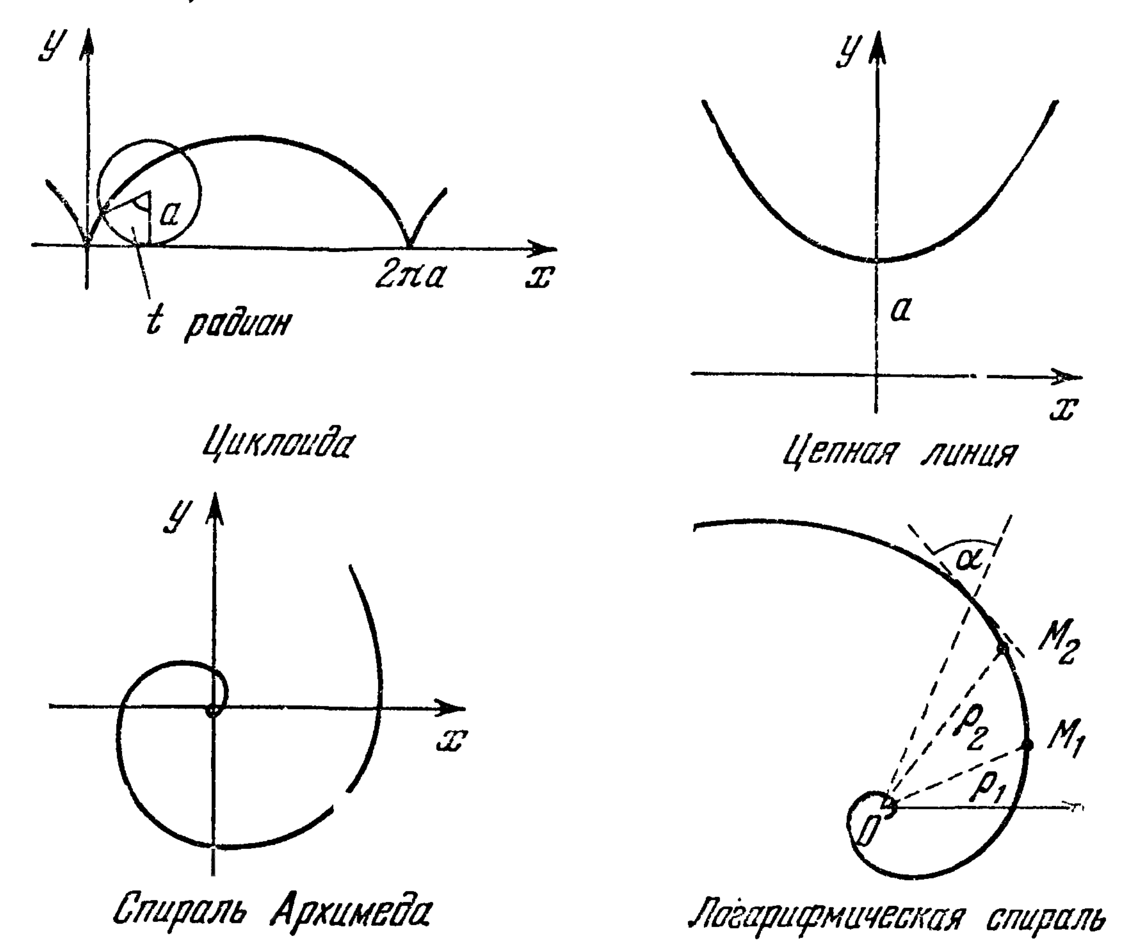


Рис. 2.6-2. Некоторые трансцендентные кривые.

(f) **Эпициклоида** (кривая, описанная точкой, отстоящей на расстоянии a_1 от центра круга радиуса a, катящегося без скольжения по окружности $x^2 + y^2 = b^2$ и находящегося вне этой окружности):

$$\left.\begin{aligned} x &= (a+b) \sin \frac{a}{b} t - a_1 \sin \frac{a+b}{b} t, \\ y &= (a+b) \cos \frac{a}{b} t - a_1 \cos \frac{a+b}{b} t \end{aligned}\right\} \tag{2.6-2}$$

(см. замечание к (e)).

(g) **Гипоциклоида** (кривая, описанная точкой, отстоящей на расстоянии a_1 от центра круга радиуса a, катящегося без скольжения по окружности $x^2 + y^2 = b^2$ и остающегося внутри нее):

$$\left.\begin{aligned} x &= (b-a) \sin \frac{a}{b} t - a_1 \sin \frac{b-a}{b} t, \\ y &= (b-a) \cos \frac{a}{b} t + a_1 \cos \frac{b-a}{b} t \end{aligned}\right\} \tag{2.6-3}$$

(см. замечание к (e)).

(h) **Трактриса**:

$$x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right), \quad y = a \sin t. \tag{2.6-4}$$

ГЛАВА 3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

3.1-1. Вводные замечания (см. также п. 2.1-1). Глава 3 посвящена аналитической геометрии трехмерного евклидова пространства. Точки задаются **радиусами-векторами** или системами действительных чисел (своими **координатами**).

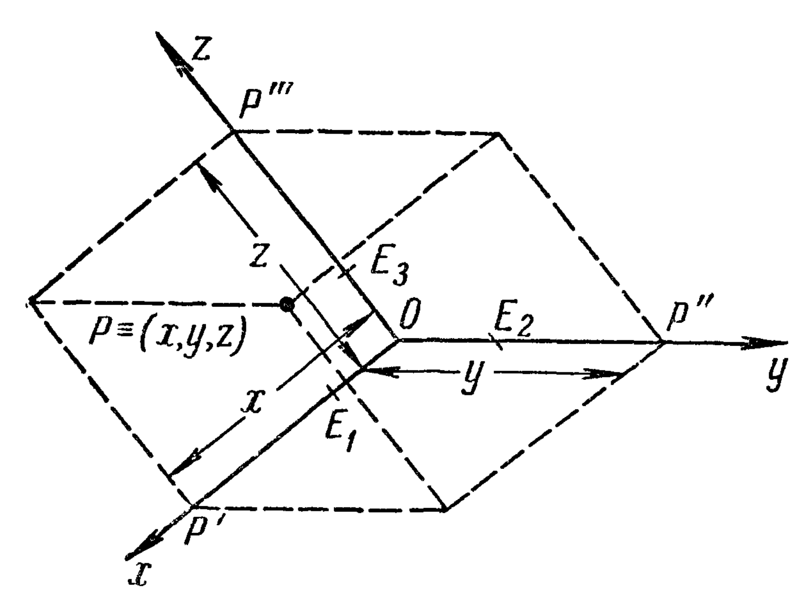


Рис. 3.1-1. Правая декартова косоугольная система координат. Отрезки OE_1, OE_2 и OE_3 — единицы масштаба на осях.

3.1-2. Декартова система координат (см. также п. 2.1-2). **Декартова система координат** позволяет связать с каждой точкой P пространства, в котором выбраны три не лежащие в одной плоскости направленные прямые Ox, Oy, Oz (**оси координат**), пересекающиеся в **начале** O, три вполне определенных действительных числа (**декартовы координаты**) x, y, z; при этом пишут $P(x,y,z)$.

Пусть задана (в общем случае косоугольная) система осей Ox, Oy, Oz (рис. 3.1-1); тогда плоскость, проходящая через точку P и параллельная **плоскости** Oyz, пересекает **ось** Ox в точке P'. Аналогично плоскости, проходящие через P и параллельные соответственно Oxz и Oxy, пересекают **ось** Oy в точке P'' и **ось** Oz в P'''. Длине каждого из направленных отрезков $\overline{OP'}$, $\overline{OP''}$ и $\overline{OP'''}$ приписывается знак плюс, если направление отрезка совпадает с направлением соответствующей оси, и знак минус в противном случае. Числа $x=OP'$, $y=OP''$, $z=OP'''$ называются **декартовыми координатами** точки P (x, y, z) относительно данной системы координат, образованной осями Ox, Oy, Oz и выбранными на осях единицами масштаба.

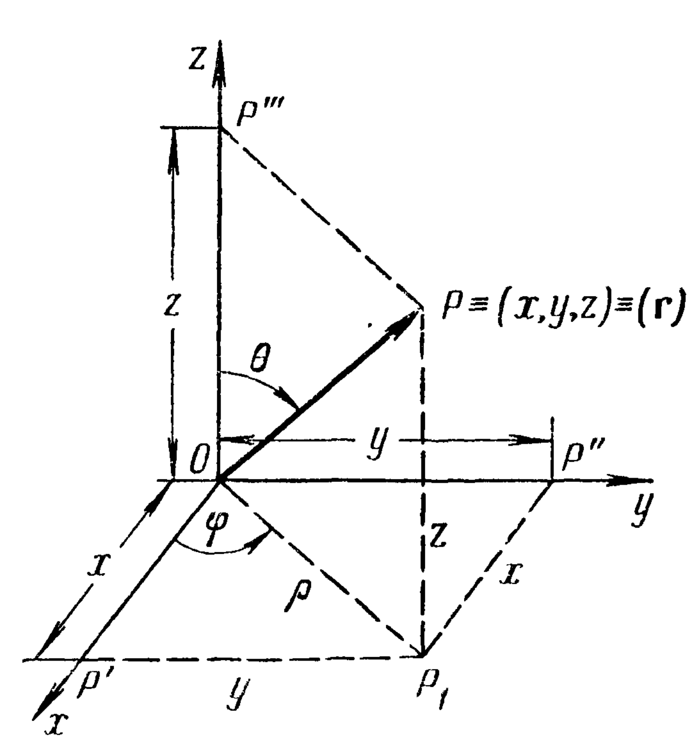


Рис. 3.1-2. Системы координат: правая декартова прямоугольная, цилиндрическая и сферическая.

3.1-3. Правая система осей. Оси Ox, Oy, Oz могут образовывать правую или левую систему. Для **правой системы** (см. рис. 3.1-1) поворот от оси Ox к оси Oy на угол, меньший π, совершается в направлении против часовой стрелки, если смотреть на плоскость Oxy из какой-либо точки положительной полуоси Oz (положительная сторона плоскости Oxy).

3.1-4. Правая декартова прямоугольная система координат. В **прямоугольной** системе координат оси взаимно перпендикулярны (рис. 3.1-2). Координаты x, y, z точки P равны направленным расстояниям от начала координат O до плоскостей, проведенных через точку P параллельно координатным плоскостям Oyz, Ozx, Oxy.

В настоящем справочнике, если не оговорено противное, всегда применяется правая декартова прямоугольная система координат, причем для измерения x, y, z применяется одна и та же единица масштаба.

3.1-5. Радиус-вектор. Каждая точка $P(x, y, z) \equiv P(\mathbf{r})$ может быть задана своим **радиусом-вектором**

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \equiv \{x, y, z\}; \tag{3.1-1}$$

этот вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ определяет преобразование переноса, переводящее точку из начала координат O в точку P. *Базисные векторы* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ суть единичные векторы, направление которых совпадает соответственно с направлением осей Ox, Oy и Oz данной декартовой прямоугольной системы координат (см. также 5.1 и п. 5.5-2).

3.1-6. Цилиндрическая и сферическая системы координат. На рис. 3.1-2 показаны также **цилиндрические координаты** ρ, φ, z и **сферические координаты** r, θ, φ (**полярный радиус, широта и долгота**), связанные с декартовыми прямоугольными координатами следующими формулами преобразования:

$$\left.\begin{aligned} &\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, && x = \rho\cos\varphi, \\ &\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}; && y = \rho\sin\varphi, \\ & && z = z; \end{aligned}\right\} \tag{3.1-2}$$

$$\left.\begin{aligned} &r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, && x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ &\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, && y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ &\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, && z = r\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{3.1-3}$$

Дальнейшие сведения об этих, а также о других криволинейных координатах см. в гл. 6.

3.1-7. Основные формулы в декартовых прямоугольных координатах и в векторной форме. Имеют место следующие формулы (операции над векторами см. в гл. 5).

1. **Расстояние** d между точками

$$P_1(x_1, y_1, z_1) \equiv P_1(\mathbf{r}_1)$$

и

$$P_2(x_2, y_2, z_2) \equiv P_2(\mathbf{r}_2):$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|. \tag{3.1-4}$$

2. **Угол** γ между прямыми P_1P_2 и P_3P_4, направление которых определяется векторами $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_3P_4}$:

$$\cos\gamma = \frac{(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3) + (z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,\sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2}} = \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|\,|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3|}. \tag{3.1-5}$$

3. Координаты x, y, z и радиус-вектор **$\mathbf{r}$ точки P, делящей направленный отрезок $\overrightarrow{P_1P_2}$ в отношении** $\overrightarrow{P_1P} : \overrightarrow{PP_2} = m : n = \lambda : 1$, определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{mx_2 + nx_1}{m + n} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y &= \frac{my_2 + ny_1}{m + n} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \\ z &= \frac{mz_2 + nz_1}{m + n} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}, \end{aligned}\right\} \tag{3.1-6}$$

или

$$\mathbf{r} = \frac{m\mathbf{r}_2 + n\mathbf{r}_1}{m + n} = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2}{1 + \lambda}.$$

См. замечание к аналогичным формулам для геометрии на плоскости в п. 2.1-4, 3.

Координаты и радиус-вектор *середины* отрезка P_1P_2:

$$\left.\begin{aligned} x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z&=\frac{z_1+z_2}{2};\\ \mathbf{r}&=\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.1-7}$$

3.1-8. Направляющие косинусы.

(a) **Направляющими косинусами** $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$ **направленного отрезка** $\overrightarrow{P_1P_2}$ называются косинусы углов между $\overrightarrow{P_1P_2}$ и положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz соответственно:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_x&=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\\ \cos\alpha_y&=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\\ \cos\alpha_z&=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}; \end{aligned}\right\} \tag{3.1-8}$$

$$\cos^2\alpha_x+\cos^2\alpha_y+\cos^2\alpha_z=1. \tag{3.1-9}$$

Направляющие косинусы направленного отрезка $\overrightarrow{P_2P_1}$ суть $-\cos\alpha_x$, $-\cos\alpha_y$, $-\cos\alpha_z$.

(b) Направление прямой может быть также определено любыми тремя числами a_x, a_y, a_z, пропорциональными направляющим косинусам $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$; в этом случае

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_x&=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\ \cos\alpha_y&=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\ \cos\alpha_z&=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.1-10}$$

Знак перед корнем должен быть одинаковым во всех трех равенствах; его выбор определяет положительное направление на прямой. Роль этих чисел могут играть координаты любого вектора **a** (п. 5.2-2), совпадающего по направлению с $\overrightarrow{P_1P_2}$ или $\overrightarrow{P_2P_1}$. (Пример. $a_x=x_2-x_1$, $a_y=y_2-y_1$, $a_z=z_2-z_1$.) Направляющие косинусы являются координатами единичного вектора, совпадающего по направлению с $\overrightarrow{P_1P_2}$ (п. 5.2-5).

(c) Угол γ между двумя направленными отрезками, направляющие косинусы которых равны соответственно $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$ и $\cos\alpha'_x$, $\cos\alpha'_y$, $\cos\alpha'_z$ или направления которых определяются тройками чисел a_x, a_y, a_z и a'_x, a'_y, a'_z, находится по формуле

$$\cos\gamma=\cos\alpha_x\cos\alpha'_x+\cos\alpha_y\cos\alpha'_y+\cos\alpha_z\cos\alpha'_z=$$

$$=\frac{a_xa'_x+a_ya'_y+a_za'_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{a'^2_x+a'^2_y+z'^2_z}}. \tag{3.1-11}$$

3.1-9. Проекции. Проекции направленного отрезка $\overrightarrow{P_1P_2}$ на оси Ox, Oy и Oz равны соответственно

$$\left.\begin{array}{l} d_x = x_2 - x_1 = d\cos\alpha_x, \quad d_y = y_2 - y_1 = d\cos\alpha_y, \quad d_z = z_2 - z_1 = d\cos\alpha_z, \\ d_x^2 + d_y^2 + d_z^2 = d^2, \end{array}\right\} \quad (3.1\text{-}12)$$

где $\cos\alpha_x, \cos\alpha_y, \cos\alpha_z$ — направляющие косинусы (8), d — длина отрезка (4).

Проекция $\overrightarrow{P_1P_2}$ на прямую с направляющими косинусами $\cos\alpha'_x$, $\cos\alpha'_y$, $\cos\alpha'_z$ (п. 3.2-1, b) равна $d\cos\gamma$, где $\cos\gamma$ определяется формулой (11). Проекции $\overrightarrow{P_1P_2}$ на плоскости Oyz, Oxz и Oxy равны соответственно

$$\left.\begin{array}{l} d_1 = d\sin\alpha_x, \quad d_2 = d\sin\alpha_y, \quad d_3 = d\sin\alpha_z, \\ d^2 = \frac{1}{2}\left(d_x^2 + d_y^2 + d_z^2\right). \end{array}\right\} \quad (3.1\text{-}13)$$

Проекция $\overrightarrow{P_1P_2}$ на плоскость, нормаль которой имеет направляющие косинусы $\cos\alpha'_x$, $\cos\alpha'_y$, $\cos\alpha'_z$ (п. 3.2-1, b), равна $d\sin\gamma$, где $\cos\gamma$ определен формулой (11).

3.1-10. Вектор площади. Площадь плоской фигуры в трехмерном пространстве может быть задана вектором **A**, модуль которого равен площади A фигуры, а направление совпадает с направлением положительной нормали (п. 17.3-2) к плоскости фигуры

$$\mathbf{A} = A\mathbf{N}, \quad (3.1\text{-}14)$$

где **N** — единичный вектор положительной нормали. Каждая из декартовых прямоугольных координат вектора **A** равна площади проекции фигуры на координатную плоскость, перпендикулярную к соответствующей оси. Площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**, может быть задана вектором $\mathbf{A} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (см. также п. 5.2-7).

Площадь A треугольника с вершинами P_1, P_2, P_3 определяется формулой

$$A^2 = \frac{1}{4}\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2\right\} \quad (3.1\text{-}15)$$

или

$$A = -\frac{1}{2p}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2p}[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3], \quad (3.1\text{-}16)$$

где p — расстояние от начала координат до плоскости треугольника (п. 3.2-16). Площадь A положительна, если вращение правого винта в направлении $P_1P_2P_3$ сообщает винту поступательное движение в направлении положительной нормали к плоскости треугольника (п. 3.2-1, b).

3.1-11. Вычисление объемов (см. также п. 5.2-8).

(a) Объем V тетраэдра с вершинами P_1, P_2, P_3, P_4

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1)]. \quad (3.1\text{-}17)$$

Знак V зависит от того, в каком порядке рассматриваются вершины тетраэдра.

(b) Объем V параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b** и **c**,

$$V = [\mathbf{abc}]. \quad (3.1\text{-}18)$$

Иногда объем считают только положительным; тогда $V = |[\mathbf{abc}]|$.

3.1-12. Преобразование декартовых прямоугольных координат при параллельном переносе и повороте осей.

(a) Перенос осей. Пусть x, y, z — координаты произвольной точки P относительно декартовой прямоугольной системы координат; пусть $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ — координаты той же точки P относительно другой декартовой системы координат, оси которой направлены так же, как оси первой системы, и начало которой имеет относительно системы $Oxyz$ координаты x_0, y_0, z_0. Если

единицы масштаба на осях этих систем совпадают, то координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ связаны с x, y, z следующими формулами преобразования:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}&=x-x_0, & x&=\bar{x}+x_0, \\ \bar{y}&=y-y_0, & y&=\bar{y}+y_0, \\ \bar{z}&=z-z_0, & z&=\bar{z}+z_0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1\text{-}19)$$

(b) Поворот осей. Пусть x, y, z и $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ — координаты одной и той же точки P относительно двух различных правых декартовых прямоугольных систем координат с общим началом O; пусть вторая из них расположена относительно системы $Oxyz$ таким образом, что

ось $O\bar{x}$ имеет направляющие косинусы t_{11}, t_{21}, t_{31},
ось $O\bar{y}$ имеет направляющие косинусы t_{12}, t_{22}, t_{32},
ось $O\bar{z}$ имеет направляющие косинусы t_{13}, t_{23}, t_{33}.

Тогда относительно системы $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

ось Ox имеет направляющие косинусы t_{11}, t_{12}, t_{13},
ось Oy имеет направляющие косинусы t_{21}, t_{22}, t_{23},
ось Oz имеет направляющие косинусы t_{31}, t_{32}, t_{33}.

Если для измерения x, y, z, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ применяются одинаковые единицы масштаба, то формулы преобразования, связывающие координаты x, y, z с координатами $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}&=t_{11}x+t_{21}y+t_{31}z, & & x=t_{11}\bar{x}+t_{12}\bar{y}+t_{13}\bar{z}, \\ \bar{y}&=t_{12}x+t_{22}y+t_{32}z, & \text{или}\quad & y=t_{21}\bar{x}+t_{22}\bar{y}+t_{23}\bar{z}, \\ \bar{z}&=t_{13}x+t_{23}y+t_{33}z & & z=t_{31}\bar{x}+t_{32}\bar{y}+t_{32}\bar{z}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1\text{-}20)$$

Замечание. Преобразования (20) называют *ортогональными* (пп. 13.3-2 и 14.4-5); *каждое* t_{ik} *равно своему алгебраическому дополнению в определителе*

$$\det[t_{ik}]=1 \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3) \qquad (3.1\text{-}21)$$

(п. 1.5-2); при этом

$$\sum_{j=1}^{3} t_{ij}t_{kj}=\sum_{j=1}^{3} t_{ji}t_{jk}=\begin{cases} 1 & (i=k), \\ 0 & (i\neq k). \end{cases} \qquad (3.1\text{-}22)$$

(c) Одновременный перенос и поворот осей. Если начало системы координат $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ не совпадает с началом системы $Oxyz$ и имеет относительно последней координаты x_0, y_0, z_0, то формулы преобразования принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x}=t_{11}(x-x_0)+t_{21}(y-y_0)+t_{31}(z-z_0), \\ &\bar{y}=t_{12}(x-x_0)+t_{22}(y-y_0)+t_{32}(z-z_0), \\ &\bar{z}=t_{13}(x-x_0)+t_{23}(y-y_0)+t_{33}(z-z_0), \\ \text{или}\qquad &x=t_{11}\bar{x}+t_{12}\bar{y}+t_{13}\bar{z}+x_0, \\ &y=t_{21}\bar{x}+t_{22}\bar{y}+t_{23}\bar{z}+y_0, \\ &z=t_{31}\bar{x}+t_{32}\bar{y}+t_{33}\bar{z}+z_0, \end{aligned}\right\} \qquad (3.1\text{-}23)$$

где направляющие косинусы t_{ik} удовлетворяют соотношениям (21) и (22). Уравнения (23) связывают координаты относительно любых двух правых декартовых прямоугольных систем с одинаковыми единицами масштаба на осях. Более общие преобразования координат рассмотрены в гл. 6.

(d) Другое истолкование формул преобразования. Уравнения преобразования (23) (частными случаями которых служат (19) и (20)) могут быть истолкованы еще как соотношения, определяющие новую точку $\bar{P}$ с координатами $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ относительно той же самой системы координат $Oxyz$. Преобразование, в котором точка $\bar{P}$ соответствует точке P с координатами x, y, z, состоит в последовательном выполнении параллельного переноса и поворота пространства (см. также пп. 14.1-3 и 15.5-1).

Замечание. Расстояния между точками, углы между направленными отрезками и, следовательно, все соотношения между векторами, составляющие содержание евклидовой геометрии, сохраняются при повороте и параллельном переносе (23), т. е. они *инвариантны* относительно этих преобразований (пп. 12.1-5 и 12.1-4).

3.1-13. Аналитическое задание кривых (см. также пп. с 17.2-1 по 17.2-6). **Непрерывной кривой** трехмерного пространства называется множество точек $P(x, y, z) \equiv P(\mathbf{r})$, координаты которых удовлетворяют системе параметрических уравнений

$$\left.\begin{aligned} &x = x(t), \\ &y = y(t), \qquad \text{или } \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \\ &z = z(t) \; (-\infty \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \leqslant \infty), \end{aligned}\right\} \tag{3.1-24}$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывные функции действительного параметра t в замкнутом интервале $[t_1, t_2]$ **(параметрическое задание кривой)**. С другой стороны, кривая может быть определена равносильной системой уравнений

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_2(x, y, z) = 0. \tag{3.1-25}$$

Кривая может иметь более чем одну ветвь.

Кривая (24) называется **простой кривой** (простой дугой, простым отрезком кривой) или, точнее, **простой кривой в смысле Жордана**, если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ однозначны, непрерывны и в замкнутом интервале $[t_1, t_2]$ нет таких двух *различных* значений τ_1 и τ_2, для которых справедливы все три равенства:

$$x(\tau_1) = x(\tau_2), \quad y(\tau_1) = y(\tau_2), \quad z(\tau_1) = z(\tau_2). \tag{3.1-26}$$

Заметим, что термин **простая дуга** часто употребляется для обозначения геометрического места точек, координаты которых x, y, z в некоторой декартовой прямоугольной системе координат удовлетворяют уравнениям $y = f(x)$, $z = g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, где функции $f(x)$, $g(x)$ однозначны и имеют непрерывные производные в интервале $[a, b]$. Простая жорданова кривая состоит из одной ветви и не имеет кратных точек, т. е. точек самопересечения. **Простой замкнутой кривой** называется непрерывная кривая, единственными кратными точками которой являются ее начальная и конечная точки; это значит, что единственным решением уравнений (26) в интервале $[t_1, t_2]$ служит $\tau_1 = t_1$, $\tau_2 = t_2$. Кривая (24) называется **регулярной дугой**, если при некотором параметрическом задании этой кривой функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имеют в каждой точке кривой непрерывные производные первого порядка (п. 4.5-1) по параметру t, по меньшей мере одна из которых отлична от нуля; точка кривой (24) с координатами $x(t_0)$, $y(t_0)$, $z(t_0)$ называется ее **регулярной** (обыкновенной) **точкой**, если для значений t, достаточно близких к t_0, кривая представляет собой регулярную дугу. **Регулярная кривая** есть простая кривая или простая замкнутая кривая, составленная из конечного числа регулярных дуг.

Все эти определения переносятся на кривые в двумерных пространствах (пп. 2.1-9 и 7.2-1), а также на кривые в пространствах, размерность которых больше трех (п. 17.4-2).

3.1-14. Способы задания поверхностей (см. также пп. 17.3-1—17.3-13). Множество точек $P(x, y, z) \equiv P(\mathbf{r})$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{3.1-27}$$

при подходящих значениях действительных параметров u, v, называется **непрерывной поверхностью**, если правые части уравнений (27) являются непрерывными функциями параметров. Поверхность может быть определена также уравнением

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad \text{или} \quad z = f(x, y). \tag{3.1-28}$$

Поверхность может иметь более чем одну полость.

Поверхности, определяемые уравнениями

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad \text{и} \quad \lambda\varphi(x, y, z) = 0, \tag{3.1-29}$$

совпадают, если только постоянная λ отлична от нуля.

Простой поверхностью называется непрерывная поверхность, состоящая из одной полости и не имеющая самопересечений (кратных точек). При этом подразумевается, что простые поверхности являются двусторонними (односторонние поверхности, такие, как *лист Мёбиуса*, исключаются).

Точка поверхности (27) называется *регулярной точкой*, если при некотором параметрическом задании поверхности функции (27) имеют в достаточной близости к рассматриваемой точке непрерывные частные производные первого порядка и по меньшей мере один из определителей.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{3.1-30}$$

отличен от нуля. Простой кусок поверхности, ограниченный регулярной замкнутой кривой, называется *регулярным*, если все его внутренние точки регулярные. *Регулярной поверхностью* называется двусторонняя простая (замкнутая или незамкнутая) поверхность, составленная из конечного числа регулярных кусков с общими регулярными дугами и точками.

3.1-15. Специальные типы поверхностей. Линейчатой поверхностью называется поверхность, образованная движением прямой линии (ее **образующей**). **Цилиндр** есть поверхность, образованная движением прямой, остающейся параллельной некоторой данной прямой и пересекающей данную линию (*направляющую*). В частности, уравнения вида $f(x, y) = 0$, $f(x, z) = 0$, $f(y, z) = 0$ определяют цилиндры, образующие которых параллельны соответственно осям Oz, Oy, Ox. **Конус** есть поверхность, образованная движением прямой, проходящей через данную точку (**вершину конуса**) и пересекающей данную линию (его **направляющую**). **Поверхностью вращения** называется поверхность, образованная вращением плоской кривой вокруг неподвижной оси, лежащей в плоскости кривой. Так, уравнение $z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ определяет поверхность, описанную вращением кривой $\begin{cases} z = f(x), \\ y = 0 \end{cases}$ вокруг оси Oz.

3.1-16. Поверхности и кривые.

(a) **Линия пересечения** двух поверхностей

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_2(x, y, z) = 0 \tag{3.1-31}$$

представляет собой кривую, точки которой (x, y, z) удовлетворяют каждому из уравнений (31) (см. также п. 3.1-13). Линия пересечения может иметь более одной ветви. Уравнения (31) могут также определять лишь одну или несколько изолированных точек, принадлежащих обеим поверхностям, или не определять ни одной точки.

Кривые

$$\begin{cases} \varphi(0, y, z) = 0, \\ x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(x, 0, z) = 0, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(x, y, 0) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

представляют собой линии пересечения (если они существуют) поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ с плоскостями Oyz, Oxz и Oxy соответственно.

(b) Для любого действительного значения λ уравнение

$$\varphi_1(x, y, z) + \lambda\varphi_2(x, y, z) = 0 \tag{3.1-32}$$

соответствует поверхности, проходящей через линию пересечения поверхностей (31), если последняя существует.

(c) Уравнение

$$\varphi_1(x, y, z) \cdot \varphi_2(x, y, z) = 0$$

соответствует поверхности, образованной точками обеих поверхностей (31) и не содержащей никаких других точек.

(d) Уравнение проекции кривой (31) на плоскость Oyz (или Oxz, Oxy) может быть получено исключением из уравнений (31) переменной x (соответственно y, z).

(e) Координаты x, y, z точек пересечения кривой (31) с поверхностью (28) должны удовлетворять всем трем уравнениям (31), (28). Для любых действительных λ_1, λ_2 уравнения

$$\varphi(x, y, z) + \lambda_1\varphi_1(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) + \lambda_2\varphi_2(x, y, z) = 0 \tag{3.1-33}$$

определяют кривую, проходящую через все эти точки пересечения.

(f) **Кривая однопараметрического семейства**

$$\varphi_1(x, y, z, \lambda) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z, \lambda) = 0 \tag{3.1-34}$$

описывает поверхность, уравнение которой может быть получено путем исключения параметра λ из (34).

3.2. ПЛОСКОСТЬ

3.2-1. Уравнение плоскости.

(a) Уравнение, *линейное* относительно декартовых прямоугольных координат, т. е. уравнение вида

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \text{или} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{r}+D=0 \tag{3.2-1}$$

где A, B и C не равны нулю одновременно, определяет **плоскость**; обратно, каждую плоскость можно определить уравнением первой степени относительно декартовых прямоугольных координат.

Коэффициенты A, B, C равны проекциям вектора $\mathbf{A}=\{A, B, C\}$, перпендикулярного к плоскости, на оси Ox, Oy, Oz соответственно (п. 3.1-8, b); вектор $\mathbf{A}$ имеет направление положительной или отрицательной нормали к плоскости (см. ниже) и называется *нормальным вектором плоскости*. При $D=0$ плоскость проходит через начало координат.

(b) Особенно важное значение имеют следующие виды уравнений плоскости:

1. Уравнение плоскости в отрезках. Плоскость, пересекающая ось Ox в точке $(a, 0, 0)$, ось Oy в точке $(0, b, 0)$ и ось Oz в точке $(0, 0, c)$, имеет уравнение

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

2. Нормальное уравнение плоскости. Пусть $p>0$ — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость; пусть $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$ — направляющие косинусы (п. 3.1-8) этого направленного перпендикуляра, началом которого служит начало координат, а концом точка плоскости (положительная нормаль к плоскости). Тогда уравнение плоскости имеет вид

$$x\cos\alpha_x+y\cos\alpha_y+z\cos\alpha_z-p=0.$$

3. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку. Если плоскость проходит через точку $P_1(x_1, y_1, z_1)\equiv P_1(\mathbf{r}_1)$, а направление нормали к плоскости задано проекциями A, B, C вектора нормали $\mathbf{A}$ на оси декартовой прямоугольной системы координат, то уравнение плоскости имеет вид

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \quad \text{или} \quad \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)=0.$$

4. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $P_1(x_1, y_1, z_1)\equiv P(\mathbf{r}_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)\equiv P(\mathbf{r}_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)\equiv$ $\equiv P(\mathbf{r}_3)$, не лежащие на одной прямой (п. 3.4-3, а) имеет вид

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad \text{или} \quad [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_3)]=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} x+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} y+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} z-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

(c) Если плоскость задана уравнением общего вида (1), то введенные выше величины a, b, c, p, $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$ выражаются через A, B, C, D следующим образом:

$$a=-\frac{D}{A}, \quad b=-\frac{D}{B}, \quad c=-\frac{D}{C}; \tag{3.2-2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_x &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\alpha_y &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\alpha_z &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad p=\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{3.2-3}$$

где знак перед корнем выбирается так, чтобы соблюдалось условие $p>0$. Если $D=0$, то выбор положительного направления на нормали к плоскости произволен.

3.2-2. Параметрическое задание плоскости. Любая плоскость может быть задана следующими параметрическими уравнениями (п. 3.1-14):

$$\left.\begin{aligned} x=x_1+a_xu+b_xv, \quad y=y_1+a_yu+b_yv, \quad z=z_1+a_zu+b_zv, \\ \text{или} \qquad \mathbf{r}=\mathbf{r}_1+u\mathbf{a}+v\mathbf{b}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2-4}$$

3.3. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

3.3-1. Уравнения прямой.

(a) Два независимых линейных уравнения

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &\equiv A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ \varphi_2(x, y, z) &\equiv A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.3-1}$$

или

$$\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{r}+D_1=0, \quad \mathbf{A}_2\cdot\mathbf{r}+D_2=0$$

($\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2\neq 0$; см. также пп. 1.9-3, а, 5.2-2 и 5.2-7) определяют **прямую** как пересечение двух плоскостей (п. 3.1-16, а). Обратно, каждая прямая может быть определена уравнениями вида (1). При $D_1=D_2=0$ (и только в этом случае) прямая проходит через начало координат.

(b) Особенно важное значение имеют следующие виды уравнений прямой:

1. Уравнения прямой, проходящей через две точки

$$P_1(x_1, y_1, z_1) \quad \text{и} \quad P_2(x_2, y_2, z_2):$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

2. Уравнения прямой, проходящей через данную точку в данном направлении (канонические уравнения прямой). Если прямая проходит через точку $P_1(x_1, y_1, z_1)\equiv P(\mathbf{r}_1)$ и параллельна вектору $\mathbf{a}\equiv\{a_x, a_y, a_z\}$ (направляющий вектор прямой; см. также п. 3.3-2), то ее уравнения могут быть приведены к виду

$$\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}=\frac{z-z_1}{a_z}, \quad \text{или} \quad \mathbf{r}-\mathbf{r}_1=\mathbf{a}t.$$

(c) Вектор $\mathbf{a}=\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2$ является направляющим вектором прямой (п. 3.1-8, b), заданной как линия пересечения двух плоскостей (уравнения (1)); его *проекции* на оси декартовой прямоугольной системы координат равны соответственно

$$a_x=B_1C_2-B_2C_1, \quad a_y=C_1A_2-C_2A_1, \quad a_z=A_1B_2-A_2B_1. \tag{3.3-2}$$

Направляющие косинусы прямой и, следовательно, углы α_x, α_y, α_z между прямой и осями Ox, Oy и Oz определяются по формулам

$$\cos\alpha_x = \frac{1}{M}(B_1C_2 - B_2C_1), \quad \cos\alpha_y = \frac{1}{M}(C_1A_2 - C_2A_1),$$

$$\cos\alpha_z = \frac{1}{M}(A_1B_2 - A_2B_1),$$

$$M = [(B_1C_2 - B_2C_1)^2 + (C_1A_2 - C_2A_1)^2 + (A_1B_2 - A_2B_1)^2]^{1/2}. \qquad (3.3\text{-}3)$$

Тот или иной выбор знака перед корнем определяет положительное направление на прямой.

Уравнения (2) и (3) являются условиями того, что прямая с направляющими косинусами $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$ или с направляющим вектором $\mathbf{A}$ перпендикулярна к двум векторам $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$, заданным своими проекциями A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 на оси декартовой прямоугольной системы координат.

(d) Уравнения плоскостей, проектирующих прямую (1) на плоскости Oxy, Oxz и Oyz соответственно (т. е. плоскостей, проходящих через прямую и перпендикулярных к соответствующим координатным плоскостям), таковы:

$$\left.\begin{aligned} (C_1A_2 - C_2A_1)\,x + (C_1B_2 - C_2B_1)\,y + (C_1D_2 - C_2D_1) &= 0,\\ (B_1A_2 - B_2A_1)\,x + (B_1C_2 - B_2C_1)\,y + (B_1D_2 - B_2D_1) &= 0,\\ (A_1B_2 - A_2B_1)\,x + (A_1C_2 - A_2C_1)\,y + (A_1D_2 - A_2D_1) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.3\text{-}4)$$

Любые два из уравнений (4) определяют прямую (1).

3.3-2. Параметрические уравнения прямой. Декартовы прямоугольные координаты (x, y, z) произвольной точки прямой удовлетворяют параметрическим уравнениям (п. 3.1-13):

$$x = x_1 + a_xt, \quad y = y_1 + a_yt, \quad z = z_1 + a_zt, \quad \text{или} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}, \qquad (3.3\text{-}5)$$

где $\mathbf{a}$ — направляющий вектор, $P_1(x_1, y_1, z_1) \equiv P_1(\mathbf{r}_1)$ — некоторая фиксированная точка прямой.

3.4. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК, ПЛОСКОСТЕЙ И ПРЯМЫХ

3.4-1. Углы.

(a) *Угол γ_1 между двумя прямыми* с направляющими косинусами $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$ и $\cos\alpha_x'$, $\cos\alpha_y'$, $\cos\alpha_z'$ определяется по формулам (см. также п. 3.1-8, с):

$$\cos\gamma_1 = \cos\alpha_x\cos\alpha_x' + \cos\alpha_y\cos\alpha_y' + \cos\alpha_z\cos\alpha_z', \qquad (3.4\text{-}1)$$

$$\sin^2\gamma_1 = (\cos\alpha_y\cos\alpha_z' - \cos\alpha_z\cos\alpha_y')^2 + (\cos\alpha_z\cos\alpha_x' - \cos\alpha_x\cos\alpha_z')^2 + (\cos\alpha_x\cos\alpha_y' - \cos\alpha_y\cos\alpha_x')^2. \qquad (3.4\text{-}2)$$

Если прямые заданы параметрическими уравнениями (п. 3.3-2) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1' + t\mathbf{a}'$, то

$$\cos\gamma_1 = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}'}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}'|}, \quad \sin\gamma_1 = \frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{a}'|}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}'|}. \qquad (3.4\text{-}3)$$

Прямые *параллельны*, если $\cos\gamma_1 = 1$, и *взаимно перпендикулярны*, если $\cos\gamma_1 = 0$.

(b) *Угол γ_2 между двумя плоскостями* $Ax + By + Cz + D = 0$ и $A'x + B'y + C'z + D' = 0$, или $\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} + D = 0$ и $\mathbf{A}'\cdot\mathbf{r} + D' = 0$ (угол между их нормалями), определяется по формуле

$$\cos\gamma_2 = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}'}{|\mathbf{A}|\,|\mathbf{A}'|}. \qquad (3.4\text{-}4)$$

Если плоскости заданы параметрическими уравнениями (п. 3.2-2) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1' + u\mathbf{a}' + v\mathbf{b}'$, то

$$\cos\gamma_2 = \frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}'\times\mathbf{b}')}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\,|\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'|}. \qquad (3.4\text{-}5)$$

(c) Угол γ_3 между прямой

$$\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}=\frac{z-z_1}{a_z}$$

и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ (угол между прямой и ее проекцией на плоскость) определяется по формуле

$$\sin\gamma_3=\frac{Aa_x+Ba_y+Ca_z}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}. \qquad (3.4\text{-}6)$$

В частности, прямая параллельна плоскости, если $\sin\gamma_3=0$ (лежит на плоскости, если, кроме того, $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$); прямая перпендикулярна к плоскости, если $\sin\gamma_3=1$. Угол между прямой и нормалью к плоскости равен $\pi/2-\gamma_3$.

⁎ (d) 1. Условия параллельности двух прямых

$$\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}=\frac{z-z_1}{a_z}, \quad \text{или} \quad \mathbf{r}=\mathbf{r}_1+t\mathbf{a},$$

и

$$\frac{x-x_1'}{a_x'}=\frac{y-y_1'}{a_y'}=\frac{z-z_1'}{a_z'}, \quad \text{или} \quad \mathbf{r}=\mathbf{r}_1'+t\mathbf{a}',$$

имеют вид

$$\frac{a_x'}{a_x}=\frac{a_y'}{a_y}=\frac{a_z'}{a_z}, \quad \text{или} \quad \mathbf{a}'=\lambda\mathbf{a}, \quad \text{или} \quad \mathbf{a}\times\mathbf{a}'=0.$$

Если, кроме того, прямые имеют общую точку, то они совпадают.

2. Прямая $\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}=\frac{z-z_1}{a_z}$, или $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+t\mathbf{a}$, и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ или $\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}+D=0$ взаимно перпендикулярны, если прямая параллельна нормали к плоскости (и сама служит нормалью), т. е. если

$$\frac{a_x}{A}=\frac{a_y}{B}=\frac{a_z}{C}, \quad \text{или} \quad \mathbf{a}=\lambda\mathbf{A}, \quad \text{или} \quad \mathbf{a}\times\mathbf{A}=0.$$

3. Две плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad \text{или} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{r}+D=0$$

и

$$A'x+B'y+C'z+D'=0, \quad \text{или} \quad \mathbf{A}'\cdot\mathbf{r}+D'=0)$$

параллельны, если параллельны их нормали, т. е. если

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}, \quad \text{или} \quad \mathbf{A}=\lambda\mathbf{A}', \quad \text{или} \quad \mathbf{A}\times\mathbf{A}'=0.$$

Если плоскости, кроме того, имеют общую точку, то они совпадают. ⁎

3.4-2. Расстояния.

(a) *Расстояние* δ *от точки* $P_0(x_0, y_0, z_0)\equiv P_0(\mathbf{r}_0)$ *до плоскости* $Ax+By+Cz+D=0$ или $\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}+D=0$ (определенное по величине и знаку):

$$\delta=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}_0+D}{\pm|\mathbf{A}|}; \qquad (3.4\text{-}7)$$

знак перед корнем противоположен знаку D. Иногда δ называют отклонением точки от плоскости. Отклонение положительно, если начало координат и точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$ лежат по разные стороны от плоскости, и отрицательно, если по одну сторону.

Если плоскость задана параметрическим уравнением (п.3.2-2) $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+u\mathbf{a}+v\mathbf{b}$, то

$$\delta=(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}. \qquad (3.4\text{-}8)$$

(b) *Расстояние d от точки $P_0(x_0, y_0, z_0) \equiv P_0(\mathbf{r}_0)$ до прямой* $\frac{x-x_1}{a_x} = \frac{y-y_1}{a_y} = \frac{z-z_1}{a_z}$ или $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$:

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)|}{|\mathbf{a}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \quad (3.4\text{-}9)$$

(c) *Кратчайшее расстояние d_1 между прямыми*

$\frac{x-x_1}{a_x} = \frac{y-y_1}{a_y} = \frac{z-z_1}{a_z}$ и $\frac{x-x_1'}{a_x'} = \frac{y-y_1'}{a_y'} = \frac{z-z_1'}{a_z'}$, или $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1' + t\mathbf{a}'$:

$$d_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{a_x'^2 + a_y'^2 + a_z'^2}\sin\gamma_1} \begin{vmatrix} x_1 - x_1' & y_1 - y_1' & z_1 - z_1' \\ a_x & a_y & a_z \\ a_x' & a_y' & a_z' \end{vmatrix}, \quad (3.4\text{-}10)$$

или $d_1 = \frac{|[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1')\,\mathbf{a}\mathbf{a}']|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{a}'|}$, где $\sin\gamma_1$ определяется равенством (2). Если прямые параллельны ($\sin\gamma_1 = 0$), то d_1 определяется равенством (9).

Замечание. Если в определителе, стоящем в правой части равенства (10), заменить x_1, y_1, z_1 переменными x, y, z и приравнять его к нулю, то полученное уравнение определит плоскость, проходящую через вторую прямую параллельно первой. Если прямые пересекаются, то плоскость проходит через обе эти прямые.

(d) *Расстояние d_2 между параллельными плоскостями* $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$:

$$d_2 = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D - D'|}{|\mathbf{A}|}. \quad (3.4\text{-}11)$$

(e) *Расстояние d_3 от плоскости до параллельной ей прямой* определяется по формуле (7).

3.4-3. Специальные случаи взаимного расположения точек, прямых и плоскостей.

(a) Точки. 1. *Три точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ и $P_3(x_3, y_3, z_3)$ лежат на одной прямой, если* (необходимое и достаточное условие)

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}, \text{ или } \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \quad (3.4\text{-}12)$$

или (см. также равенство (3.1-15))

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.4\text{-}13)$$

или

$$(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0. \quad (3.4\text{-}14)$$

2. *Четыре точки лежат в одной плоскости, если* (необходимое и достаточное условие)

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1)] = 0. \quad (3.4\text{-}15)$$

(b) Плоскости. 1. *Если три плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$, $A''x + B''y + C''z + D'' = 0$ проходят через одну и ту же прямую, то*

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4\text{-}16)$$

2. *Если четыре плоскости* $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$, $A''x+B''y+C''z+D''=0$, $A'''x+B'''y+C'''z+D'''=0$ *проходят через одну и ту же точку, то*

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix} = 0, \tag{3.4-17}$$

т. е. левые части их уравнений линейно зависимы (п. 1.9-3, а).

(с) Прямые. *Две прямые лежат в одной плоскости* (т. е. пересекаются или параллельны), *если* (необходимое и достаточное условие) *четыре определяющие их плоскости удовлетворяют условию* (17). Если прямые заданы параметрическими уравнениями $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+t\mathbf{a}$, $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1'+t\mathbf{a}'$, то условие (17) принимает вид

$$[(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_1')\,\mathbf{a}\mathbf{a}']=0. \tag{3.4-17a}$$

3.4-4. Тангенциальные координаты плоскости и принцип двойственности. Уравнение

$$\xi x+\eta y+\zeta z+1=0 \tag{3.4-18}$$

определяет плоскость (ξ, η, ζ). Числа ξ, η, ζ называются ее **тангенциальными (линейными, плюккеровыми)** координатами. Если точечные координаты x, y, z фиксированы, а ξ, η, ζ рассматриваются как переменные, то (18) становится уравнением точки (x, y, z), т. е. точки пересечения всех плоскостей (18).

Симметрия уравнения (18) относительно точечных и тангенциальных координат приводит к следующему принципу двойственности (см. также п. 2.3-3): *наряду с каждой теоремой о взаимном положении точек, прямых и плоскостей справедлива другая теорема, которая получится, если в формулировке первой теоремы поменять местами термины «точка» и «плоскость».*

3.4-5. Некоторые дополнительные соотношения.

(a) Если $\varphi_1(x, y, z)=0$ и $\varphi_2(x, y, z)=0$ — уравнения двух плоскостей, то уравнение

$$\varphi_1(x, y, z)+\lambda\varphi_2(x, y, z)=0 \tag{3.4-19}$$

определяет плоскость, проходящую через линию пересечения данных плоскостей (или параллельную им обеим, если они параллельны). Уравнение (19) называется **уравнением пучка плоскостей**. Если обе плоскости заданы нормальными уравнениями (п. 3.2-1,2), то $(-\lambda)$ равно отношению расстояний от любой точки плоскости (19) до заданных (базисных) плоскостей; при $\lambda=1$ и $\lambda=-1$ полученные плоскости являются биссекторными плоскостями двугранных углов между данными плоскостями.

Если плоскости $\varphi_1=0$ и $\varphi_2=0$ параллельны, то все плоскости (19) также им параллельны.

(b) Уравнения прямой, *перпендикулярной* к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ и проходящей через точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}. \tag{3.4-20}$$

(c) Направляющий вектор и направляющие косинусы линии пересечения двух плоскостей определяются по формулам (3.3-2) и (3.3-3).

(d) Точка пересечения трех плоскостей $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$ и $A''x+B''y+C''z+D''=0$ имеет следующие координаты:

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} D & B & C \\ D' & B' & C' \\ D'' & B'' & C'' \end{vmatrix}, \quad y=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A & D & C \\ A' & D' & C' \\ A'' & D'' & C'' \end{vmatrix}, \\ z&=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A & B & D \\ A' & B' & D' \\ A'' & B'' & D'' \end{vmatrix}, \quad \Delta=\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{3.4-21}$$

3.5. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3.5-1. Общее уравнение второй степени. Поверхности второго порядка (квадрики) определяются **уравнениями второй степени** относительно декартовых прямоугольных координат. Общее уравнение второй степени относительно переменных x, y, z имеет вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

или

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14})\,x+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24})\,y+ \\ +(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34})\,z+a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}=0, \quad (3.5\text{-}1)$$

где $a_{ik}=a_{ki}$; $i, k=1, 2, 3, 4$.

Уравнение (1) можно записать в векторной форме

$$(\mathbf{Ar})\cdot\mathbf{r}+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}+a_{44}=0, \quad (3.5\text{-}2)$$

где $\mathbf{A}$ — аффинор с координатами $A^i_k=a_{ik}$, $\mathbf{a}$ — вектор с координатами $a_i=a_{i4}$ (см. также п. 16.9-2).

3.5-2. Инварианты. Для любого уравнения (1) четыре величины

$$\left.\begin{aligned} &I=a_{11}+a_{22}+a_{33}, \qquad J=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11}\end{vmatrix}, \\ &D=A_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}, \quad A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (3.5\text{-}3)$$

являются *инвариантами* относительно параллельного переноса и поворота осей (3.1-19), (3.1-20), (3.1-23). Эти инварианты определяют свойства поверхности, не зависящие от ее положения в пространстве. Детерминант A называется **дискриминантом** уравнения (1).

3.5-3. Классификация поверхностей второго порядка. Табл. 3.5-1 содержит классификацию поверхностей второго порядка, основанную на их инвариантах, определенных в п. 3.5-2. В этой таблице

$$A'=A_{11}+A_{22}+A_{33},$$

A_{ik} обозначает алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в определителе $A=\det|a_{ik}|$, см. п. 1.5-2,

$$A''=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}. \quad (3.5\text{-}4)$$

A' и A'' являются инвариантами относительно поворота осей (*семиинвариантами*).

3.5-4. Характеристическая квадратичная форма и характеристическое уравнение. При помощи **характеристической квадратичной формы**

$$F_0(x, y, z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz, \quad (3.5\text{-}5)$$

соответствующей уравнению (1), могут быть изучены важные свойства поверхностей второго порядка. В частности, невырожденная центральная поверхность второго порядка ($A\neq 0$, $D\neq 0$) оказывается действительным эллипсоидом, мнимым эллипсоидом или гиперболоидом в зависимости от того, будет ли $F_0(x, y, z)$ соответственно положительно определенной, отрицательно определенной или неопределенной квадратичной формой, что устанавливается по корням λ_1, λ_2, λ_3 ее **характеристического уравнения** (п. 13.4-5, а)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0 \text{ или } \lambda^3-I\lambda^2+J\lambda-D=0. \quad (3.5\text{-}6)$$

Корни λ_1, λ_2, λ_3 являются собственными значениями действительной симметрической матрицы $[a_{ik}]$ (п. 13.4-2) и, как следствие этого, всегда действительны. Имеем:

$$I = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad J = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \quad D = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Таблица 3.5-1 (*а*)

Классификация поверхностей второго порядка

		Невырожденные поверхности		**Вырожденные поверхности**
		$A > 0$	$A < 0$	$A = 0$
Центральные поверхности $D \neq 0$	DI, J оба больше нуля	**Мнимый эллипсоид**	**Эллипсоид**	**Точка** (действительная вершина мнимого конуса)
	DI, J не оба больше нуля	**Однополостный гиперболоид**	**Двуполостный гиперболоид**	**Действительный конус**
Нецентральные поверхности $D = 0$		**Гиперболический параболоид**	**Эллиптический параболоид**	**Цилиндры** (см. табл. 3.5-1 (*б*), $A' \neq 0$) **Пары плоскостей** (см. табл. 3.5-1 (*б*), $A' = 0$)

Таблица 3.5-1 (*b*)

	Цилиндры $A' \neq 0$	**Пары плоскостей** $A' = 0$	
$A = 0$, $D = 0$, $J > 0$	**Эллиптический цилиндр** (мнимый эллиптический цилиндр, если $A'I > 0$; действительный, если $A'I < 0$)	**Пара мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой**	
$A = 0$, $D = 0$, $J < 0$	**Гиперболический цилиндр**	**Пара действительных пересекающихся плоскостей**	
$A = 0$, $D = 0$, $J = 0$	**Параболический цилиндр**	**Пара параллельных плоскостей** (мнимых, если $A'' > 0$; действительных, если $A'' < 0$)	**Пара действительных совпадающих плоскостей** *)
Ранг квадратной матрицы $[a_{ik}]$ 4-го порядка (п. 13.2-7)	3	2	1

*) Пара совпавших плоскостей характеризуется любым из следующих двух признаков: (а) ранг $[a_{ik}]$ равен 1, (б) $A = D = J = A' = A'' = 0$, $I \neq 0$.

3.5-5. Диаметральные плоскости, диаметры и центры поверхностей второго порядка.

(a) Для любой поверхности второго порядка (вырожденной или невырожденной) геометрическим местом середин параллельных хорд служит плоскость, которая называется **диаметральной плоскостью** поверхности, сопряженной этим хордам (или направлению этих хорд). Диаметральная плоскость поверхности (1), сопряженная хордам с направляющими косинусами $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$, определяется уравнением

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14})\cos\alpha_x+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24})\cos\alpha_y+ \\ +(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+\alpha_{34})\cos\alpha_z=0. \qquad (3.5\text{-}7)$$

(b) Прямая, по которой пересекаются две диаметральные плоскости, называется **диаметром**, *сопряженным семейству плоскостей*, параллельных сопряженным хордам этих диаметральных плоскостей. С другой стороны, диаметр является геометрическим местом центров кривых второго порядка, по которым пересекают поверхность параллельные между собой плоскости семейства. Уравнения диаметра, сопряженного семейству плоскостей с заданными направляющими косинусами нормалей $\cos a_x$, $\cos a_y$, $\cos a_z$:

$$\frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}}{\cos\alpha_x}=\frac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}}{\cos\alpha_y}=\frac{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}}{\cos\alpha_z}. \qquad (3.5\text{-}8)$$

(c) При $D\neq 0$ все диаметры поверхности второго порядка пересекаются в одной точке, *центре* поверхности (другое определение см. в п. 3.5-8). При $D=0$ все диаметры параллельны или лежат в одной плоскости. В первом случае, т. е. при $D\neq 0$, поверхность называется **центральной.**

Координаты x_0, y_0, z_0 центра определяются системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14}=0,\\ a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24}=0,\\ a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_{34}=0,\end{aligned}\right\} \qquad (3.5\text{-}9)$$

откуда

$$x_0=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13}\\ a_{24} & a_{22} & a_{23}\\ a_{34} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad y_0=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{13}\\ a_{21} & a_{24} & a_{23}\\ a_{31} & a_{34} & a_{33}\end{vmatrix},\quad z_0=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{34}\end{vmatrix}. \qquad (3.5\text{-}10)$$

Если поверхность центральная, то перенос (3.1-19) начала координат в ее центр (10) приводит уравнение поверхности к виду

$$a_{11}\bar{x}^2+a_{22}\bar{y}^2+a_{33}\bar{z}^2+2a_{12}\bar{x}\bar{y}+2a_{13}\bar{x}\bar{z}+2a_{23}\bar{y}\bar{z}+\frac{A}{D}=0, \qquad (3.5\text{-}11)$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ — координаты относительно новой системы.

(d) Три диаметра центральной поверхности второго порядка называются **сопряженными диаметрами**, если каждый из них сопряжен плоскости двух других диаметров.

3.5-6. Главные плоскости и главные оси.

(a) Диаметральная плоскость, перпендикулярная к сопряженным ей хордам, называется **главной плоскостью** поверхности второго порядка и является ее плоскостью симметрии. Каждая поверхность второго порядка имеет по меньшей мере одну главную плоскость и по меньшей мере две плоскости симметрии. (П р и м е р: параболический цилиндр имеет одну главную плоскость.) Только цилиндры имеют плоскости симметрии (перпендикулярные к образующим), которые не являются главными плоскостями. Каждая невырожденная поверхность второго порядка имеет по меньшей мере две взаимно перпендикулярные главные плоскости. Каждая центральная поверхность (п. 3.5-5) имеет по меньшей мере три главные плоскости (ровно три, если она не является поверхностью вращения), среди которых всегда существуют три взаимно перпендикулярные.

(b) Диаметр, являющийся линией пересечения двух главных плоскостей, называется **главной осью** поверхности и является ее осью симметрии. Если

поверхность имеет две главные оси, то она имеет и третью, перпендикулярную к ним обеим. Каждая невырожденная поверхность имеет по меньшей мере одну главную ось. Центральная поверхность имеет по меньшей мере три (ровно три, если она не является поверхностью вращения) взаимно перпендикулярные главные оси, представляющие собой нормальные к ее главным плоскостям диаметры (сопряженные как этим плоскостям, так и между собой, см. п. 3.5-4, a); среди главных осей центральной поверхности всегда имеются три взаимно перпендикулярные.

Нормали к главным плоскостям имеют направления собственных векторов матрицы $[a_{ik}]$, $i, k = 1, 2, 3$ (см. п. 14.8-6). Направляющие косинусы этих нормалей $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$ определяются системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\cos\alpha_x + a_{12}\cos\alpha_y + a_{13}\cos\alpha_z &= 0,\\ a_{21}\cos\alpha_x + (a_{22}-\lambda)\cos\alpha_y + a_{23}\cos\alpha_z &= 0,\\ a_{31}\cos\alpha_x + a_{32}\cos\alpha_y + (a_{33}-\lambda)\cos\alpha_z &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3.5\text{-}12)$$

где λ — отличный от нуля (заведомо действительный) корень характеристического уравнения (6). ⁎Если все корни λ_1, λ_2, λ_3 уравнения (6) отличны от нуля, то система (12) определяет для каждого из этих корней направляющие косинусы главной оси. В том случае, когда $\lambda = 0$ является простым корнем характеристического уравнения (6), ему соответствуют направляющие косинусы единственной главной оси. Если же $\lambda = 0$ — кратный корень, то поверхность является параболическим цилиндром или парой параллельных плоскостей. В этом случае система (3.5-12) содержит только одно независимое уравнение. Если дополнить ее уравнением

$$a_{41}\cos\alpha_x + a_{42}\cos\alpha_y + a_{43}\cos\alpha_z = 0,$$

то новая система определит направление образующих цилиндра.⁎

3.5-7. Приведение уравнения поверхности второго порядка к стандартному (каноническому) виду. Если ввести новую систему координат, осуществив

1) *поворот* координатных осей (п. 3.1-12, b), в результате которого нормаль к каждой из взаимно перпендикулярных плоскостей

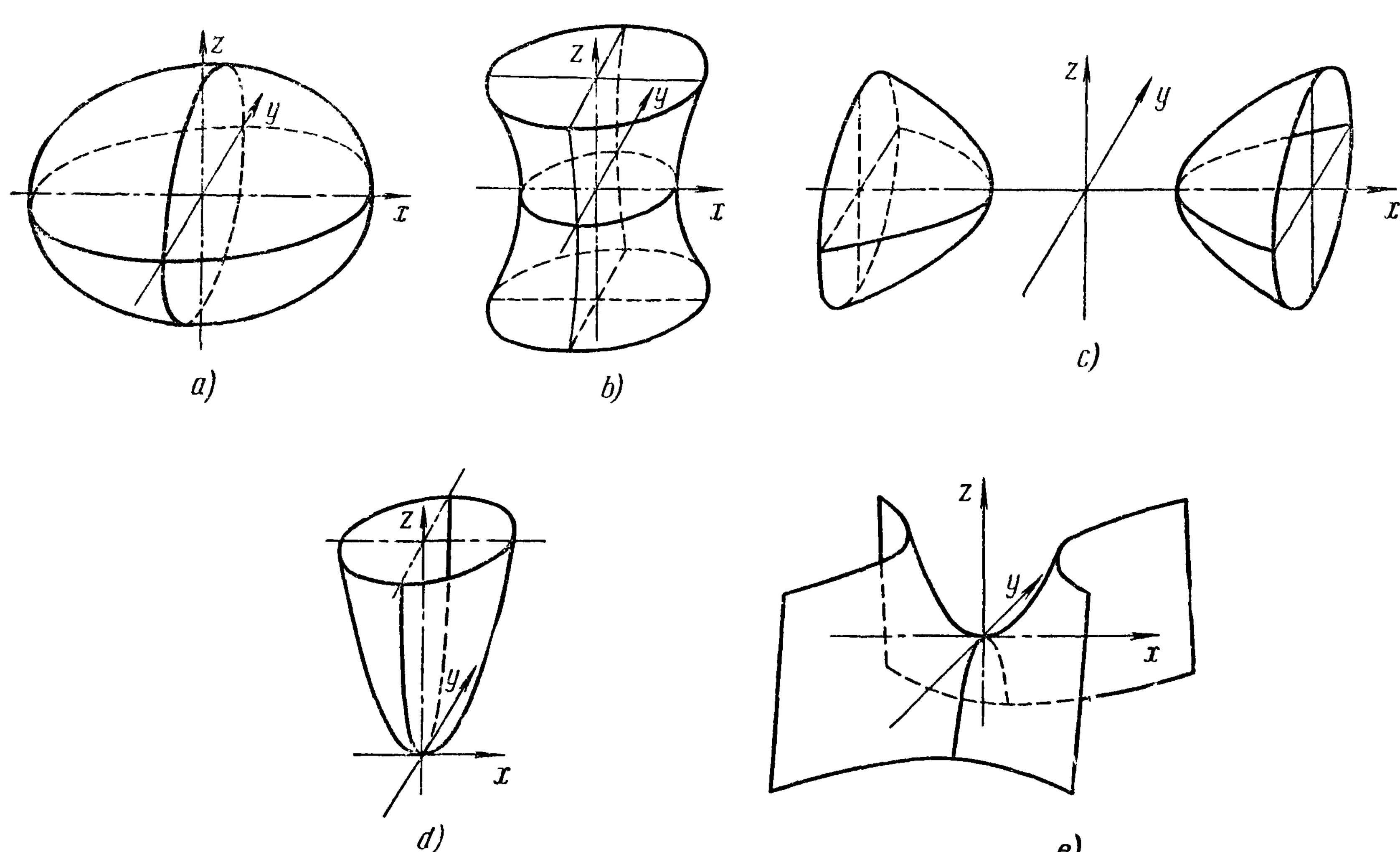


Рис. 3.5-1. Невырожденные поверхности второго порядка: *a*) эллипсоид, *b*) однополостный гиперболоид, *c*) двуполостный гиперболоид, *d*) эллиптический параболоид, *e*) гиперболический параболоид.

симметрии поверхности станет параллельной одной из новых осей (*преобразование к главным осям*, см. п. 14.8-6);

2) подходящий *перенос начала* (п. 3.1-12, а),

то уравнение (1) любой невырожденной поверхности второго порядка может быть преобразовано к одному из видов, перечисленных в табл. 3.5-2. Эти поверхности изображены на рис. 3.5-1. Каждое из полученных уравнений называется *стандартным* (или *каноническим*) уравнением соответствующей поверхности. В табл. 3.5-2 приведены также основные свойства поверхностей и соотношения, позволяющие определить параметры a^2, b^2, c^2, p и q по инвариантам A, D, J и I уравнения (1).

Уравнения *вырожденных поверхностей* (см. табл. 3.5-1) аналогичным образом приводятся к следующему стандартному виду:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \ (\textit{точка}),\\
&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \ (\textit{действительный конус; круговой, если } a^2=b^2),\\
&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\textit{эллиптический цилиндр; круговой, если } a^2=b^2),\\
&\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\textit{гиперболический цилиндр}),\\
&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \ (\textit{прямая}),\\
&\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \ (\textit{пара пересекающихся плоскостей}),\\
&y^2=2px \ (\textit{параболический цилиндр}),\\
&\frac{x^2}{a^2}=1 \ (\textit{пара параллельных плоскостей}),\\
&x^2=0 \ (\textit{одна действительная плоскость}).
\end{aligned}\right\} \qquad (3.5\text{-}13)$$

Направления новых осей Ox, Oy, Oz определяются уравнениями (12) с точностью до поворота на угол, кратный $\pi/2$, вокруг любой из новых осей; этому преобразованию соответствует перестановка переменных x, $-x$, y, $-y$, z, $-z$ в канонических уравнениях табл. 3.5-2.

3.5-8. Касательные плоскости и нормали поверхности второго порядка. Полюсы и поляры.

(a) Определение **касательных плоскостей** и **нормалей** поверхности, а также условия их существования приведены в п. 17.3-2. **Уравнение касательной плоскости к поверхности** (1) в точке P_1 (x_1, y_1, z_1) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1x+a_{22}y_1y+a_{33}z_1z+a_{12}(y_1x+x_1y)+a_{13}(z_1x+x_1z)+\\
&\quad+a_{23}(y_1z+z_1y)+a_{14}(x_1+x)+a_{24}(y_1+y)+a_{34}(z_1+z)+a_{44}=0\\
&\text{или}\\
&(a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}z_1+a_{14})\,x+(a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23}z_1+a_{24})\,y+\\
&\quad+(a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}z_1+a_{34})\,z+(a_{41}x_1+a_{42}y_1+a_{43}z_1+a_{44})=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.5\text{-}14)$$

(b) **Уравнения нормали к поверхности** (1) в точке (x_1, y_1, z_1) (см. также п. 3.3-16, b):

$$\frac{x-x_1}{a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}z_1+a_{14}}=\frac{y-y_1}{a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23}z_1+a_{24}}=$$
$$=\frac{z-z_1}{a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}z_1+a_{34}}. \qquad (3.5\text{-}15)$$

(c) Уравнение (14) определяет плоскость, которая называется **полярной плоскостью** точки (x_1, y_1, z_1) относительно поверхности второго порядка (1) независимо от того, лежит ли точка (x_1, y_1, z_1) на поверхности или нет; точка (x_1, y_1, z_1) называется **полюсом** плоскости (14). Полярная плоскость точки,

Таблица 3.5-2

Стандартные (канонические) уравнения и основные свойства невырожденных поверхностей второго порядка

(см. также табл. 3.5-1; уравнения касательных и полярных плоскостей см. в п. 3.5-8)

Поверхность (см. также рис. 3.5-1)	Стандартное (каноническое) уравнение	Сечение плоскостью	Замечания	Параметры a, b, c, выраженные через инварианты A, D и λ_1, λ_2, λ_3
Действительный эллипсоид (эллипсоид вращения (сфероид), если два главных диаметра равны и либо (a) меньше, чем третий (вытянутый сфероид), либо (b) больше, чем третий (сплюснутый сфероид); сфера, если $a^2=b^2=c^2$)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 3.5-1, *a*)	Действительный или мнимый **эллипс**; **точка** (касательная плоскость)	Вершины в точках $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$; длины главных диаметров равны соответственно $2a$, $2b$, $2c$	$a^2=-\frac{1}{\lambda_3}\frac{A}{D}$, $b^2=-\frac{1}{\lambda_2}\frac{A}{D}$, $c^2=-\frac{1}{\lambda_1}\frac{A}{D}$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0$; $D=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$
Однополостный гиперболоид (гиперболоид вращения, если $a^2=b^2$)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 3.5-1, *b*)	**Гипербола, парабола** или **эллипс** в зависимости от того, параллельна секущая плоскость двум, одной или ни одной прямолинейной образующей асимптотического конуса; пара пересекающихся прямых (касательная плоскость)	Линейчатая поверхность с двумя семействами прямолинейных образующих $\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=1-\frac{y}{b}\end{aligned}\right\}$ и $\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=1+\frac{y}{b}.\end{aligned}\right\}$ Геометрическое место прямых, пересекающих три данные прямые. Асимптотический конус (внутри поверхности): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	$a^2=-\frac{1}{\lambda_2}\frac{A}{D}$, $b^2=-\frac{1}{\lambda_1}\frac{A}{D}$, $c^2=\frac{1}{\lambda_3}\frac{A}{D}$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 > 0 > \lambda_3$, $D=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$

Таблица 3.5-2 (*продолжение*)

Поверхность (см. также рис. 3.5-1)	Стандартное (каноническое) уравнение	Сечение плоскостью	Замечания	Параметры a, b, c, p, q, выраженные через инварианты A, D и $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
Двуполостный гиперболоид (гиперболоид вращения, если $b^2 = c^2$)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. 3.5-1, *c*)	**Гипербола, парабола** или **эллипс** в зависимости от того, параллельна секущая плоскость двум, одной или ни одной прямолинейной образующей асимптотического конуса; пара пересекающихся прямых (касательная плоскость)	Вершины в точках ($\pm a$, 0, 0); расстояние между вершинами равно $2a$. Асимптотический конус (вне поверхности): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	$a^2 = -\frac{1}{\lambda_1}\frac{A}{D}$, $b^2 = \frac{1}{\lambda_3}\frac{A}{D}$, $c^2 = \frac{1}{\lambda_2}\frac{A}{D}$, $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \geqslant \lambda_3$, $D = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$
Эллиптический параболоид (параболоид вращения, если $p = q$)	$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ (рис. 3-5-1, *d*) ($p > 0$, $q > 0$)	**Парабола** (диаметральная плоскость); действительный или мнимый **эллипс; точка** (касательная плоскость)	Вершина в начале координат	$p = \frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{A}{J}}$, $q = \frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{A}{J}}$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 > \lambda_3 = 0$, $J = \lambda_1\lambda_2$
Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ ($p > 0$, $q > 0$) (рис. 3.5-1, *e*)	**Парабола** (диаметральная плоскость); **гипербола**; пара пересекающихся прямых (касательная плоскость)	Седловая точка в начале координат. Линейчатая поверхность с двумя семействами прямолинейных образующих $\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= \lambda,\\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{2z}{\lambda}\end{aligned}\right\}$ и $\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= \mu,\\ \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{2z}{\mu}\end{aligned}\right\}$	$p = \frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{A}{J}}$, $q = -\frac{1}{\lambda_3}\sqrt{-\frac{A}{J}}$, $\lambda_1 > \lambda_2 = 0 > \lambda_3$, $J = \lambda_1\lambda_3$

принадлежащей поверхности второго порядка, если касательная плоскость поверхности в этой точке.

(d) Полярная плоскость β любой точки B данной плоскости α проходит через полюс A этой плоскости α.

(e) Центр поверхности второго порядка есть полюс бесконечно удаленной плоскости. Диаметральная плоскость есть полярная плоскость бесконечно удаленной точки, через которую проходят хорды, сопряженные этой диаметральной плоскости.

(f) Полярные плоскости всех точек данной прямой пересекаются по одной прямой: эта последняя прямая содержит полюсы всех плоскостей, проходящих через данную прямую. Две полученные прямые называют *парой полярно сопряженных прямых*.

(g) Диаметр поверхности второго порядка есть прямая, полярно сопряженная бесконечно удаленной прямой пространства.

(h) Полярная плоскость допускает геометрическое определение, аналогичное определению поляры (см. п. 2.4-10).

3.5-9. Некоторые дополнительные формулы и теоремы.

(a) *Уравнение сферы* радиуса r с центром в точке $P_1(x_1, y_1, z_1) \equiv P_1(\mathbf{r}_1)$:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2 \quad \text{или} \quad |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|=r. \tag{3.5-16}$$

(b) Общий вид уравнения сферы:

$$A(x^2+y^2+z^2)+2Bx+2Cy+2Dz+E=0, \quad A\neq 0. \tag{3.5-17}$$

(c) Пусть P_1 и P_2 — точки пересечения сферы с прямой (секущей), проходящей через данную точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда произведение величин направленных отрезков $\overline{P_0P_1}$ и $\overline{P_0P_2}$ постоянно для всех секущих, проходящих через P_0, причем

$$\overline{P_0P_1}\cdot\overline{P_0P_2}=x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2. \tag{3.5-18}$$

Теорема остается справедливой и в том случае, когда P_1 и P_2 совпадают (если рассматривать вместо секущей ее предельное положение — касательную к сфере в точке $P_1 \equiv P_2$, проходящую через точку P_0).

(d) Для половин трех сопряженных диаметров эллипсоида (п. 3.5-5):

1. Сумма квадратов равна $a^2+b^2+c^2$.
2. Объем построенного на них параллелепипеда равен abc.

(e) Диаметральная плоскость поверхности второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3.5-19}$$

(эллипсоид, однополостный гиперболоид или двуполостный гиперболоид, см. также табл. 3.5-2), сопряженная диаметру с направляющими косинусами $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$, определяются уравнением

$$\frac{x\cos\alpha_x}{a^2}\pm\frac{y\cos\alpha_y}{b^2}\pm\frac{z\cos\alpha_z}{c^2}=0. \tag{3.5-20}$$

Направляющие косинусы трех сопряженных диаметров $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$; $\cos\beta_x$, $\cos\beta_y$, $\cos\beta_z$; $\cos\gamma_x$, $\cos\gamma_y$, $\cos\gamma_z$ удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\cos\alpha_x\cos\beta_x}{a^2}\pm\frac{\cos\alpha_y\cos\beta_y}{b^2}\pm\frac{\cos\alpha_z\cos\beta_z}{c^2}=0,\\
&\frac{\cos\alpha_x\cos\gamma_x}{a^2}\pm\frac{\cos\alpha_y\cos\gamma_y}{b^2}\pm\frac{\cos\alpha_z\cos\gamma_z}{c^2}=0,\\
&\frac{\cos\beta_x\cos\gamma_x}{a^2}\pm\frac{\cos\beta_y\cos\gamma_y}{b^2}\pm\frac{\cos\beta_z\cos\gamma_z}{c^2}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{3.5-21}$$

Знаки в уравнениях (20) и (21) должны совпадать со знаком соответствующих членов в уравнениях (19).

*(f) Уравнение диаметра поверхности (3.5-19), сопряженного плоскости с направляющими косинусами нормали $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$, имеет вид

$$\frac{x}{\pm a^2\cos\alpha_x}=\frac{y}{\pm b^2\cos\alpha_y}=\frac{z}{\pm c^2\cos\alpha_z}. *$$

3.5-10. Параметрическое задание поверхностей второго порядка (см. также пп.3.1-14):

$x = a \sin u \cos v, \quad y = b \sin u \sin v, \quad z = c \cos u$ *(эллипсоид)*, (3.5-22)

$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = b \operatorname{ch} u \sin v, \quad z = c \operatorname{sh} u$ *(однополостный гиперболоид)*, (3.5-23)

$x = \pm a \operatorname{ch} u, \quad y = b \operatorname{sh} u \sin v, \quad z = c \operatorname{sh} u \cos v$ *(двуполостный гиперболоид)*, (3.5-24)

(знаки + и — соответствуют двум полостям),

$x = \sqrt{p}\, u \cos v, \quad y = \sqrt{q}\, u \sin v, \quad z = \frac{1}{2} u^2$ *(эллиптический параболоид)*, (3.5-25)

$x = \sqrt{p}\, u \operatorname{ch} v, \quad y = \sqrt{q}\, u \operatorname{sh} v, \quad z = \frac{1}{2} u^2$ *(гиперболический параболоид)*, (3.5-26)

$x = au \cos v, \quad y = bu \sin v, \quad z = cu$ *(действительный конус)*. (3.5-27)

Возможны также многие другие параметрические задания этих поверхностей.

ГЛАВА 4

ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.1. ВВЕДЕНИЕ

Эта глава посвящена главным образом числовым *функциям действительных переменных*. Введение *пределов функций* (пп. 4.4-1 — 4.4-7) позволяет определить новые математические операции (предельные процессы), такие, как сложение и умножение бесконечного числа членов, дифференцирование и интегрирование.

Определения и теоремы, изложенные в этой главе, применимы как к действительным, так и к комплексным функциям и переменным, если специально не оговорено, что речь идет лишь о действительных величинах. Аналитические функции комплексного переменного рассматриваются в гл. 7.

4.2. ФУНКЦИИ

4.2-1. Функции и переменные (см. также п. 12.1-4).

(a) Если дано *правило соответствия*, относящее каждому данному действительному или комплексному числу x из множества S_x действительное или комплексное число

$$y = f(x), \tag{4.2-1}$$

то y называется (числовой) **функцией**

$$y = y(x) = f(x)$$

аргумента x. Равенство (1) указывает значение (или значения) $y = Y = f(X)$ переменной y, соответствующее каждому допустимому значению $x = X$ переменной x; при этом x называется **независимым переменным**, а y — **зависимым переменным**.

Термин «переменное x», в сущности, отсылает к множеству значений X, а равенство (1) символизирует множество соответствий, связывающих значения X переменного x и значения $Y = f(X)$ переменного y. В согласии с обозначениями, применяемыми в большинстве учебников, символом x мы будем обозначать и *переменное* x и *значение этого переменного*, если только это не сможет привести к путанице.

Если x и y рассматривать как декартовы координаты на плоскости (п. 2.1-2), то действительная функция $y = f(x)$ действительного переменного x часто изображается кривой (**графиком** функции y от x, см. также п. 2.1-9).

(b) Подобным же образом функция

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{4.2-2}$$

n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ относит упорядоченному множеству значений (независимых) переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значения (зависимого) переменного y.

Функция может быть определена *таблицей своих значений* или правилом вычисления такой таблицы с помощью известных операций *(конструктивные определения)*. Функция может также быть определена неявно (п. 4.5-7) или с помощью *определяющих свойств*, описываемых функциональными, дифференциальными или интегральными уравнениями, экстремальными свойствами (п. 11.4-2), поведением при некоторых значениях аргумента и т. д. Каждое неконструктивное определение нуждается в *доказательстве существования*, устанавливающем, что функция, обладающая указанными свойствами, существует,

(c) В большинстве приложений переменные x, y или $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y обозначают физические объекты или величины, так что *соответствующие соотношения* (1) или (2) *описывают физические закономерности*. (Пример. $y = x_1 x_2$, если x_1, x_2 и y соответственно обозначают напряжение, силу тока и мощность в простом электрическом контуре.)

(d) Множество S_x значений x (или множество значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$), для которых определены соотношения (1) или (2), есть **область определения** функции $f(x)$ или $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Соответствующее множество S_y значений y есть **множество значений** функции.

(e) **Последовательность** действительных или комплексных чисел s_0, s_1, s_2, ... представляет функцию $s_n = s(n)$, определенную на множестве неотрицательных целых чисел n.

4.2-2. Функции со специальными свойствами (см. также пп. 1.4-3, 7.3-3, 7.6-5 и 7.6-7).

(a) Функция **однозначна**, если каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции [1]). Функция **многозначна**, если хотя бы одному значению аргумента соответствует два или более значений функции. *В дальнейшем всюду в этой главе рассматриваются только однозначные функции, и это всякий раз специально не оговаривается.* Функция $y(x)$ имеет **обратную функцию** $x(y)$, если из $y = y(x)$ следует $x = x(y)$.

(b) Функция $f(x)$ действительного или комплексного переменного x **четна**, если $f(-x) \equiv f(x)$, **нечетна**, если $f(-x) \equiv -f(x)$; является **периодической с периодом** T, если $f(t+T) \equiv f(t)$.

Каждая функция $f(x)$, область определения S_x которой вместе с каждым входящим в него числом x содержит и число $-x$, может быть представлена в виде суммы четной функции $(1/2)[f(x) + f(-x)]$ и нечетной функции $(1/2)[f(x) - f(-x)]$. Периодическая функция f с периодом T называется **антипериодической**, если $f(t + T/2) = -f(t)$. Каждая периодическая функция $f(t)$ с периодом T может быть представлена в виде суммы антипериодической функции $(1/2)[f(t) - f(t+T/2)]$ и функции $(1/2)[f(t) + f(t+T/2)]$, периодической с периодом $T/2$.

(c) $y = f(x)$ есть **алгебраическая функция** от x, если x и y удовлетворяют соотношению вида $F(x,y) = 0$, где $F(x,y)$ — многочлен относительно x и y (п.1.4-3). В частности, $y = f(x)$ есть **рациональная (рациональная алгебраическая) функция** от x, если $f(x)$ есть многочлен (**целая рациональная функция**) или частное двух многочленов (**дробная рациональная функция**). y есть **линейная функция** от x, если $y = ax + b$.

4.3. ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА, ИНТЕРВАЛЫ И ОБЛАСТИ

4.3-1. Вводные замечания. При рассмотрении свойств функции $f(x)$ действительного переменного x часто требуется указать *множество значений* x, для которых значение $f(x)$ определено и удовлетворяет данным условиям. Заметим, что подобным образом могут быть описаны и функции, и множества. Обычно о значениях [2]) действительного переменного x (или объектов, которым соответствуют значения x) говорят как о *точках* (x) прямой, а о множествах таких действительных чисел — как о **линейных точечных множествах.**

Свойства функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подобным же образом связывают с множеством «точек» $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в n-мерном «пространстве», включающем все рассматриваемые точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (п. 14.1-2).

Использование геометрического языка подсказывается *аксиомой непрерывности Кантора — Дедекинда,* постулирующей существование взаимно однозначного соответствия

---

[1]) Многие авторы категорически настаивают на том, что по определению *каждая* функция должна быть однозначна, так что, например, две ветви $+\sqrt{x}$ и $-\sqrt{x}$ для $\pm\sqrt{x}$ всегда следует рассматривать как две функции.

[2]) См. также п. 4.2-1.

между действительными числами и точками прямой. Эта «координатная аксиома» (п. 2.1-2) совместима как со свойствами действительных чисел, так и с постулатами, определяющими евклидову и другие геометрии.

В пп. 4.3-2 — 4.3-6 рассматриваются главным образом те свойства точечных множеств, которые непосредственно применяются в теории функций действительных переменных. В пп. 7.2-2 — 7.2-4 рассматриваются области на комплексной числовой плоскости. Вообще говоря, о любом множестве (классе) объектов (в частности, объектов, соответствующих значениям действительного переменного или переменных) можно говорить как о точечном множестве. Свойства таких множеств рассматриваются ниже, в пп. 12.5-1 — 12.5-4.

4.3-2. Свойства множеств.

(a) Алгебра множеств (классов). Объект (точка) P, содержащийся в множестве (классе) S, есть **элемент** множества S $(P \in S)$. Множество S_1 является **подмножеством** другого множества S_2 (S_1 **содержится** в S_2, $S_1 \subset S_2$), если каждый элемент множества S_1 является элементом и множества S_2. Множества S_1 и S_2 **равны** ($S_1 = S_2$), если они содержат одни и те же элементы, т. е. если $S_1 \subset S_2$ и $S_2 \subset S_1$. **Пустое множество** $\varnothing$ по определению есть подмножество каждого множества S. **Собственное подмножество (собственная часть)** множества S есть непустое подмножество S, не равное S. **Объединение (логическая сумма)** $S_1 \cup S_2$ (или $S_1 + S_2$) есть множество всех элементов, содержащихся *либо в* S_1, *либо в* S_2, *либо и в* S_1, *и в* S_2. **Пересечение (общая часть, логическое произведение)** $S_1 \cap S_2$ (или $S_1 S_2$) множеств S_1 и S_2 есть множество всех элементов, содержащихся *и в* S_1, *и в* S_2. **Дополнение** множества S до множества I, содержащего S, есть множество всех элементов из I, не содержащихся в S. *Подмножества любого множества (класса) I с операциями логического сложения и умножения составляют булеву алгебру* (п. 12.8-1).

(b) Кардинальные числа и счетность. Два множества S_1 и S_2 имеют одну и ту же **мощность (кардинальное число)**, если существует взаимно однозначное соответствие между этими множествами. S есть **бесконечное множество**, если оно имеет ту же мощность, что и хотя бы одно из его собственных подмножеств; в противном случае S — **конечное множество**.

Бесконечное множество S **счетно**, если можно установить взаимно однозначное соответствие между ним и множеством натуральных чисел. Каждое кардинальное число конечного множества тождественно с числом его элементов. *Каждое бесконечное подмножество счетного множества счетно.* Объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Кардинальные числа, соответствующие бесконечным множествам, называются **бесконечными кардинальными числами**. Кардинальное число каждого счетного множества совпадает с кардинальным числом множества натуральных чисел и обозначается символом $\aleph_0$. Множество всех действительных чисел (или множество точек прямой, п. 4.3-1) несчетно; соответствующее кардинальное число обозначается символом $\aleph$.

4.3-3. Границы.

(a) Действительное число M есть **верхняя граница** или **нижняя граница** множества S_y действительных чисел y, если для всех $y \in S_y$ соответственно $y \leqslant M$ или $y \geqslant M$. Множество действительных или комплексных чисел **ограничено (имеет абсолютную границу)**, если множество абсолютных величин (модулей) этих чисел имеет верхнюю границу; в противном случае множество **не ограничено**.

Каждое (непустое) множество S_y действительных чисел y, имеющее верхнюю границу, имеет **точную верхнюю границу (наименьшую верхнюю границу)** $\sup S_y$, а каждое (непустое) множество S_y действительных чисел, имеющее нижнюю границу, имеет **точную нижнюю границу (наибольшую нижнюю границу)** $\inf S_y$. Если множество S_y конечно, то его точная верхняя граница $\sup S_y$ необходимо равна **наибольшему числу**, принадлежащему S_y: $\max S_y$ (**максимуму** S_y), а точная нижняя граница $\inf S_y$ равна **минимуму** $\min S_y$.

Пример. Множество всех действительных чисел, меньших 1, имеет точную верхнюю границу 1, но не имеет максимума.

(b) Действительная или же комплексная функция $y = f(x)$ или же $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **ограничена** на множестве S «точек» (x) или $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если

ограничено соответствующее множество S_y значений функции y. Точно так же действительная функция $y = f(x)$ или $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет **верхнюю границу, нижнюю границу, точную верхнюю границу, точную нижнюю границу,** (абсолютный) **максимум** и/или (абсолютный) **минимум** на множестве S «точек» (x) или $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если это верно для соответствующего множества S_y значений функции y.

(c) Действительная или комплексная функция $f(x, y)$ или $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; y)$ **равномерно ограничена** на множестве S «точек» (x) или $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если абсолютная величина (модуль) функции f как функция от y имеет верхнюю границу, не зависящую от x или от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на S. **Равномерные верхние границы** и **равномерные нижние границы** определяются аналогично.

4.3-4. Интервалы (см. также пп. 4.3-3 и 4.3-5). Пусть x — действительное переменное. Множество всех значений x (точек), удовлетворяющих условиям:

1) $a < x < b$, есть **ограниченный открытый интервал** (a, b),
2) $a < x$, есть **неограниченный открытый интервал** $(a, +\infty)$,
3) $x < a$, есть **неограниченный открытый интервал** $(-\infty, a)$,
4) $a \leqslant x \leqslant b$, есть **ограниченный замкнутый интервал** $[a, b]$.

Замкнутый интервал называют также *отрезком*, или *сегментом*, или *замкнутым промежутком*. Множества точек (x), удовлетворяющих условиям $a \leqslant x < b$, $a < x \leqslant b$, $a \leqslant x$, $x \leqslant a$, можно называть **полуоткрытыми интервалами.** Каждый интервал I_1, содержащийся в другом интервале I_2, есть **частичный интервал** интервала I_2.

4.3-5. Определение окрестностей.

(a) Пусть a — любое действительное число. (Открытая) **δ-окрестность точки** (a) **в пространстве действительных чисел** есть любой открытый интервал вида $(a - \delta, a + \delta)$, содержащий точку $x = a$, иными словами, множество всех точек (x), удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, где δ — некоторое положительное число. **Окрестность** точки $x = a$ есть любое множество, содержащее некоторую δ-окрестность этой точки.

(b) Множество $(M, +\infty)$ всех точек (x), для некоторого действительного числа M удовлетворяющих условию $x > M$, есть (открытая) **окрестность «точки» плюс бесконечность** $(+\infty)$ **в пространстве действительных чисел;** множество $(-\infty, N)$ всех точек (x), для некоторого действительного числа N удовлетворяющих условию $x < N$, есть (открытая) **окрестность «точки» минус бесконечность** $(-\infty)$ **в пространстве действительных чисел.**

(c) В пространстве, «точки» которого суть (описываются как) упорядоченные множества $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ действительных чисел, (открытую) δ-окрестность точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ конечны, можно определить как множество всех точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условиям $|x_1 - a_1| < \delta$, $|x_2 - a_2| < \delta$, ..., $|x_n - a_n| < \delta$, где δ — некоторое положительное число. **Окрестность** точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ есть любое множество, содержащее некоторую δ-окрестность этой точки.

Замечание. Определения окрестностей, подобные тем, которые были даны выше, нельзя считать самоочевидными; они подчиняются *постулатам*, определяющим «топологические» свойства рассматриваемого пространства (см. также п. 12.5-1). В частности, для неограниченных значений переменных (как выше в (b)) окрестности можно определить различными способами (так, $+\infty$ и $-\infty$ можно рассматривать как одну и ту же точку или же как две разные точки; см. также п. 7.2-2). В прикладной математике выбор таких определений будет зависеть от характера тех объектов, которые «представлены» точками (x) или $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Определение окрестностей тесно связано с определением открытых множеств (п. 4.3-6), областей (п. 4.3-6) и пределов функций на рассматриваемом пространстве (п. 4.4-1; см. также п. 12.5-3).

4.3-6. *Открытые и замкнутые множества и области. Все нижеследующие определения зависят от того, каким образом определены окрестности в пространстве C, содержащем рассматриваемые множества и области (от топологии этого пространства, см. также пп. 12.5-1 — 12.5-4).

(a) Точка P есть **предельная точка (точка конденсации, точка накопления)** множества $S \subset C$, если каждая окрестность точки P содержит точки

множества S, отличные от P. Точка P есть **внутренняя точка** множества S, если P имеет окрестность, целиком содержащуюся в S. Точка $P \in C$, не являющаяся внутренней точкой ни множества S, ни его дополнения до C, есть **граничная точка** множества S. Точка P множества S есть его **изолированная точка**, если у нее есть окрестность, не содержащая других точек множества S.

Точечное множество S есть:

открытое множество, если оно состоит только из внутренних точек;

замкнутое множество, если оно содержит все свои предельные точки; конечное множество замкнуто;

дискретное (изолированное) множество, если оно содержит только изолированные точки; дискретное множество на евклидовой плоскости или в евклидовом пространстве конечно или счетно; конечное множество дискретно;

связное множество, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся множеств, каждое из которых не содержит предельных точек другого. (См. также п. 12.5-4.)

(b) Множество на евклидовой плоскости или в евклидовом пространстве **ограничено**, если ограничено множество декартовых координат всех его точек. **Область** (открытая) есть открытое связное множество. Объединение открытой области и ее граничных точек (**границы области**) есть **замкнутая область**.

Область D на евклидовой плоскости называется **односвязной**, если любая простая замкнутая кривая (п. 3.1-13), целиком принадлежащая D, может быть стянута в точку с помощью непрерывной деформации, не выходя из области D. Область не односвязная называется **многосвязной**.

Область V в евклидовом трехмерном пространстве называется:

поверхностно-односвязной, если любую простую замкнутую кривую, лежащую в V, можно с помощью непрерывной деформации стянуть в точку, не выходя из V;

пространственно-односвязной, если любую простую замкнутую поверхность типа сферы, лежащую в V, можно с помощью непрерывной деформации стянуть в точку, не выходя из V.

Например, шар односвязен с точки зрения обоих определений, шаровое кольцо — только с точки зрения первого определения, а тор («баранка») — только с точки зрения второго.

4.4. ПРЕДЕЛЫ, НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

4.4-1. Пределы функций и последовательностей (см. также пп. 4.8-1 и 12.5-3; см. примеры в табл. 4.7-1).

(a) Функция $f(x)$ имеет (*необходимо единственный*) **предел** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ *при x, стремящемся к конечному значению $x=a$* (*предел в точке a*; $f(x)\to L$ при $x\to a$), если для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что при $0<|x-a|<\delta$ функция $f(x)$ определена и $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Функция $f(x)$ действительного переменного x имеет (необходимо единственный) **предел** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ *при x, стремящемся к плюс бесконечности* (*когда x неограниченно возрастает*; $f(x)\to L$ при $x\to+\infty$), если для каждого положительного числа ε существует такое действительное число N, что при $x>N$ функция $f(x)$ определена и $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Если функция $f(x)$ имеет предел L, то говорят, что она **стремится к** L.

(b) **Последовательность** чисел (п. 4.2-1) $s_0, s_1, s_2, \ldots$ ($\equiv s(n)$) имеет (необходимо единственный) *предел* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=S$ (**сходится** к S), если для каждого положительного числа ε существует такой номер N, что при $n>N$ выполняется неравенство $|s_n-S|<\varepsilon$. Критерий сходимости последовательности см. в п. 4.9-1, где рассматриваются признаки сходимости бесконечных рядов.

(c) Действительная функция $f(x)$ **неограниченно возрастает** (**стремится к плюс бесконечности**):

1. *При x, стремящемся к конечному значению $x=a$* ($f(x)\to+\infty$ при $x\to a$; некоторые авторы пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$), если для каждого действительного числа M суще-

ствует такое положительное число δ, что при $0 < |x-a| < \delta$ функция $f(x)$ определена и $f(x) > M$.

2. *При x, стремящемся к плюс бесконечности* ($f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$; некоторые авторы пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$), если для каждого действительного числа M существует такое действительное число N, что при $x > N$ функция $f(x)$ определена и $f(x) > M$.

Аналогичное определение дается в случае последовательности. Действительное переменное x или $f(x)$ **стремится к минус бесконечности** ($x \to -\infty$ или $f(x) \to -\infty$), если соответственно $-x \to +\infty$ или $-f(x) \to +\infty$. В (b) и (c) устанавливается математический смысл символов $+\infty$ и $-\infty$ в системе действительных чисел (см. также пп. 4.3-5 и 7.2-2).

Если $f(x) \to +\infty$ или $f(x) \to -\infty$ при $x \to a$ (при $x \to +\infty$; при $x \to -\infty$), то говорят, что функция $f(x)$ является **бесконечно большой** при $x \to a$ (соответственно при $x \to +\infty$; при $x \to -\infty$). Если $f(x) \to 0$ при $x \to a$ (при $x \to +\infty$; при $x \to -\infty$), то функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$ (соответственно при $x \to +\infty$; при $x \to -\infty$).

4.4-2. Операции над пределами (см. также пп. 4.4-6,c и 4.8-4). Если пределы в правой части нижеследующих равенств существуют, то существуют пределы и в левой части равенств и

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x),\\
&\lim_{x \to a} [\alpha f(x)] = \alpha \lim_{x \to a} f(x),\\
&\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x),\\
&\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \qquad \left[\lim_{x \to a} g(x) \neq 0\right],
\end{aligned}\right\} \tag{4.4-1}$$

где a может быть как конечным, так и бесконечным; эти правила применимы и к пределам последовательностей (п. 4.4-1), а также к пределам функций нескольких переменных (п. 4.4-5).

4.4-3. Асимптотические соотношения между двумя функциями (см. также п. 4.8-6). Если даны две действительные или комплексные функции $f(x)$, $g(x)$ действительного или комплексного переменного x, то пишут

1. $f(x) = O[g(x)]$ ($f(x)$ есть $O[g(x)]$); $f(x)$ есть функция **не низшего порядка малости чем** $g(x)$ при $x \to a$, если существует окрестность точки a, в которой при $x \neq a$ отношение $f(x)/g(x)$ ограничено.

2. $f(x) = O^*[g(x)]$; $f(x)$ и $g(x)$ **имеют один и тот же порядок** (**функция** $f(x)$ **асимптотически пропорциональна** $g(x)$) при $x \to a$, если предел $\lim\limits_{x \to a} [f(x)/g(x)]$ существует и отличен от нуля.

3. $f(x) \sim g(x)$; $f(x)$ и $g(x)$ **эквивалентны** (функция $f(x)$ **асимптотически равна** $g(x)$) при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} [f(x)/g(x)] = 1$; отсюда следует, что *отношение разности* $f(x) - g(x)$ *к* $g(x)$ (или к $f(x)$) *стремится к нулю при* $x \to a$.

4. $f(x) = o[g(x)]$ ($f(x)$ есть $o[g(x)]$); $f(x)$ есть **функция более высокого порядка малости чем** $g(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} [f(x)/g(x)] = 0$. Это иногда читают и так: «функция $f(x)$ пренебрежимо мала по сравнению с $g(x)$» при $x \to a$.

В каждом из этих определений a может быть как конечным, так и бесконечным. **Бесконечно малыми порядка** 1, 2, ... при $x \to 0$ называются функции того же порядка, что и соответственно функции x, x^2, ... при $x \to 0$. **Бесконечно большими порядка** 1, 2, ... при $x \to +\infty$ называются функции того же порядка, что и соответственно функции x, x^2, ... при $x \to +\infty$.

Асимптотические соотношения часто позволяют оценивать или приближать функцию $f(x)$ с помощью $g(x)$ в некоторой окрестности точки $x = a$.

Пишут

$$f(x) = \varphi(x) + O[g(x)], \quad \text{если} \quad f(x) - \varphi(x) = O[g(x)],$$
$$f(x) = \varphi(x) + o[g(x)], \quad \text{если} \quad f(x) - \varphi(x) = o[g(x)].$$

4.4-4. Равномерная сходимость.

(a) Функция $f(x_1, x_2)$ **сходится равномерно на множестве** S **значений** x_2:

1. К функции $\lim_{x_1 \to a} f(x_1, x_2) = L(x_2)$, если для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что при $0 < |x_1 - a| < \delta$ и *при всех* $x_2 \in S$ функция $f(x_1, x_2)$ определена и выполняется неравенство $|f(x_1, x_2) - L(x_2)| < \varepsilon$ (δ не зависит от x_2).

2. К функции $\lim_{x_1 \to +\infty} f(x_1, x_2) = L(x_2)$, если для каждого положительного числа ε существует такое действительное число N, что при $x_1 > N$ и *при всех* $x_2 \in S$ функция $f(x_1, x_2)$ определена и выполняется неравенство $|f(x_1, x_2) - L(x_2)| < \varepsilon$.

(b) Последовательность функций $s_0(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x)$, ... равномерно сходится на множестве S значений x к функции

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x) = s(x),$$

если для каждого положительного числа ε существует такой номер N, что при $n > N$ и при всех $x \in S$ выполняется неравенство $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$ (см. также пп. 4.6-2 и 4.8-2).

4.4-5. Пределы по совокупности переменных и повторные пределы.

(a) Если термин «окрестность» понимать в смысле, указанном в п. 4.3-5,с, то функция $f(x_1, x_2)$ имеет (*необходимо единственный*) предел $\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2}} f(x_1, x_2) = L$, если для каждого положительного числа ε существует такая окрестность D точки (a_1, a_2), что для всех точек $(x_1, x_2) \in D$, исключая, быть может, точку (a_1, a_2), функция $f(x_1, x_2)$ определена и $|f(x_1, x_2) - L| < \varepsilon$. При этом a_1 и/или a_2 могут быть как конечными, так и бесконечными.

Двойная последовательность s_{00}, s_{10}, ... имеет предел $\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} s_{mn} = s$ (сходится к s), если для каждого положительного числа ε существуют такие два номера M и N, что при $m > M$ и $n > N$ выполняется неравенство $|s_{mn} - s| < \varepsilon$. Пределы функций более чем двух переменных определяются аналогично.

(b) *Если существует такое положительное число* δ, *что*

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2) = f(a_1, x_2) \quad \text{при} \quad 0 < |x_2 - a_2| < \delta, \\ &\lim_{x_2 \to a_2} f(x_1, x_2) = f(x_1, a_2) \quad \text{при} \quad 0 < |x_1 - a_1| < \delta \end{aligned}\right\} \tag{4.4-2}$$

и по крайней мере в одном из этих предельных процессов сходимость на указанном множестве равномерна, то все три предела

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2}} f(x_1, x_2), \qquad \lim_{x_1 \to a_1} \left[\lim_{x_2 \to a_2} f(x_1, x_2) \right]$$

и

$$\lim_{x_2 \to a_2} \left[\lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2) \right]$$

существуют и равны друг другу. Аналогичные теоремы справедливы и в случае, когда a_1 и/или a_2 бесконечны.

4.4-6. Непрерывные функции.

(a) Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $x = a$, **непрерывна при** $x = a$ **(в точке** a**)**, если предел $\lim_{x \to a} f(x)$ существует и равен $f(a)$, т. е. если для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что при $|x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Точно так же функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная в некоторой окрестности точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, непрерывна в точке $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, если

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна в точке $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ по x_1, если функция $f(x_1, a_2, \ldots, a_n)$ непрерывна в точке $x_1 = a_1$. Функция, непрерывная в точке $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ по каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в отдельности, может не быть непрерывной в точке $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

(b) Функция **непрерывна на множестве точек** (например, в интервале или в области), если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Действительная функция $f(x)$, непрерывная на ограниченном замкнутом интервале $[a, b]$, ограничена на $[a, b]$ и хотя бы по одному разу принимает каждое значение, заключенное между ее точной верхней и точной нижней границами на $[a, b]$ (п. 4.3-3), *включая и эти границы.* Аналогичная теорема верна и для действительной функции двух и большего числа переменных, непрерывной в ограниченной замкнутой области.

Функция $f(x)$ **равномерно непрерывна на множестве** S, если для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для всех $x \in S$ и $X \in S$ при $|x - X| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(X)| < \varepsilon$. *Функция, непрерывная на ограниченном замкнутом интервале $[a, b]$, равномерно непрерывна на $[a, b]$.*

(c) *Если две функции f и g непрерывны в данной точке x или $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то непрерывны в этой точке и функции $f + g$, $f - g$ и fg; если функция g не обращается в этой точке в нуль, то в этой точке непрерывна и функция f/g. Если дано, что $\lim_{x \to a} y_i(x) = A_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и что функция $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ непрерывна в точке $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, то*

$$\lim_{x \to a} F[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)] = F(A_1, A_2, \ldots, A_n) \tag{4.4-3}$$

(см. также п. 4.4-2). В частности, *если каждая из функций $y_i(x)$ непрерывна при $x = a$, то это верно и для $F[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]$.*

Предел $s(x)$ равномерно сходящейся на множестве S значений x последовательности функций $s_0(x), s_1(x), \ldots$, непрерывных на S, есть функция, непрерывная на S.

4.4-7. Односторонние пределы. Односторонняя непрерывность.

(a) Функция $f(x)$ действительного переменного x имеет (*необходимо единственный*) **предел**

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \equiv \lim_{x \to a+} f(x) \equiv f(a+0) = L_+$$

в точке a **справа**, если для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что при $0 < x - a < \delta$ функция $f(x)$ определена и выполняется неравенство $|f(x) - L_+| < \varepsilon$. Функция $f(x)$ имеет **в точке** a **предел слева**

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \equiv \lim_{x \to a-} f(x) \equiv f(a-0) = L_-,$$

если для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что при $0 < a - x < \delta$ функция $f(x)$ определена и выполняется неравенство $|f(x) - L_-| < \varepsilon$. *Если существует предел $\lim_{x \to a} f(x)$, то пределы $\lim_{x \to a+0} f(x)$ и $\lim_{x \to a-0} f(x)$ существуют и*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x).$$

Обратно, *если* $\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x)$, *то предел* $\lim_{x \to a} f(x)$ *существует.*

(b) Функция $f(x)$ **непрерывна в точке** a **справа** или **слева**, если соответственно $f(a+0) = f(a)$ или $f(a-0) = f(a)$. *Точка разрыва первого рода* действительной функции $f(x)$ есть точка a, в которой функция $f(x)$ разрывна (т. е. не непрерывна) и существуют пределы $f(a+0)$ и $f(a-0)$; наибольшая разность между двумя из чисел $f(a)$, $f(a+0)$ и $f(a-0)$ есть *скачок* функции $f(x)$ в такой точке разрыва *). *Точки разрыва первого рода функции* $f(x)$ *образуют конечное или счетное множество* (п. 4.3-6,а).

(c) Функция $f(x)$ **кусочно-непрерывна** на интервале I, если она непрерывна в I всюду, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ кусочно-непрерывна в области V n-мерного пространства, если она непрерывна в V всюду, за исключением, быть может, некоторого множества регулярных гиперповерхностей (регулярных кривых при $n=2$, регулярных поверхностей при $n=3$, пп. 3.1-13 и 3.1-14), разбивающих V на конечное число подобластей, в каждой из которых функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет единственный односторонний предел при приближении к любой граничной точке подобласти изнутри этой подобласти.

4.4-8. Монотонные функции и функции ограниченной вариации.

(a) Действительная функция $f(x)$ действительного переменного x **строго монотонна** на интервале I, если она на нем определена и если для любых двух точек x_1 и x_2 интервала I либо из $x_1 < x_2$ всегда следует $f(x_1) < f(x_2)$ (**возрастающая функция**), либо же из $x_1 < x_2$ всегда следует $f(x_1) > f(x_2)$ (**убывающая функция**). Функция $f(x)$ **нестрого монотонна** на I, если она определена на I и если для любых двух точек x_1 и x_2 интервала I либо из $x_1 < x_2$ всегда следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (**неубывающая функция**), либо же из $x_1 < x_2$ всегда следует $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (**невозрастающая функция**). Аналогичные определения даются для *монотонных последовательностей* (п. 4.2-1).

(b) Действительная функция $f(x)$ действительного переменного x есть функция **ограниченной вариации** на интервале $[a, b]$, если существует такое положительное число M, что для всех разбиений $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ интервала $[a, b]$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < M.$$

Функция $f(x)$ есть функция *ограниченной вариации* на $[a, b]$ в том и только в том случае, если она может быть представлена в виде $f(x) \equiv f_1(x) - f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничены и не убывают на $[a, b]$.

Если $f(x)$ *и* $g(x)$ — *функции ограниченной вариации на* $[a, b]$, *то и* $f(x) + g(x)$ *и* $f(x)\,g(x)$ — *функции ограниченной вариации на* $[a, b]$. **Функция** $f(x)$ *есть функция ограниченной вариации на каждом конечном интервале* $[a, b]$, *на котором она ограничена и имеет конечное число относительных максимумов и минимумов* (п. 11.2-1) *и точек разрыва первого рода* (*условия Дирихле*).

Функция ограниченной вариации на $[a, b]$ *ограничена на* $[a, b]$ *и имеет только точки разрыва первого рода* (п. 4.4-7).

В физических приложениях условие, чтобы $f(x)$ была функцией ограниченной вариации на каждом ограниченном промежутке, выражает тот факт, что функция $f(x)$ ограничена и что компоненты очень высокой частоты не могут существенно влиять на ее интенсивность (п. 18.10-9).

---

*) Часто скачок функции $f(x)$ в точке a определяют как разность $f(a+0) - f(a-0)$. Для монотонной функции это определение и данное в тексте совпадают.

4.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.5-1. Производные и дифференцирование.

(a) Пусть $y=f(x)$ — действительная функция действительного переменного x, определенная в некоторой окрестности точки x. **Первая производная (производная первого порядка) функции** $f(x)$ по x в точке x есть предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{d}{dx} f(x) \equiv f'(x) \equiv y'. \qquad (4.5\text{-}1)$$

В каждой точке x, в которой предел (1) существует, производная $\frac{dy}{dx} \equiv f'(x)$ есть мера *скорости изменения* y *относительно* x. Производная $f'(x)$ есть *угловой коэффициент касательной* (п. 17.1-1) *к графику функции* $y=f(x)$ (см. п. 4.2-1, а) *в точке* x.

Соответствующие односторонние пределы (п. 4-4-7,a) называются **левой производной** $f'_-(x)$ и **правой производной** $f'_+(x)$ функции $f(x)$ в точке x.

(b) **Вторая, третья, ..., n-я производные (производные второго, третьего, ..., n-го порядка) функции** $y=f(x)$ по x в точке x определяются соответственно формулами

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx} f'(x) \equiv \frac{d^2y}{dx^2} \equiv f''(x), \\ &\frac{d}{dx} f''(x) \equiv \frac{d^3y}{dx^3} \equiv f'''(x), \;\ldots,\; \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x) \equiv \frac{d^ny}{dx^n} \equiv f^{(n)}(x), \end{aligned}\right\} \qquad (4.5\text{-}2)$$

если соответствующие пределы существуют.

(c) Операция отыскания производной $f'(x)$ данной функции $f(x)$ называется **дифференцированием** функции $f(x)$ по x. Функция $f(x)$ **дифференцируема** при тех значениях x или на том множестве значений x, при которых существует производная $f'(x)$. Функция $f(x)$ **непрерывно дифференцируема**, если производная $f'(x)$ существует и непрерывна. Функция $f(x)$ называется **кусочно-гладкой** на промежутке I, если функция $f(x)$ непрерывна на I, а ее производная $f'(x)$ кусочно-непрерывна (п.4.4-7, с) на I. *Дифференцируемая функция непрерывна.*

Производные большого числа часто встречающихся функций приведены в табл. 4.5-1. Производные от комбинаций этих функций могут быть найдены с помощью правил дифференцирования из п. 4.5-4.

4.5-2. Частные производные.

(a) Пусть $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — действительная функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определенная в некоторой окрестности точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. **Частная производная (первого порядка) функции** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по x_1 в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть предел

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_1} \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial}{\partial x_1} f \equiv \frac{\partial y}{\partial x_1} \equiv f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (4.5\text{-}3)$$

Производная $\frac{\partial y}{\partial x_1} \equiv \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \equiv f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в каждой точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в которой существует предел (3), есть мера *скорости изменения* y *относительно* x_1 *при фиксированных значениях остальных независимых переменных*. Частные производные $\frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}$ определяются аналогично. *Каждая частная производная* $\frac{\partial y}{\partial x_k}$ *может быть найдена посредством дифференцирования функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *по* x_k, *если остальные* $n-1$ *независимых переменных рассматривать как постоянные параметры.*

Таблица 4.5-1

Производные часто встречающихся функций

(см. также в гл. 21 производные некоторых специальных функций)

(a)

$f(x)$	$f'(x)$	$f^{(r)}(x)$
x^a	ax^{a-1}	$a(a-1)(a-2)\ldots(a-r+1)x^{a-r}$
e^x	e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$	$a^x (\ln a)^r$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(-1)^{r-1}(r-1)!\frac{1}{x^r}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$(-1)^{r-1}(r-1)!\frac{1}{x^r \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin\left(x + r\frac{\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos\left(x + r\frac{\pi}{2}\right)$

(b)

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{cosec} x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\operatorname{arcth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
		x^x	$x^x(1+\ln x)$

(b) *Частные производные более высокого порядка функции* $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ определяются формулами

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_k^2} \equiv f''_{x_k x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial y}{\partial x_k}, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_k} \equiv f''_{x_i x_k} \equiv \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial y}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \equiv f'''_{x_i x_j x_k} \equiv \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} \text{ и т. д.,}$$

если соответствующие пределы существуют. В каждом случае число произведенных дифференцирований есть **порядок** соответствующей частной производной. Отметим, что

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i\,\partial x_k}=\frac{\partial^2 y}{\partial x_k\,\partial x_i} \qquad (i \neq k), \tag{4.5-4}$$

если: 1) *производная* $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i\,\partial x_k}$ *существует в некоторой окрестности точки* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и непрерывна в точке* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* 2) *производная* $\frac{\partial^2 y}{\partial x_k\,\partial x_i}$ *существует в точке* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

4.5-3. Дифференциалы.

(а) *Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x и пусть dx — приращение независимого переменного x (**дифференциал** *независимого переменного* x). Функция $y=f(x)$ имеет в точке x (*первый*) *дифференциал*, если ее приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta y \equiv f(x+dx)-f(x)=A\,dx+o(dx),$$

где A не зависит от dx. В этом случае (первым) дифференциалом функции $y=f(x)$ называется **главная линейная часть** приращения функции $dy=A\,dx$. *Функция $y=f(x)$ имеет в точке x дифференциал в том и только в том случае, если она имеет в этой точке (первую) производную; ее дифференциал равен* $dy \equiv df=\frac{dy}{dx}\,dx \equiv f'(x)\,dx$. Так что

$$\Delta y \equiv f(x+dx)-f(x)=f'(x)\,dx+o(dx)=dy+o(dx).$$

Подобным же образом пусть функция $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определена в некоторой окрестности точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и пусть $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ — приращения независимых переменных (дифференциалы независимых переменных) $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Функция $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **(первый) дифференциал (полный дифференциал)**, если ее приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta y \equiv f(x_1+dx_1, x_2+dx_2, \ldots, x_n+dx_n)-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)= \\ =A_1\,dx_1+A_2\,dx_2+\ldots+A_n\,dx_n+o(\rho),$$

где $\rho=\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+\ldots+dx_n^2}$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не зависят от $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. В этом случае (первым) дифференциалом (полным дифференциалом) функции $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **главная линейная часть** приращения функции

$$dy=A_1\,dx_1+A_2\,dx_2+\ldots+A_n\,dx_n.$$

Отметим: 1) *Если функция $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференциал, то она непрерывна в этой точке и имеет в ней все частные производные первого порядка.* 2) *Если функция $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ все непрерывные частные производные первого порядка, то она имеет в этой точке (первый) дифференциал.* (Из одного факта существования всех частных производных еще не следует существования полного дифференциала.) Дифференциал функции $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если он существует, имеет вид

$$dy \equiv df=\frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n, \tag{4.5-5}$$

где производные берутся в рассматриваемой точке.

Функция $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **дифференцируема в точке** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если она имеет в этой точке (первый) дифференциал. В этом случае

$$\Delta y \equiv f(x_1+dx_1, x_2+dx_2, \ldots, x_n+dx_n)-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)= \\ =\frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n+o(\rho)=dy+o(\rho).$$

Функция $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **дифференцируема на множестве** точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если она дифференцируема в каждой точке этого множества. Функция $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **непрерывно дифференцируема** на некотором множестве, если на этом множестве все частные производные $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}$ существуют и непрерывны. Функция $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **кусочно-гладкой** в области V, если она непрерывна в V, а ее частные производные $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}$ кусочно-непрерывны в V (п. 4.4-7, с).

(b) Дифференциал каждого независимого переменного рассматривается как постоянная, так что $d^2x \equiv d(dx) \equiv d^3x \equiv d(d^2x) \equiv \ldots \equiv 0$. Дифференциал зависимого переменного есть функция от независимого переменного или переменных. **Второй, третий, ... дифференциалы** нужное число раз дифференцируемой функции находятся последовательным дифференцированием первого дифференциала, например, если x, x_1 и x_2 — независимые переменные, то

$$d^2f(x) \equiv d(df) \equiv d\left(\frac{dy}{dx}dx\right) \equiv \frac{d^2y}{dx^2}dx^2, \qquad (4.5\text{-}6)$$

$$d^2f(x_1, x_2) \equiv d(df) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_2^2, \qquad (4.5\text{-}7)$$

$$d^r f(x_1, x_2) \equiv \sum_{k=0}^{r} C_r^k \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r-k}\partial x_2^k} dx_1^{r-k} dx_2^k. \qquad (4.5\text{-}8)$$

Отметим также

$$d^2f[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)] \equiv d(df) \equiv \frac{d^2f}{dx^2}dx^2 \equiv \sum_{k=1}^{n}\left(d\left(\frac{\partial f}{\partial u_k}\right)du_k + \frac{\partial f}{\partial u_k}d^2u_k\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_k}\frac{du_i}{dx}\frac{du_k}{dx} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{d^2u_k}{dx^2}\right)dx^2. \qquad (4.5\text{-}9)$$

(c) Все функции от $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ того же порядка, что и $dx_1^{r_1} dx_2^{r_2} \ldots dx_n^{r_n}$ при $dx_1 \to 0, dx_2 \to 0, \ldots, dx_n \to 0$, суть бесконечно малые порядка $r_1 + r_2 + \ldots + r_n$ (п. 4.4-3). В частности, r-й дифференциал $d^r f$ функции $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, если он существует и не равен нулю в данной точке, есть **бесконечно малая порядка** r.

4.5-4. Правила дифференцирования. В табл. 4.5-2 перечислены наиболее важные правила дифференцирования. Формулы из табл. 4.5-2, a и b применимы и при вычислении частных производных, если в каждом случае вместо $\frac{d}{dx}$ писать $\frac{\partial}{\partial x}$. Так, если

$$u_i = u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

то

$$\frac{\partial}{\partial x_k}f(u_1, u_2, \ldots, u_m) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (4.5\text{-}10)$$

Умножая каждую формулу из табл. 4.5-2, a и b на dx или на dx^2, получаем аналогичные правила для вычисления *полных дифференциалов* (см. также п.4.5-3); так,

$$d(u+v) = du + dv, \quad d(uv) = v\,du + u\,dv. \qquad (4.5\text{-}11)$$

Правила дифференцирования интегралов указаны в табл. 4.6-1, а дифференцирования бесконечных рядов — в п. 4.8-4, с.

Таблица 4.5-2

Правила дифференцирования

(п. 4.5-4; в каждом случае существование соответствующих производных предполагается)

(a) Основные правила *):

$$\frac{d}{dx} f[u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)] = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m}\frac{du_m}{dx},$$

$$\frac{d}{dx} f[u(x)] = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2}{dx^2} f[u(x)] = \frac{d^2f}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{df}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}.$$

(b) Сумма, произведение и частное. Логарифмическое дифференцирование:

$$\frac{d}{dx}[u(x) + v(x)] = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}, \quad \frac{d}{dx}[\alpha u(x)] = \alpha\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}[u(x)\, v(x)] = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}, \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{1}{v^2}\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right) \quad [v(x) \neq 0],$$

$$\frac{d}{dx}\ln y(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}.$$

Замечание. Чтобы продифференцировать функцию вида $y = \frac{u_1(x)\, u_2(x) \dots}{v_1(x)\, v_2(x) \dots}$, может оказаться полезным найти сначала ее логарифмическую производную.

$$\frac{d^r}{dx^r}(\alpha u + \beta v) = \alpha\frac{d^r u}{dx^r} + \beta\frac{d^r v}{dx^r}, \quad \frac{d^r}{dx^r}(uv) = \sum_{k=0}^{r} C_r^k \frac{d^{r-k}u}{dx^{r-k}}\frac{d^k v}{dx^k}.$$

(c) Обратная функция. Если функция $y = y(x)$ имеет обратную функцию $x = x(y)$**) и $\frac{dy}{dx} \equiv y'_x \neq 0$, то

$$\frac{dx}{dy} \equiv x'_y = \frac{1}{y'_x}, \qquad x''_y = -\frac{y''_x}{(y'_x)^3}.$$

(d) Неявная функция (см. также п. 4.5-7). Если функция задана неявно должным образом дифференцируемым соотношением $F(x,y) = 0$, где $F'_y \neq 0$, то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{F'^3_y}\left(F''_{xx}F'^2_y - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}F'^2_x\right).$$

(e) Функция, заданная с помощью параметра t. Если даны $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt} \neq 0$, $\dot{y}(t) \equiv \frac{dy}{dt}$, $\ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$, $\ddot{y}(t) \equiv \frac{d^2y}{dt^2}$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}(t)\,\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\,\dot{y}(t)}{[\dot{x}(t)]^3}.$$

*) В первой формуле (a) при $m > 1$ следует предполагать дифференцируемость функции $f(u_1, u_2, \dots, u_m)$ в соответствующей точке, для чего достаточно непрерывности в этой точке всех ее первых частных производных: см. п. 4.5-3.

**) Если функция $y(x)$ на интервале $a \leqslant x \leqslant b$ строго монотонна и непрерывна, то на замкнутом интервале с концами $y(a)$ и $y(b)$ она имеет обратную функцию $x(y)$, также непрерывную. Если, кроме того, функция $y(x)$ в точке x_0, где $a < x_0 < b$, имеет производную $y'(x_0) \neq 0$, то функция $x(y)$ в соответствующей точке $y_0 = y(x_0)$ также имеет производную и справедлива первая из нижеследующих формул. Если функция $y(x)$ имеет вторую производную, то имеет место и вторая из этих формул.

4.5-5. Однородные функции. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть **однородная функция** степени r относительно аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$, если $f(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \equiv \alpha^r f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (см. также п. 1.4-3, а). Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — непрерывно дифференцируемая однородная функция степени r, то

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = r f(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (4.5\text{-}12)$$

(*теорема Эйлера об однородных функциях*).

4.5-6. Якобианы и функциональная зависимость (см. также пп. 4.6-12, 6.2-3, b и 16.1-2). Если функции

$$y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (4.5\text{-}13)$$

непрерывно дифференцируемы в некоторой области n-мерного пространства и если **якобиан** или **функциональный определитель**

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv \det\left[\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right] \qquad (4.5\text{-}14)$$

отличен в ней от нуля, то **уравнения преобразования** (13) (см. также п. 14.1-3) в достаточно малой окрестности каждой точки области определяют взаимно однозначное соответствие этой окрестности и множества точек $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, образованных значениями функций (13), принимаемыми в этой окрестности. Если дифференциалы

$$dy_i \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} dx_k \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (4.5\text{-}15)$$

линейно зависимы в данной области (п. 1.9-3), то якобиан (14) в этой области тождественно равен нулю. Если в V нет точки, в которой все элементы якобиана (14) одновременно обращаются в нуль, то *якобиан* (14) *тождественно равен нулю в области V в том и только в том случае, когда у каждой точки этой области существует такая окрестность, в которой функции y_i связаны некоторым непрерывно дифференцируемым соотношением $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$, где производные $\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}$ не все одновременно равны нулю.* В этом случае говорят, что функции (13) **функционально зависимы** в этой окрестности (см. также п. 4.5-7, с).

4.5-7. Неявные функции.

(а) Если функция $y = y(x)$ задана неявно должным образом дифференцируемым соотношением $F(x, y) = 0$, то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{F'^3_y}\left(F''_{xx} F'^2_y - 2F''_{xy} F'_x F'_y + F''_{yy} F'^2_x\right) \quad (F'_y \neq 0). \qquad (4.5\text{-}16)$$

(b) Если m функций $y_1 = y_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y_2 = y_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\dots$, $y_m = y_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ заданы неявно m соотношениями

$$F_i(y_1, y_2, \dots, y_m; x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \qquad (4.5\text{-}17)$$

где F_i — непрерывно дифференцируемые функции в рассматриваемой области, то

1. Дифференциалы dy_j и dx_i связаны m линейными уравнениями $dF_i = 0$.

2. Для каждого значения $k = 1, 2, \dots, n$ все m производных $\frac{\partial y_j}{\partial x_k}$ могут быть получены по правилу Крамера (п. 1.9-2) из m линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \qquad (4.5\text{-}18)$$

если только

$$\frac{\partial (F_1, F_2, \ldots, F_m)}{\partial (y_1, y_2, \ldots, y_m)} \equiv \det\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right] \neq 0 \qquad (4.5\text{-}19)$$

для рассматриваемых значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Дифференцируя уравнения (18), получаем соотношения, дающие производные более высокого порядка функций y_j.

В частности, два непрерывно дифференцируемых соотношения $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$ дают

$$dx : dy : dz = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}. \qquad (4.5\text{-}20)$$

✱ Если, например, первый из определителей справа отличен от нуля, то данные соотношения определяют y и z как функции от x (см. (с)) и уравнения (20) позволяют найти производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$. ✱

(с) Теорема существования неявных функций (см. также п. 4.2-1, b). Пусть дана точка $P \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m)$, в которой выполняются соотношения (17) и (19). *Если все F_i и $\partial F_i/\partial y_j$ непрерывны в некоторой окрестности D точки P, то m соотношений* (17) *в некоторой окрестности точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяют y_j как непрерывные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если, кроме того, в D непрерывны и все производные $\partial F_i/\partial x_k$, то в указанной окрестности точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существуют и непрерывны производные $\partial y_j/\partial x_k$.* Если якобиан (19) в D тождественно равен нулю, то левые части соотношений (17) в некоторой окрестности точки P функционально зависимы (п. 4.5-6), так что y_j не определены однозначно.

4.6. ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

4.6-1. ✱ Определенные интегралы (интеграл Римана).

(а) Пусть действительная функция $f(x)$ определена и ограничена на ограниченном замкнутом интервале $[a, b]$. Разобьем этот интервал на n частичных интервалов точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Выберем в каждом из частичных интервалов по произвольной точке ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$ и составим сумму (*интегральная сумма*) $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Если существует предел интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала разбиения: $\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$, *то функция $f(x)$ называется* **интегрируемой в смысле Римана** *на интервале* $[a, b]$. Предел этой суммы

$$I = \lim_{\max(x_i - x_{i-1}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad (4.6\text{-}1)$$

называется **определенным интегралом** от $f(x)$ **по интервалу** $[a, b]$ **в смысле Римана (интеграл Римана)**. Это определение означает, что для любого положительного числа ε существует такое число $\delta > 0$, что при любом разбиении интервала $[a, b]$ на частичные интервалы, длины которых меньше δ:

$$\max(x_i - x_{i-1}) < \delta,$$

и при любом выборе промежуточных точек ξ_i выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а a и b — *пределами интегрирования*. В табл. 4.6-1 перечислены важнейшие свойства определенных интегралов.

Таблица 4.6-1

Свойства интегралов

(a) **Элементарные свойства.** *Если интегралы существуют, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\ ^{*)},\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b [u(x)+v(x)]\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + \int_a^b v(x)\,dx,\qquad \int_a^b \alpha\, u(x)\,dx = \alpha\int_a^b u(x)\,dx.$$

(b) **Интегрирование по частям.** *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на интервале $a \leqslant x \leqslant b$, то*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx$$

или

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

(c) ✳ **Замена переменного (интегрирование подстановкой).** *Если функция $x = x(u)$ непрерывно дифференцируема на интервале $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$, а функция $f(x)$ непрерывна на интервале $m \leqslant x \leqslant M$, где m — точная нижняя, а M — точная верхняя граница функции $x(u)$ на интервале $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$, то*

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[x(u)]\frac{dx}{du}\,du.$$

(d) ✳ **Дифференцирование по параметру.** *Если функция $f(x, \lambda)$ и ее частная производная $\frac{\partial}{\partial\lambda} f(x, \lambda)$ непрерывны на множестве $a \leqslant x \leqslant b$, $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$, а функции $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ дифференцируемы на интервале $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$ и удовлетворяют на нем условиям $a \leqslant u(\lambda) \leqslant b$, $a \leqslant v(\lambda) \leqslant b$, то при $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$*

$$\frac{d}{d\lambda}\int_a^b f(x, \lambda)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\lambda} f(x, \lambda)\,dx,$$

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} f(x, \lambda)\,dx = \int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} \frac{\partial}{\partial\lambda} f(x, \lambda)\,dx + f(v(\lambda), \lambda)\frac{dv}{d\lambda} - f(u(\lambda), \lambda)\frac{du}{d\lambda}$$

(правило Лейбница).

Первая формула остается в силе и для несобственных интегралов, если предположить, что интеграл $\int_a^b f(x, \lambda)\,dx$ сходится, а интеграл $\int_a^b \frac{\partial}{\partial\lambda} f(x, \lambda)\,dx$ равномерно сходится на интервале $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$. (При этом функция $f(x, \lambda)$ и ее производная $\frac{\partial}{\partial\lambda} f(x, \lambda)$ предполагаются непрерывными лишь на множестве $a \leqslant x < b$, $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$ или на множестве $a < x \leqslant b$, $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$.)

---

*) Это равенство следует рассматривать как определение интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ при $b \leqslant a$. Из него также вытекает, что $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Таблица 4.6-1 (*продолжение*)

Второй случай часто можно свести к первому подходящей заменой переменных. Отметим также, что

$$\frac{d}{d\lambda}\int_a^\lambda f(x, \lambda)\,dx = \frac{1}{\lambda - a}\int_a^\lambda \left[f(x, \lambda) + (\lambda - a)\frac{\partial f}{\partial \lambda} + (x - a)\frac{\partial f}{\partial x}\right] dx.$$

(e) **Неравенства** (см. также п. 4.6-19). *Если интегралы существуют, то* (*при* $a < b$)

из $f(x) \leqslant g(x)$ *на* $[a, b]$ *следует*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Если $|f(x)| \leqslant M$ *на ограниченном интервале* $[a, b]$, *то из существования интеграла* $\int_a^b f(x)\,dx$ *вытекает и существование интеграла* $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *и*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant M(b - a).$$

Если функция $y = f(x)$ на интервале $[a, b]$ неотрицательна, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ выражает *площадь*, ограниченную кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$. Если $f(x) \leqslant 0$, то интеграл выражает эту площадь, взятую со знаком минус.

(b) *Функция* $f(x)$, *ограниченная на ограниченном замкнутом интервале* $[a, b]$, *интегрируема на нем в смысле Римана в том и только в том случае, если она непрерывна почти всюду на* $[a, b]$ (п. 4.6-14, b). Это, в частности, верно: 1) *если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$; 2) *если функция* $f(x)$ *ограничена на* $[a, b]$ *и имеет на* $[a, b]$ *конечное или счетное множество точек разрыва*; 3) *если функция* $f(x)$ *монотонна на* $[a, b]$; 4) *если* $f(x)$ *есть функция ограниченной вариации на* $[a, b]$ (см. также п. 4.4-8). *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на* $[a, b]$, *то она интегрируема и на каждом интервале, содержащемся в* $[a, b]$.

4.6-2. Несобственные интегралы

(a) Если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на каждом ограниченном интервале, содержащемся в (a, b), то понятие определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ (п. 4.6-1) можно расширить так, что оно станет применимым и когда

1. Функция $f(x)$ не ограничена в любой окрестности одного из пределов интегрирования a или b (см. также п. 4.6-2, b).
2. Интервал (a, b) не ограничен.

Так, если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на каждом конечном интервале $[a, X]$, где $a < X < b$, то *по определению* полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{X \to b-0}\int_a^X f(x)\,dx \qquad (4.6\text{-}2a)$$

и, в частности, при $b = +\infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{X \to +\infty}\int_a^X f(x)\,dx. \qquad (4.6\text{-}2b)$$

Точно так же

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{X \to a+0}\int_X^b f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{X \to -\infty}\int_X^b f(x)\,dx. \qquad (4.6\text{-}2c)$$

Каждый несобственный интеграл, определенный таким образом, существует или **сходится**, если существует предел в правой части равенства. Несобственный интеграл от функции $f(x)$ **сходится абсолютно**, если сходится соответствующий несобственный интеграл от $|f(x)|$. *Из абсолютной сходимости следует сходимость* (см. также пп. 4.6-15, e и 4.9-3). Несобственный интеграл, который сходится, но не абсолютно, называется **условно сходящимся**.

(b) ✶ *Правила интегрирования из табл.* 4.6-1 *применимы к должным образом сходящимся несобственным интегралам.* Если функция $f(x)$ определена в ограниченном или неограниченном интервале (a, b) или $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек $a \leqslant c_1 < c_2 < \ldots < c_n \leqslant b$, не ограничена в любой окрестности u_i каждой точки $x = c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а вне объединения окрестностей $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ограничена, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ можно определить как сумму несобственных интегралов вида (2).

Например, если $c_1 = a$ и $c_2 = b$ и пределы в правой части равенства существуют, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{X_1 \to a+0} \int_{X_1}^{d} f(x)\,dx + \lim_{X_2 \to b-0} \int_d^{X_2} f(x)\,dx, \tag{4.6-3}$$

где d — произвольная точка интервала (a, b).

Если $a = -\infty$ и $b = +\infty$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{X_1 \to -\infty} \int_{X_1}^{d} f(x)\,dx + \lim_{X_2 \to +\infty} \int_d^{X_2} f(x)\,dx. \tag{4.6-4}$$

Если $f(x)$ не ограничена в окрестности точки c, лежащей внутри интервала (a, b), то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{X_1 \to c-0} \int_a^{X_1} f(x)\,dx + \lim_{X_2 \to c+0} \int_{X_2}^{b} f(x)\,dx \qquad (a < c < b). \tag{4.6-5}$$

В случае, если интегралы (4) и (5) не существуют, могут все же существовать соответствующие **главные значения интеграла по Коши**

$$\lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{X} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \lim_{\delta \to +0} \left[\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx \right]; \tag{4.6-6}$$

если какой-либо из интегралов (4) и (5) существует, он необходимо равен своему главному значению.

(c) Несобственный интеграл $\int_a^b f(x, y)\,dx$ **равномерно сходится на множестве S значений y**, если соответствующий определенный интеграл сходится к своему пределу (пп. 4.6-2, а и b) равномерно на S (п. 4.4-4). *Если* $\int_a^b f(x, y)\,dx$ *при каждом y из интервала $y_0 < y < y_1$ есть интеграл вида* (2а) *и если функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $a \leqslant x < b$, $y_0 < y < y_1$, а интеграл $\int_a^b f(x, y)\,dx$ равномерно сходится в интервале $y_0 < y < y_1$, то $\int_a^b f(x, y)\,dx$ есть непрерывная функция от y в этом интервале* (теорема о непрерывности). Аналогичные теоремы верны и для интегралов вида (2b) и (2c).

(d) Признаки сходимости и равномерной сходимости перечислены в пп.4.9-3 и 4.9-4.

4.6-3. Среднее значение. Среднее значение функции $f(x)$ на интервалах $[a, b]$, $[0, +\infty)$ и $(-\infty, +\infty)$ по определению соответственно равно

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\int_0^X f(x)\,dx \quad\text{и}\quad \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{2X}\int_{-X}^X f(x)\,dx, \tag{4.6-7}$$

если эти величины существуют.

4.6-4. Неопределенные интегралы. Функция $f(x)$ имеет в интервале $[a, b]$ **неопределенный интеграл** $\int f(x)\,dx$, если существует такая функция $F(x)$, что $F'(x)=f(x)$ на $[a, b]$. В этом случае функция $F(x)$ однозначно определена в $[a, b]$ с точностью до произвольной аддитивной постоянной C (**постоянной интегрирования**); любая такая функция $F(x)$ называется **первообразной (примитивной)** функции $f(x)$ на $[a, b]$. Полагают

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \qquad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{4.6-8}$$

Заметим, что разность $F(x)-F(a)\equiv F(x)\Big|_a^x$ при $a\leqslant x\leqslant b$ определена однозначно.

Отметим также, что

$$\int [\alpha u(x)+\beta v(x)]\,dx \equiv \alpha\int u(x)\,dx+\beta\int v(x)\,dx, \tag{4.6-9}$$

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx \equiv u(x)\,v(x)-\int u'(x)\,v(x)\,dx, \tag{4.6-10}$$

если эти неопределенные интегралы существуют (см. также табл. 4.5-2 и 4.6-1).

4.6-5. Основная теорема интегрального исчисления. *Если $f(x)$ — функция, ограниченная и интегрируемая на интервале $[a, b]$, и если существует первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ на $[a, b]$, то*

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi = F(x)\Big|_a^x = F(x)-F(a) \qquad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{4.6-11}$$

В частности, *это верно, если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. При этом*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(\xi)\,d\xi = f(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{4.6-12}$$

Более общее утверждение: *если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на $[a, b]$, то интеграл $\int_a^x f(\xi)\,d\xi$ является функцией ограниченной вариации на $[a, b]$, и для почти всех x из $[a, b]$* (п.4.6-14, b) *имеет место равенство* (12).

Замечание. Основная теорема интегрального исчисления дает возможность вычислять определенные интегралы, обращая процесс дифференцирования.

4.6-6. Методы интегрирования.

(а) **Интегрирование** есть операция отыскания (определенного или неопределенного) интеграла от данной подынтегральной функции $f(x)$. Определенные интегралы можно вычислять непосредственно как пределы интегральных сумм (численное интегрирование, пп.20.6-2 и 20.6-3) или путем вычисления вычетов (п.7.7-3). Чаще пытаются найти неопределенный интеграл и затем пользуются формулой (11). Чтобы найти неопределенный интеграл, данную подынтегральную функцию $f(x)$ нужно с помощью «правил интегрирования», перечисленных в табл. 4.6-1, a, b, c, представить в виде суммы известных производных.

В дальнейшем перечисляются методы интегрирования, применимые к некоторым специальным типам подынтегральных функций. Существуют разной

степени полноты таблицы определенных и неопределенных интегралов (см., например, [4.6]).

(b) Интегрирование многочленов:

$$\int (a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \ldots + a_0x^n)\,dx =$$
$$= a_nx + \frac{1}{2}a_{n-1}x^2 + \frac{1}{3}a_{n-2}x^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}a_0x^{n+1} + C. \qquad (4.6\text{-}13)$$

(c) Интегрирование рациональных функций. Методы, описанные в пп.1.7-2 и 1.7-4, сводят интегрирование каждой рациональной функции к интегрированию суммы многочлена (п.4.6-6, b) и некоторого числа *элементарных дробей* (1.7-5) и/или (1.7-6). Элементарные дроби последовательно интегрируются с помощью следующих формул:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{(x-x_1)^m} = \begin{cases} -\dfrac{1}{(m-1)(x-x_1)^{m-1}} + C & (m \neq 1), \\ \ln|x-x_1| + C & (m=1); \end{cases} \\
&\int \frac{dx}{[(x-a)^2+\omega^2]} = \frac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{x-a}{\omega} + C; \\
&\int \frac{dx}{[(x-a)^2+\omega^2]^{m+1}} = \\
&\quad = \frac{x-a}{2m\omega^2[(x-a)^2+\omega^2]^m} + \frac{2m-1}{2m\omega^2}\int \frac{dx}{[(x-a)^2+\omega^2]^m}; \\
&\int \frac{x\,dx}{[(x-a)^2+\omega^2]^{m+1}} = \\
&\quad = \frac{a(x-a)-\omega^2}{2m\omega^2[(x-a)^2+\omega^2]^m} + \frac{(2m-1)a}{2m\omega^2}\int \frac{dx}{[(x-a)^2+\omega^2]^m}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.6\text{-}14)$$

(d) Функции, интегрирование которых с помощью замены переменных сводится к интегрированию рациональных функций.

1. *Если подынтегральная функция $f(x)$ есть рациональная функция от* $\sin x$ и $\cos x$, то полагают $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, так что

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad dx = \frac{2\,du}{1+u^2}. \qquad (4.6\text{-}15)$$

2. *Если подынтегральная функция $f(x)$ есть рациональная функция от* $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$, то полагают $u = \operatorname{th}\frac{x}{2}$, так что

$$\operatorname{sh} x = \frac{2u}{1-u^2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \qquad dx = \frac{2\,du}{1-u^2}. \qquad (4.6\text{-}16)$$

Замечание. Если $f(x)$ — рациональная функция от $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin x \cos x$ и $\operatorname{tg} x$ (или от соответствующих гиперболических функций), то вычисления упростятся, если сделать замену $u = \operatorname{tg} x$ (или $u = \operatorname{th} x$).

3. *Если подынтегральная функция $f(x)$ есть рациональная функция от x и либо от $\sqrt{1-x^2}$, либо от $\sqrt{x^2-1}$*, либо от $\sqrt{x^2+1}$, то задача сведется к случаю 1 или 2, если соответственно сделать подстановку $x = \cos v$, или $x = \operatorname{ch} v$, или $x = \operatorname{sh} v$.

4. *Если подынтегральная функция $f(x)$ есть рациональная функция от x и либо от $\sqrt{x^2+1}$, либо от $\sqrt{x^2-1}$*, то можно положить соответственно $u = x + \sqrt{x^2 \pm 1}$; тогда

$$x = \frac{1}{2}\left(u \mp \frac{1}{u}\right), \qquad \sqrt{x^2 \pm 1} = \frac{1}{2}\left(u \pm \frac{1}{u}\right), \qquad dx = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{u^2}\right)du. \qquad (4.6\text{-}17)$$

5. *Если подынтегральная функция $f(x)$ есть рациональная функция от x и от $\sqrt{ax^2+bx+c}$,* то задача сведется к случаю 3 (или 4), если сделать подстановку

$$v=\frac{2ax+b}{\sqrt{|4ac-b^2|}}, \quad x=\frac{v\sqrt{|4ac-b^2|}-b}{2a}. \tag{4.6-18}$$

6. *Если подынтегральная функция $f(x)$ есть рациональная функция от x и от $u=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, причем $ad-bc\neq 0$,* то в качестве новой переменной берут u.

7. *Если подынтегральная функция $f(x)$ есть рациональная функция от x, $\sqrt{ax+b}$ и $\sqrt{cx+d}$,* где $a\neq 0$, то в качестве новой переменной берут $u=\sqrt{ax+b}$.

В различных специальных случаях применяют многочисленные другие подстановки.

(e) Интегралы от функций вида

$$x^n e^{ax}, \quad x^n \ln x, \quad x^n \sin x, \quad x^n \cos x \quad (n\neq -1);$$
$$\sin^n x \cos^m x \quad (n+m\neq 0), \quad e^{ax}\sin^n x, \quad e^{ax}\cos^n x$$

вычисляют с помощью *интегрирования по частям* (табл. 4.6-1, b), применяя его, если нужно, несколько раз.

(f) Многие интегралы нельзя выразить в виде конечных сумм, содержащих только алгебраические, показательные и тригонометрические функции и функции, им обратные. В этом случае подынтегральную функцию можно разложить в бесконечный ряд (пп. 4.10-4, 4.11-4, 15.2-6) или же прибегнуть к численному интегрированию. В гл. 21 можно найти примеры «новых» функций от x, определяемых как интегралы вида $\int_a^x f(\xi)\,d\xi$ или $\int_a^b f(x, \eta)\,d\eta$.

4.6-7. Эллиптические интегралы. Если $f(x)$ — рациональная функция от x и от $\sqrt{a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4}$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ называется **эллиптическим интегралом**; можно исключить тривиальный случай, когда уравнение

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$$

имеет кратные корни. *Каждый эллиптический интеграл можно выразить через элементарные функции и нормальные эллиптические интегралы* (п. 21.6-5); значения последних приведены в таблицах.

4.6-8. Кратные интегралы (см. также пп. 4.6-11, 4.6-12 и 4.6-13).

(a) Пусть функция $f(x, y)$ кусочно-непрерывна (п. 4.4-7) в ограниченной замкнутой области D, определяемой как условиями $a\leqslant x\leqslant b$, $g_1(x)\leqslant y\leqslant g_2(x)$, так и условиями $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$, $\gamma_1(y)\leqslant x\leqslant\gamma_2(y)$, где $g_1(x)$, $g_2(x)$, $\gamma_1(y)$, $\gamma_2(y)$ — кусочно-непрерывные функции в указанных интервалах. Тогда

$$\int_\alpha^\beta dy\int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} f(x, y)\,dx \equiv \int_\alpha^\beta\left[\int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} f(x, y)\,dx\right]dy=\int_a^b dx\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy =$$
$$=\iint_D f(x, y)\,dx\,dy. \tag{4.6-19}$$

Аналогичные теоремы справедливы для тройных, четырехкратных и т. д. интегралов.

Пример. *Если D — область, ограниченная окружностью $x^2+y^2=1$, и функция $f(x, y)=c$ постоянна, то*

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=4\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} c\,dy=4c\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\pi c.$$

(b) *Если функция* $f(x, y)$ *непрерывна на множестве* $a \leqslant x < +\infty$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, *и интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ *равномерно сходится на интервале* $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, *то*

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy. \qquad (4.6\text{-}20)$$

Аналогичные теоремы верны для несобственных интегралов других типов.

4.6-9. * Длина дуги спрямляемой кривой (см. также пп. 6.2-3, 6.4-3 и 17.2-1). Пусть C — дуга непрерывной кривой, лежащая в конечной части плоскости или пространства. *Длиной* $s(C)$ *этой дуги называется предел длины ломаной, вписанной в эту дугу, при условии, что длина наибольшего звена этой ломаной стремится к нулю.* Если указанный предел существует, то дуга называется **спрямляемой.**

Для регулярной кривой на евклидовой плоскости или в евклидовом пространстве, описываемой в *прямоугольных декартовых координатах* уравнениями

$$\left.\begin{array}{llll} x = x(t), & y = y(t) & & \text{на плоскости} \\ x = x(t), & y = y(t), & z = z(t) & \text{в пространстве} \end{array}\right\} \qquad (4.6\text{-}21)$$

или (в среднем столбце: «или» относится ко второй строке)

(п. 3.1-13), длина бесконечно малой дуги, соответствующей промежутку $[t, t+dt]$, есть *элемент дуги*

$$ds \equiv \left\{\begin{array}{l} \sqrt{dx^2+dy^2} \equiv \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \equiv \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \equiv \frac{ds}{dt}\,dt \\ \qquad\qquad \text{на плоскости,} \\ \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} \equiv \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \equiv \frac{ds}{dt}\,dt \\ \qquad\qquad \text{в пространстве.} \end{array}\right\} \qquad (4.6\text{-}22)$$

Знак корня выбирается обычно так, чтобы производная $s'(t)$ была $\geqslant 0$. Длина дуги $s(C)$ кривой, соответствующей конечному интервалу $[t_0, t]$, равна

$$s = s(C) = \int_C ds = \int_{t_0}^t \frac{ds}{dt}\,dt = s(t). \qquad (4.6\text{-}23)$$

Длина дуги $s(C)$ есть геометрический объект, не зависящий от системы координат и от выбранного для описания кривой параметра t. В пп. 6.2-3 и 6.4-3 приведены формулы, выражающие ds (а значит, и $s'(t)$) в криволинейных координатах.

Длина дуги $s(C)$ *существует, если функции* (21) *являются на* $[t_0, t]$ *функциями ограниченной вариации; в этом случае элемент* ds *определен почти всюду* (*п.* 4.6-14, b) *на* C. *Каждая регулярная кривая спрямляема.*

4.6-10. Криволинейные интегралы (см. также пп. 5.4-5, 6.2-3 и 6.4-3, где введены векторные обозначения и используются криволинейные координаты). Для данной спрямляемой дуги C, описываемой при $a \leqslant t \leqslant b$ уравнениями (21), **криволинейный интеграл** $\int_C f(x, y, z)\,ds$ от ограниченной функции $f(x, y, z)$ по определению равен

$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^m f[x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)]\,\Delta s_i,$$

где

$$\Delta s_i = \sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2+[z(t_i)-z(t_{i-1})]^2}$$

$$(a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = b; \quad t_{i-1} \leqslant \tau_i \leqslant t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m), \qquad (4.6\text{-}24a)$$

если предел существует (см. также п. 4.6-1). Криволинейный интеграл (24*a*) можно вычислить (или непосредственно определить) как интеграл по t:

$$\int\limits_C f(x,\ y,\ z)\,ds = \int\limits_a^b f[x(t),\ y(t),\ z(t)]\,\frac{ds}{dt}\,dt, \tag{4.6-24b}$$

где элемент дуги ds находится из (22). Опуская в (24) члены, относящиеся к z, получаем криволинейный интеграл для кривой, расположенной на плоскости Oxy. Несобственные криволинейные интегралы определяются по способу п. 4.6-2.

4.6-11. Площади и объемы (см. также пп. 5.4-6, 5.4-7, 6.2-3, 6.4-3 и 17.3-3, где введены векторные обозначения и используются криволинейные координаты).

(а) Пусть S — ограниченная замкнутая область на евклидовой плоскости. Если точная верхняя граница множества площадей всех многоугольников, содержащихся в S, и точная нижняя граница множества площадей всех многоугольников, содержащих S, равны, то область S называется **квадрируемой (измеримой по Жордану)**, а общее значение этих границ называется **площадью** A области S. В частности, *область S ограниченная простой замкнутой регулярной кривой, квадрируема*. Объем U ограниченной замкнутой области V в трехмерном евклидовом пространстве определяется аналогично.

Площадь A ограниченной регулярной поверхности S (п. 3.1-14) определяется следующим образом. Разобьем S на конечное число частей; в каждой части выберем по произвольной точке и ортогонально спроектируем эту часть на касательную плоскость к поверхности в выбранной точке (п. 17.3-2). Площадь поверхности A есть предел (если он существует) суммы площадей полученных таким образом проекций, когда диаметр наибольшей из рассматриваемых частей стремится к нулю.

⁎ **Диаметром** множества E в метрическом пространстве C (п. 12.5-2), в частности, в евклидовом пространстве, называется точная верхняя граница расстояний между любыми двумя точками множества E. ⁎

(b) Площади и объемы можно вычислять (или даже непосредственно определять) как двойные или тройные интегралы в соответствующих координатах:

$$A = \int\limits_S dA = \iint\limits_S dx\,dy \quad \text{в евклидовой плоскости,} \tag{4.6-25}$$

$$U = \int\limits_V dv = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz \quad \text{в евклидовом пространстве.} \tag{4.6-26}$$

Площади и объемы не зависят от выбора системы координат. В криволинейных координатах x^1, x^2, x^3 (п. 6.2-1) [1])

$$U = \int\limits_V dV = \iiint\limits_V \frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(x^1,\ x^2,\ x^3)}\,dx^1\,dx^2\,dx^3 \tag{4.6-27}$$

(см. также пп. 4.6-13, 6.2-3 и 6.4-3).

В криволинейных координатах u, v на плоскости или поверхности (п. 3.1-14)

$$A = \int\limits_S dA = \iint\limits_S \sqrt{a(u\ v)}\,du\,dv, \tag{4.6-28}$$

где $a(u,\ v)$ — функция, определяемая в п. 17.3-3, с.

(с) Простые частные случаи. Площадь плоской области, ограниченной прямыми $x = a$ и $x = b$, где $a < b$, и двумя кривыми $y = g_1(x)$ и $y = g_2(x)$, причем $g_1(x) \leqslant g_2(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, равна $\int\limits_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\,dx$ $(A > 0)$. Площадь плоской

[1]) Здесь 1, 2, 3 — не показатели степени, а индексы.

области, ограниченной простой замкнутой кривой C, описываемой уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ или уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi)$ (п. 2.1-8), где функции удовлетворяют должным условиям, равна

$$A = \frac{1}{2} \oint\limits_C \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt \text{ или } A = \frac{1}{2} \int\limits_C r^2(\varphi)\, d\varphi, \tag{4.6-29}$$

где символ $\oint$ указывает, что интегрирование производится по замкнутой кривой; $A > 0$, если обход кривой C совершается против часовой стрелки.

Площадь поверхности A, образованной *вращением* кривой $y = f(x) \geqslant 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ вокруг оси Ox, и объем U, ограниченный этой поверхностью, равны

$$A = 2\pi \int\limits_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \quad U = \pi \int\limits_a^b [f(x)]^2\, dx. \tag{4.6-30}$$

4.6-12. Интегралы по поверхности и по объему (см. также пп. 5.4-6, 5.4-7, 6.2-3 и 6.4-3, где введены векторные обозначения и рассматриваются криволинейные координаты). Интегралы по поверхности и интегралы по объему можно определить как пределы сумм по способу пп. 4.6-1 и 4.6-10. Их можно также ввести непосредственно как двойные и тройные интегралы с помощью элементов площади и объема, определенных в п. 4.6-11.

Интеграл по поверхности от кусочно-непрерывной функции $f(u, v)$ по удовлетворяющей должным условиям поверхности S с криволинейными координатами u, v равен

$$\int\limits_S f(u, v)\, dA = \iint\limits_S f(u, v) \sqrt{a(u, v)}\, du\, dv. \tag{4.6-31}$$

Сюда в качестве частных случаев входят и интегралы по плоским областям (где, в частности, возможен и случай $u = x$, $v = y$, $\sqrt{a(u, v)} \equiv 1$).

Интеграл по объему от кусочно-непрерывной функции

$$f(x, y, z) = f[x(x^1, x^2, x^3), y(x^1, x^2, x^3), z(x^1, x^2, x^3)]$$

по ограниченной области V равен

$$\int\limits_V f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\equiv \iiint\limits_V f[x(x^1, x^2, x^3), y(x^1, x^2, x^3), z(x^1, x^2, x^3)] \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^1, x^2, x^3)}\, dx^1\, dx^2\, dx^3. \tag{4.6-32}$$

Несобственные интегралы по поверхности или по объему (неограниченные функции или области) определяются по способу п. 4.6-2.

Формулы, связывающие интегралы по поверхности и интегралы по объему, рассматриваются в пп. 5.6-1 и 5.6-2. Отметим частные случаи этих формул, связывающие криволинейные интегралы и интегралы по плоской области (C — граница области S; обход C совершается против часовой стрелки):

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_S \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right] dA = \oint\limits_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(формула Грина)}, \\ &\int\limits_S (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\, dA = \oint\limits_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(двумерная 2-я формула Грина)}, \end{aligned}\right\} \tag{4.6-33}$$

где

$$\nabla^2 v(x, y) \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial n}\, ds \equiv \frac{\partial v}{\partial x}\, dy - \frac{\partial v}{\partial y}\, dx.$$

4.6-13. Замена переменных в интегралах по объему и по поверхности. Если с помощью непрерывно дифференцируемого преобразования координат

$$x^1 = x^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3), \quad x^2 = x^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3), \quad x^3 = x^3(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3),$$

$$\left[\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)} \neq 0\right]$$

ввести новые координаты $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3$ (см. также п. 6.2-1), то интеграл по объему (32) можно переписать в новых координатах:

$$\int\limits_V f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_V \varphi(x^1, x^2, x^3)\, dx^1 dx^2 dx^3 =$$

$$= \iiint\limits_V \varphi(x^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3),\ x^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3),\ x^3(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)) \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)}\, d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 d\bar{x}^3. \quad (4.6\text{-}34)$$

Интегралы по поверхности преобразуются аналогично (см. также п. 17.3-3).

4.6-14. Мера Лебега. Измеримые функции.

(а) Мера точечного множества. **Внешняя мера Лебега** $m_e(S)$ произвольного ограниченного точечного множества S на прямой есть точная нижняя граница (п. 4.3-3) суммы длин конечного или счетного множества интервалов, покрывающих S. **Внутренняя мера Лебега** $m_i[S]$ множества S есть разность между длиной $b-a$ любого ограниченного интервала $[a, b]$, содержащего S, и внешней мерой дополнения множества S до $[a, b]$ (п. 4.3-2, а). S есть **измеримое множество с мерой Лебега** $m[S]$, если $m_e[S] = m_i[S] = m[S]$ (*конструктивное определение меры Лебега*). *Неограниченное* множество S на прямой измеримо, если для всех $X > 0$ измеримо пересечение $(-X, X) \cap S$. При этих предположениях по определению полагают

$$m[S] = \lim_{X \to +\infty} m[(-X, X) \cap S];$$

мера $m[S]$ может быть как конечной, так и бесконечной.

Рассматривают и более общее определение: **мера** $M[S]$, определенная на подходящем классе (вполне аддитивной булевой алгебре, п. 12.8-4) точечных множеств S, есть функция множества со свойствами

$$M[S] \geqslant 0, \quad M[\varnothing] = 0, \quad (4.6\text{-}35)$$

и для каждого конечного или счетного множества попарно непересекающихся точечных множеств $S_1, S_2, \ldots$

$$M[S_1 \cup S_2 \cup \ldots] = M[S_1] + M[S_2] + \ldots \quad (4.6\text{-}36)$$

Мера Лебега $m[S]$ точечного множества на прямой обладает дополнительным свойством

$$m[(a, b)] = b - a \quad (4.6\text{-}37)$$

для каждого ограниченного интервала (a, b); таким образом, мера Лебега является обобщением длины интервала (*аксиоматическое определение меры Лебега*; см. также пп. 12.1-1, 12.8-4 и 18.2-2).

Мера Лебега точечных множеств в пространствах двух, трех, ... измерений определяется (либо конструктивно, либо аксиоматически) с помощью аналогичных обобщений *площади* и *объема*.

(b) *Каждое ограниченное открытое множество* (п. 4.3-6, а) *измеримо.* Можно высказать более общие утверждения. **Борелевское множество** на прямой есть множество, полученное посредством конечной или счетной последовательности объединений, пересечений и/или взятия дополнений интервалов и получающихся в результате комбинаций. *Класс борелевских множеств есть вполне аддитивная булева алгебра измеримых множеств. Каждое измеримое множество есть объединение некоторого борелевского множества и множества лебеговой*

меры нуль. Каждое конечное или счетное множество измеримо и имеет лебегову меру нуль. Аналогичные теоремы справедливы и в многомерном случае.

Если какое-либо свойство выполняется для каждой точки данного интервала, области или множества, исключая, быть может, лишь множество лебеговой меры нуль, то говорят, что это свойство выполняется на данном интервале, области или множестве *почти всюду* (или **почти во всех точках** этого интервала и т. д.).

(c) Измеримые функции. Функция $f(x)$, определенная на интервале $[a, b]$[1]), **измерима** на $[a, b]$, если для каждого действительного числа c множество точек x интервала $[a, b]$, в которых $f(x) \leqslant c$, измеримо.

В этом определении условие $f(x) \leqslant c$ можно заменить любым из условий $f(x) < c$, $f(x) \geqslant c$, $f(x) > c$.

Функция, непрерывная на $[a, b]$, измерима на $[a, b]$. Если на $[a, b]$ измеримы функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., то на $[a, b]$ измеримы и функции $f_1(x)+f_2(x)$, $\alpha f_1(x)$, $f_1(x) f_2(x)$, а также и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, если этот предел на $[a, b]$ существует (и даже если этот предел существует на $[a, b]$ лишь почти всюду).

Аналогичные определения и теоремы справедливы и для измеримых функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенных на пространстве точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, допускающем определение меры Лебега.

4.6-15. Интеграл Лебега (см. также пп. 4.6-1 и 4.6-2).

(a) Интеграл Лебега от ограниченной функции. Пусть действительная функция $y=f(x)$ *измерима* и *ограничена* на ограниченном интервале $[a, b]$ и A и B — соответственно ее нижняя и верхняя точные границы. Разобьем интервал $[A, B]$, содержащий множество значений функции $f(x)$ на $[a, b]$, на n частей:

$$A=y_0<y_1<y_2<\ldots<y_n=B, \tag{4.6-38}$$

и обозначим через S_i множество точек x интервала $[a, b]$, в которых $y_{i-1}<f(x)\leqslant y_i$. Составим две суммы (*интегральные суммы Лебега*):

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\, m[S_i] \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} y_i\, m[S_i].$$

Обе интегральные суммы стремятся к одному и тому же пределу, не зависящему от выбора значений y_i, если только наибольшая из разностей y_i-y_{i-1} стремится к нулю. Число

$$I=\lim_{\max(y_i-y_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i\, m[S_i]=\int_a^b f(x)\,dx \tag{4.6-39}$$

есть **определенный интеграл от функции** $f(x)$ **по интервалу** $[a, b]$ **в смысле Лебега (интеграл Лебега).**

Это определение означает, что, каково бы ни было положительное число ε, можно указать такое число $\delta>0$, что при любом разбиении интервала $[A, B]$ на части такие, что $\max(y_i-y_{i-1})<\delta$, будут справедливы неравенства

$$\left|I-\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\, m[S_i]\right|<\varepsilon \quad \text{и} \quad \left|I-\sum_{i=1}^{n} y_i\, m[S_i]\right|<\varepsilon,$$

а значит, и неравенство

$$\left|I-\sum_{i=1}^{n} \eta_i\, m[S_i]\right|<\varepsilon,$$

---

[1]) Функция $f(x)$ может быть определена на $[a, b]$ не всюду, а лишь почти всюду.

где $y_{i-1} \leqslant \eta_i \leqslant y_i$ (интеграл Лебега можно определить и как предел суммы $\sum_{i=1}^{n} \eta_i \, m[S_i]$).

(b) Интеграл Лебега от неограниченной функции. Если функция $f(x)$ измерима и не ограничена на ограниченном интервале $[a, b]$, то интеграл Лебега определяется как

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^b f_A(x)\,dx + \lim_{B \to -\infty} \int_a^b f_B(x)\,dx,$$

где

$$\left.\begin{array}{l} f_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \leqslant 0, \\ f(x), & \text{если } 0 < f(x) \leqslant A, \\ A, & \text{если } f(x) > A; \end{cases} \\ f_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ f(x), & \text{если } 0 > f(x) \geqslant B, \\ B, & \text{если } f(x) < B. \end{cases} \end{array}\right\} \tag{4.6-40}$$

Если интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ существует, то функция $f(x)$ **интегрируема по Лебегу (суммируема) на интервале** $[a, b]$.

(c) Интеграл Лебега по неограниченным интервалам. Если для всех $X > a$ существует интеграл $\int_a^X f(x)\,dx$, то интеграл Лебега $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ определяется условием

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{X_1 \to +\infty} \int_a^{X_1} f_1(x) + \lim_{X_2 \to +\infty} \int_a^{X_2} f_2(x)\,dx,$$

где

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \leqslant 0, \\ f(x), & \text{если } f(x) > 0, \end{cases} \\ f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right\} \tag{4.6-41}$$

Интеграл $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ определяется аналогично, а интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ — равенством (4) на стр. 116.

(d) Интеграл Лебега по точечному множеству. Кратные интегралы Лебега. **Интеграл Лебега** $\int_S f(x)\,dx$ **по произвольному измеримому множеству точек** S определяется без изменения так же, как и в пп. 4.6-15, а и b. **Кратный интеграл Лебега** по области или измеримому множеству точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяется аналогично.

(e) Существование и свойства интеграла Лебега. Сравнение интеграла Лебега и интеграла Римана. *Каждая*

ограниченная измеримая функция на любом ограниченном измеримом множестве суммируема. Функция, суммируемая на измеримом множестве S, суммируема и на каждом измеримом его подмножестве.

Из определений пп. 4.6-15 a, b, c и d следует, что *интеграл Лебега $\int_S f(x)\,dx$ существует в том и только в том случае, если существует интеграл Лебега $\int_S |f(x)|\,dx$. Если любой собственный или несобственный, простой или кратный интеграл Римана существует в смысле абсолютной сходимости* (п. 4.6-2, a)[1]), *то соответствующий интеграл Лебега существует и равен интегралу Римана.*

Теоремы из табл. 4.6-1 и пп. 4.6-5 и 4.7-1, c, d *справедливы и для интеграла Лебега.*

Для каждого конечного или счетного множества попарно непересекающихся измеримых множеств S_1, S_2, ...

$$\int\limits_{S_1 \cup S_2 \cup \ldots} f(x)\,dx = \int\limits_{S_1} f(x)\,dx + \int\limits_{S_2} f(x)\,dx + \ldots, \tag{4.6-42}$$

если интегралы существуют. Интеграл Лебега по любому множеству (лебеговой) меры нуль равен нулю.

Замечание. Лебеговское интегрирование применимо к более общему классу функций, чем римановское интегрирование, и упрощает формулировки многих теорем. Многие теоремы, высказанные в терминах интеграла Лебега, непосредственно применимы к абсолютно сходящимся несобственным интегралам Римана (см. также пп. 4.6-16 и 4.8-4, b).

4.6-16. Теоремы о сходимости (теоремы о непрерывности; см. также п. 12.5-1).

(a) *Если последовательность функций $s_0(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x)$, ..., каждая из которых ограничена и интегрируема в смысле Римана на ограниченном интервале $[a, b]$, равномерно сходится на $[a, b]$ к функции $s(x)$, то предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)\,dx$ существует и равен интегралу $\int_a^b s(x)\,dx$.*

(b) Следующая более общая теорема формулируется специально для интеграла Лебега: *пусть $s_0(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x)$, ... и неотрицательная функция сравнения $A(x)$ суммируемы на измеримом множестве S,* и пусть $|s_n(x)| \leqslant A(x)$ *при всех n и при почти всех $x \in S$* (п. 4.6-14, b). *Тогда из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$ для почти всех $x \in S$, следует, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int_S s_n(x)\,dx$ существует и равен $\int_S s(x)\,dx$ (теорема сходимости Лебега;* см. также п. 4.8-4, b).

4.6-17. Интеграл Стилтьеса.

(a) Интеграл Римана — Стилтьеса. **Интеграл Римана—Стилтьеса от функции $f(x)$ с интегрирующей функцией $g(x)$** *по ограниченному интервалу* $[a, b]$ по определению есть

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \lim_{\max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,[g(x_i) - g(x_{i-1})], \tag{4.6-43}$$

где

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$$

---

[1]) Отметим, что функция

$$f(x) \equiv \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\frac{1}{x^2}\right) \equiv 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

не суммируема на интервале (0, 1), несмотря на то, что несобственный интеграл Римана

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{X\to+0}\int_X^1 f(x)\,dx = \sin 1$$

существует.

и $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ (об определении предела см. п. 4.6-1). *Если $g(x)$ — функция ограниченной вариации* (п. 4.4-8, b), *а $f(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$, то предел* (43) *существует.*

Несобственные интегралы Римана — Стилтьеса определяются, как и в п. 4.6-2.

(b) Интеграл Лебега—Стилтьеса. Каждая функция $g(x)$, неубывающая и непрерывная справа (п. 4.4-7, b) на ограниченном интервале $[a, b]$, с помощью соотношений (35), (36) и

$$M[\alpha < x \leqslant \beta] = g(\beta) - g(\alpha) \qquad (a < \alpha < \beta < b), \tag{4.6.44}$$

где в квадратных скобках указано множество значений x, определяет меру (**меру Лебега—Стилтьеса**) $M[S]$ каждого борелевского множества (п. 4.6-14, b) на интервале $[a, b]$. Отметим, что

$$\left.\begin{aligned} &M[\alpha \leqslant x \leqslant \beta] = g(\beta) - g(\alpha - 0), && M[\alpha < x < \beta] = g(\beta - 0) - g(\alpha), \\ &M[\alpha \leqslant x < \beta] = g(\beta - 0) - g(\alpha - 0), && M[x = \alpha] = g(\alpha) - g(\alpha - 0) \ (a < \alpha < \beta < b). \end{aligned}\right\} \tag{4.6-45}$$

Отправляясь от меры Лебега—Стилтьеса ограниченных интервалов по способу п. 4.6-14, a, вводят меру $M[S]$ Лебега—Стилтьеса произвольного измеримого множества как общее значение внутренней и внешней меры.

Если задана функция $y = f(x)$, ограниченная и измеримая на интервале $[a, b]$, то **интеграл Лебега—Стилтьеса по $[a, b]$ от функции $f(x)$ с интегрирующей функцией $g(x)$** по определению есть

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \lim_{\max(y_i - y_{i-1}) \to 0} \sum_{i=1}^{m} \eta_i M[S_i] \tag{4.6-46}$$

для произвольного разбиения (38) интервала, содержащего множество значений функции $f(x)$; S_i и здесь есть множество значений x, в которых $y_{i-1} < f(x) \leqslant y_i$ (об определении предела см. п. 4.6-15, a).

Интеграл Лебега—Стилтьеса от ограниченной или неограниченной функции $f(x)$ по любому измеримому множеству можно теперь определить по способу пп. 4.6-15, b, c и d, предполагая, что функция $g(x)$ ограничена на каждом рассматриваемом ограниченном множестве. В многомерном случае функция $g(x)$ заменяется функцией, неубывающей по каждому аргументу. Можно, далее, применяя равенство (48) к сумме двух монотонных функций (п. 4.4-8, b), определить интеграл Лебега—Стилтьеса $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ с любой интегрирующей функцией $g(x)$ ограниченной вариации. *Если интеграл Римана — Стилтьеса существует в смысле абсолютной сходимости, то соответствующий интеграл Лебега—Стилтьеса ему равен.*

(c) Свойства интеграла Стилтьеса (см. также табл. 4.6-1). Если (a, b) — ограниченный или неограниченный интервал, для которого существуют рассматриваемые интегралы, то

$$\int_a^b f\,dg = -\int_b^a f\,dg\,^{1)}, \qquad \int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg, \tag{4.6-47}$$

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\,dg = \int_a^b f_1\,dg + \int_a^b f_2\,dg, \qquad \int_a^b f\,d(g_1 + g_2) = \int_a^b f\,dg_1 + \int_a^b f\,dg_2, \tag{4.6-48}$$

$$\int_a^b (\alpha f)\,dg = \int_a^b f\,d(\alpha g) = \alpha \int_a^b f\,dg, \tag{4.6-49}$$

$$\int_a^b f\,dg = f\,g\Big|_a^b - \int_a^b g\,df. \tag{4.6-50}$$

---

[1]) См. сноску на стр. 114.

Если $g(x)$ — неубывающая функция на (a, b), то

$$\left|\int_a^b f\,dg\right| \leqslant \int_a^b |f|\,dg \qquad (a \leqslant b). \tag{4.6-51}$$

Если $g(x)$ — неубывающая функция и $f(x) \leqslant F(x)$ на (a, b), *то*

$$\int_a^b f\,dg \leqslant \int_a^b F\,dg \qquad (a \leqslant b). \tag{4.6-52}$$

Интегралы Стилтьеса часто имеют «наглядный» смысл (криволинейные интегралы, интегралы по поверхности, по объему; интегралы по распределению массы, заряда и вероятности, п. 18.3-6). *Заметим, что интеграл Стилтьеса в качестве частных случаев включает в себя обычные интегралы и суммы*:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx, \tag{4.6-53}$$

если функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема на (a, b) и

$$\sum_k f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,d\sum_k u_-(x-k)\left[u_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geqslant 0 \end{cases}\right]. \tag{4.6-54}$$

4.6-18. Свертки. Свертка Стилтьеса двух функций $f(x)$ и $g(x)$ по интервалу (a, b) есть по определению функция

$$\Psi(t) \equiv \int_a^b f(t-x)\,dg(x) \equiv \int_a^b g(t-x)\,df(x) \tag{4.6-55}$$

для всех значений t, для которых эти два интеграла существуют и равны. Классическая свертка $f(x)$ и $g(x)$ по (a, b) подобным же образом определяется как

$$\Psi(t) \equiv \int_a^b f(t-x)\,g(x)\,dx \equiv \int_a^b g(t-x)\,f(x)\,dx. \tag{4.6-56}$$

В литературе и (55) и (56) часто просто называют *сверткой* функций $f(x)$ и $g(x)$ по (a, b) и любую из этих функций (55) и (56) обозначают символом $f \overset{b}{\underset{a}{*}} g$ или $f * g$; точный смысл обычно очевиден из контекста (см. также пп. 4.11-5, 8.3-1, 8.3-3 и 18.5-7).

Если имеют место равенства (55) и (56), то

$$g * f \equiv f * g,\; f * (g * h) \equiv (f * g) * h \equiv f * g * h,\; f * (g + h) \equiv f * g + f * h. \tag{4.6-57}$$

При $a = -\infty$ и/или $b = +\infty$, *если интегралы существуют, то равенства* (57) *справедливы.*

Свертка двух конечных или бесконечных последовательностей $a(0), a(1), a(2), \ldots$ и $b(0), b(1), b(2), \ldots$ есть последовательность

$$a * b = \sum_k a(t-k)\,b(k) \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.6-58}$$

4.6-19. Неравенства Минковского и Гельдера.

(a) *Если (a, b) — ограниченный или неограниченный интервал, для которого интегралы в правой части существуют, то*

$$\left[\int_a^b |f_1 + f_2|^p\,dg\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_a^b |f_1|^p\,dg\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |f_2|^p\,dg\right]^{1/p} \tag{4.6-59}$$

$(1 \leqslant p < +\infty)$ (*неравенство Минковского*),

$$\left|\int_a^b f_1 f_2\,dg\right| \leqslant \left[\int_a^b |f_1|^p\,dg\right]^{1/p} \left[\int_a^b |f_2|^{p/(p-1)}\,dg\right]^{(p-1)/p}$$

$(1 < p < +\infty)$ (*неравенство Гельдера*). (4.6-60)

Эти неравенства справедливы, в частности, для обычных интегралов Римана и Лебега и, более общо, для многомерных интегралов. При $p = \frac{p}{p-1} = 2$ неравенство (60) превращается в *неравенство Коши — Шварца* (15.2-3) *).

(b) Из неравенств (59) и (60) вытекают соответствующие неравенства для сумм и для сходящихся бесконечных рядов. *Если суммы справа существуют, то*

$$\left[\sum_k |a_k + b_k|^p\right]^{1/p} \leqslant \left[\sum_k |a_k|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_k |b_k|^p\right]^{1/p} \tag{4.6-61}$$

$(1 \leqslant p < +\infty)$ (*неравенство Минковского*),

$$\left|\sum_k a_k b_k\right| \leqslant \left[\sum_k |a_k|^p\right]^{1/p} \left[\sum_k |b_k|^{p/(p-1)}\right]^{(p-1)/p} \tag{4.6-62}$$

$(1 < p < +\infty)$ (*неравенство Гельдера*).

При $p = \frac{p}{p-1} = 2$ неравенство (62) превращается в неравенство *Коши — Буняковского* (см. также п. 1.3-2).

4.7. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ. ТЕОРЕМЫ ВЕЙЕРШТРАССА О ПРИБЛИЖЕНИИ

4.7-1. Теоремы о среднем значении (см. также п. 4.10-4). Нижеследующие теоремы полезны для оценки значений и пределов действительных функций, производных и интегралов.

(a) *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то в интервале (a, b) существует такое число X, что*

$$f(b) - f(a) = f'(X)(b-a) \tag{4.7-1}$$

(*теорема Лагранжа; теорема о конечном приращении*). Число X часто записывают в виде $X = a + \theta(b-a)$ $(0 < \theta < 1)$. При $f(a) = f(b)$ эта теорема называется *теоремой Ролля* (см. также (п. 1.6-6, е).

Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна при $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ и дифференцируема при $a_i < x_i < b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то существует набор таких чисел $X_1, X_2, \ldots, X_n$, что $a_i < X_i < b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и

$$f(b_1, b_2, \ldots, b_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{X_1, X_2, \ldots, X_n} (b_i - a_i) \tag{4.7-2}$$

(b) *Если* 1) *функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывна на $[a, b]$,* 2) $v(b) \neq v(a)$ *и* 3) *производные $u'(x)$ и $v'(x)$ существуют в интервале (a, b) и одновременно не обращаются в нуль, то в интервале (a, b) существует такое число X, что*

$$\frac{u(b) - u(a)}{v(b) - v(a)} = \frac{u'(X)}{v'(X)} \tag{4.7-3}$$

(*теорема Коши*).

(c) *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то в интервале (a, b) существует такое число X, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(X)(b-a). \tag{4.7-4}$$

(d) *Если функции $f(x)$* и *$g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и $g(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$ (или $g(x) \leqslant 0$ на $[a, b]$), то в интервале (a, b) существует такое число X, что*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(X)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{4.7-5}$$

---

*) В отечественной литературе это неравенство называют неравенством Коши — Буняковского

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и функция $g(x)$ в этом интервале не возрастает (или не убывает), то в интервале (a, b) существует такое число X, что

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a) \int_a^X f(x)\, dx + g(b) \int_X^b f(x)\, dx. \tag{4.7-6}$$

Если, кроме того, $g(x) \geq 0$ на (a, b), то в интервале (a, b) существует такое число X, что

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \begin{cases} g(a) \int_a^X f(x)\, dx, & \text{если } g(x) \text{ не возрастает,} \\ g(b) \int_X^b f(x)\, dx, & \text{если } g(x) \text{ не убывает.} \end{cases} \tag{4.7-7}$$

4.7-2. Раскрытие неопределенностей (примеры см. в табл. 4.7-1).

(a) Пусть функция $f(x)$ вида $\frac{u(x)}{v(x)}$, $u(x)\, v(x)$, $[u(x)]^{v(x)}$ $u(x) - v(x)$ в точке $x = a$ не определена и принимает вид $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ или $\infty - \infty$. Это значит, что $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, где $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a} v(x) = 0$ в первом случае; $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, где $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to a} v(x) = \infty$ — во втором; $f(x) = u(x)\, v(x)$, где $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a} v(x) = \infty$ — в третьем, и т. д. Термин «раскрытие неопределенностей» означает, что отыскивается предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Если этот предел существует, то часто по определению полагают $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Таблица 4.7-1

Некоторые часто встречающиеся пределы (п. 4.7-2)

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71828, \quad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e, \quad \lim_{x \to 0} \frac{c^x - 1}{x} = \ln c, \quad c > 0,$$

$$\lim_{x \to 0+} x^x = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \omega x}{x} = \omega \qquad (-\infty < \omega < +\infty),$$

$$\lim_{x \to 0+} x^a \ln x = \lim_{x \to +\infty} x^{-a} \ln x = \lim_{x \to +\infty} x^a e^{-x} = 0 \qquad (a > 0).$$

(b) Случаи 0/0 и ∞/∞. *Пусть $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) = 0$. Если существует окрестность точки $x = a$, в которой при $x \neq a$: 1) $v(x) \neq 0$ и 2) производные $u'(x)$ и $v'(x)$ существуют и $v'(x) \neq 0$, то*

$$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}, \tag{4.7-8}$$

если предел в правой части равенства существует (правило Лопиталя).

Пусть $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) = \infty$. Если существует окрестность точки $x = a$, в которой при $x \neq a$ производные $u'(x)$ и $v'(x)$ существуют и $v'(x) \neq 0$,

то равенство (8) *справедливо, если предел в правой части этого равенства существует* (эта теорема также называется *правилом Лопиталя*).

Если само отношение $\frac{u'(x)}{v'(x)}$ *представляет собой неопределенность,* то указанный метод может быть в свою очередь применен и к $\frac{u'(x)}{v'(x)}$, так что

$$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u''(x)}{v''(x)}; \tag{4.7-9}$$

этот процесс, если необходимо, может быть продолжен и дальше.

(c) Случаи $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ и $\infty - \infty$. Выражения $u(x)\,v(x)$, $[u(x)]^{v(x)}$ и $u(x) - v(x)$ с помощью какого-либо из соотношений

$$\left.\begin{aligned} u(x)\,v(x) &\equiv \frac{u(x)}{1/v(x)} \equiv \frac{v(x)}{1/u(x)}, \\ [u(x)]^{v(x)} &\equiv e^{g(x)} \quad \left[g(x) \equiv \frac{\ln u(x)}{1/v(x)} \equiv \frac{v(x)}{1/\ln u(x)}\right], \\ u(x) - v(x) &\equiv \frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{u(x)}}{\frac{1}{u(x)} \cdot \frac{1}{v(x)}} \equiv \ln g(x) \quad \left[g(x) \equiv \frac{e^{u(x)}}{e^{v(x)}}\right] \end{aligned}\right\} \tag{4.7-10}$$

часто можно привести к виду $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, и тогда к ним становятся применимыми методы п. 4.7-2, b.

(d) При вычислении пределов иногда бывает полезно воспользоваться формулой Тейлора (п. 4.10-1).

(e) Методы пп. 4.7-2, a, b, c и d применимы и для отыскания *односторонних пределов* $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ (п. 4.4-7). Пользуясь тем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{y \to +0} f(1/y)$, находят $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4.7-3. Теоремы Вейерштрасса о приближении (см. также пп. 4.10-4, 4.11-7 и 12.5-4).

1) *Пусть $f(x)$ — действительная функция, непрерывная на ограниченном замкнутом интервале $[a, b]$. Тогда для каждого заданного положительного числа* ε (*максимум погрешности приближения*) *существует такой действительный многочлен* $P(x) \equiv \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, *что* $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ *при всех* $x \in [a, b]$.

2) ✱ *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет дополнительному условию* $f(b) = f(a)$ *и* $\omega = 2\pi/(b-a)$. *Тогда найдется такой действительный* **тригонометрический многочлен** $T(x) \equiv \sum\limits_{k=0}^{m} (\alpha_k \cos k\omega x + \beta_k \sin k\omega x)$, *что* $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$ *при всех* $x \in [a, b]$.

Аналогичные теоремы справедливы и для функций двух и большего числа переменных. Теоремы Вейерштрасса о приближении позволяют различные свойства непрерывных функций выводить из соответствующих свойств многочленов или тригонометрических многочленов.

4.8. БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ, БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ

4.8-1. Бесконечные ряды. Сходимость (см. также п. 4.4-1). **Бесконечный ряд** $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ действительных или комплексных чисел (членов) a_0, a_1, a_2, ... **сходится,** если последовательность s_0, s_1, s_2, ... его **частичных сумм**

$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ имеет предел s, т. е. в том и только в том случае, если последовательность остатков $R_{n+1} = s - s_n$ сходится к нулю. В этом случае $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ называется **суммой** ряда, и разрешается писать

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = s. \qquad (4.8\text{-}1)$$

Ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ (необходимо сходящийся) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots$ Если ряд не сходится, то он называется **расходящимся** (он **расходится**; см. также п. 4.8-6). В пп. 4.9-1 и 4.9-2 приводятся некоторые признаки, позволяющие исследовать сходимость заданного бесконечного ряда

4.8-2. Ряды функций. Равномерная сходимость (см. также п. 4.4-4). Ряд функций $a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \ldots$ сходится к функции (сумме) $s(x)$ при каждом значении x, при котором

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(x) = s(x).$$

Ряд **равномерно сходится** к $s(x)$ **на множестве** S **значений** x, если на множестве S к функции $s(x)$ равномерно сходится последовательность его частичных сумм $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)$. В п. 4.9-2 приведены некоторые признаки равномерной сходимости.

4.8-3. Операции над сходящимися рядами.

(a) Сложение и умножение на число. *Если* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **и** $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ — *сходящиеся ряды с действительными или комплексными членами и* α — *действительное или комплексное число, то*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k), \qquad \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k. \qquad (4.8\text{-}2)$$

В каждом из этих случаев из сходимости или абсолютной сходимости рядов в левой части вытекает сходимость или соответственно абсолютная сходимость ряда в правой части.

(b) Перестановка членов. **Коммутативно сходящийся** ряд есть ряд, который сходится и имеет одну и ту же сумму при любой перестановке его членов; *это имеет место в том и только в том случае, если ряд абсолютно сходится. Каждый ряд, получающийся из такого ряда, если из него выбросить какие угодно члены, также абсолютно сходится.*

Сходящийся, но не абсолютно сходящийся ряд называется **условно сходящимся**. *Члены каждого условно сходящегося ряда с действительными членами можно переставить так, что:* 1) *последовательность его частичных сумм станет сходиться к данному пределу,* 2) *последовательность его частичных сумм станет неограниченно возрастать,* 3) *последовательность его частичных сумм станет неограниченно убывать* и 4) *последовательность его частичных сумм станет колебаться между двумя любыми данными числами* (*теорема Римана*).

(c) Двойные ряды. **Двойной ряд** $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}$ сходится к s (имеет сумму s), если

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{ik} = s$$

(п. 4.4-5). Отметим, что

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ik}\right), \qquad (4.8\text{-}3)$$

если все три ряда сходятся (*теорема Прингсгейма о суммировании по столбцам и по строкам*). В частности, если рассматриваемый двойной ряд $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}$ **сходится абсолютно**, т. е. если сходится ряд $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |a_{ik}|$, то этот ряд имеет одну и ту же сумму при *любом* порядке суммирования.

(d) Произведение двух бесконечных рядов. *Если* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ — *абсолютно сходящиеся ряды с действительными или комплексными членами, то двойной ряд* $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_i b_k$ *есть абсолютно сходящийся ряд с суммой* $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$. Более общо:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \text{ (правило Коши)}, \qquad (4.8\text{-}4)$$

если эти три ряда сходятся.

4.8-4. Операции над бесконечными рядами функций.

(a) Сложение и умножение на ограниченную функцию. *Если ряды* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ *и* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)$ *сходятся равномерно* (п. 4.8-2) *на множестве S значений x, то равномерно на множестве S сходятся и ряды*

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_k(x) + b_k(x)] \text{ и } \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(x) a_k(x),$$

где $\varphi(x)$ — *произвольная ограниченная на S функция.*

(b) Пределы, непрерывность и интегрирование (см. также п. 4.4-5). *Пусть ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ *равномерно сходится на ограниченном открытом интервале* (a, b), $x = x_0$ *и* $x = x_1$ — *две любые точки этого интервала. Тогда*

1. $$\lim_{x\to x_0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0} a_k(x),$$

$$\lim_{x\to x_0+0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0+0} a_k(x),$$

$$\lim_{x\to x_0-0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0-0} a_k(x),$$

если при $k=0, 1, 2, \ldots$ *существуют соответствующие пределы*

$$\lim_{x\to x_0} a_k(x), \qquad \lim_{x\to x_0+0} a_k(x), \qquad \lim_{x\to x_0-0} a_k(x).$$

2. *Сумма ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ *непрерывна в точке* $x=x_0$, *если в этой точке непрерывен каждый член ряда* $a_k(x)$.

3. *Ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ *равномерно сходится на замкнутом интервале* $[x_0, x_1]$ *и*

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\right]dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x_1} a_k(x)\,dx,$$

если каждый член $a_k(x)$ *непрерывен на* $[x_0, x_1]$. Из сделанных предположений вытекает сходимость ряда в правой части каждого из этих равенств.

Нижеследующая теорема формулируется специально для *интеграла Лебега.* Она может применяться и к должным образом сходящимся несобственным интегралам Римана (см. также п. 4.6-15). *Если ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ *функций, суммируемых на (ограниченном или неограниченном) измеримом множестве (в частности, на интервале)* S, *сходится на* S *почти всюду, то*

$$\int_S\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\right]dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_S a_k(x)\,dx, \tag{4.8-5}$$

если существует такое действительное число A (*или функция* $A(x)$, *суммируемая на* S, п. 4.6-16), *что* $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\right| < A$ *для всех* n *и почти для всех* $x\in S$. Заметим, что равномерная сходимость не предполагается.

(с) ✳ Дифференцирование. *Пусть ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ *сходится по крайней мере в одной точке* $c\in(a, b)$. *Тогда, если производные* $a_0'(x)$, $a_1'(x)$, $a_2'(x), \ldots$ *существуют на* (a, b) *и ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k'(x)$ *равномерно сходится в интервале* (a, b), *то ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ *сходится в* (a, b) *и*

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k'(x) \qquad (a<x<b). \tag{4.8-6}$$

4.8-5. Улучшение сходимости и суммирование рядов. Суммы некоторых рядов (см. также пп. 7.7-4 и 20.4-3).

(а) Преобразование Эйлера. *Если ряд в левой части равенства*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Delta^k a_0}{2^{k+1}}, \tag{4.8-7}$$

сходится и разности $\Delta^k a_0$ *определяются, как в* п. 20.4-1, а, *то это равенство справедливо.* Ряд в правой части равенства часто сходится быстрее, чем ряд слева.

(b) Преобразование Куммера. *Если для сходящихся рядов*

$$s=\sum_{k=0}^{\infty}a_k \quad \text{и} \quad S=\sum_{k=0}^{\infty}b_k$$

существует предел $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/b_n)\neq 0$, *то*

$$s=\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\gamma S+\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\gamma\frac{b_k}{a_k}\right)a_k. \tag{4.8-8}$$

Если сумма S известна, то преобразование Куммера может оказаться полезным при числовых выкладках.

В таблице 4.8-1 приведены суммы некоторых числовых рядов (наиболее подробные таблицы такого рода см. в [4.6]).

Таблица 4.8-1

Суммы некоторых числовых рядов

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}=e, \qquad 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{1}{e},$$

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}=\operatorname{ch}1, \qquad 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}=\cos 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!}=\operatorname{sh}1, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}=\sin 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{\pi^6}{945}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^8}=\frac{\pi^8}{9450},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3}=\frac{\pi^3}{32},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)(k+1)}=\frac{3}{4},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)\dots(k+m)}=\frac{1}{mm!} \quad (m=1,2,\dots),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}a^k=\frac{1}{1-a}, \quad |a|<1 \text{ (бесконечно убывающая геометрическая прогрессия)}$$

(c) Формула суммирования Пуассона. *Если ряд* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}f(2\pi k+t)$ *равномерно сходится на интервале* $0\leqslant t<2\pi$ *к функции, разлагающейся в ряд Фурье* (см. п. 4.11-4), *то*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(2\pi k)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\,e^{-ik\tau}\,d\tau, \tag{4.8-9}$$

если интеграл в правой части равенства существует.

(d) Формула суммирования Эйлера — Маклорена. *Если производная $f^{(2m+2)}(x)$ существует и непрерывна при $0 \leq x \leq n$, то*

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(t)\,dt + \frac{[f(0)+f(n)]}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\,[f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)] + \frac{nB_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\theta n)$$

$$(m,n = 1,2,\ldots;\quad 0 < \theta < 1), \qquad (4.8\text{-}10)$$

где B_j — числа Бернулли, определяемые в п. 21.5-2.

Формула (10) часто позволяет дать замкнутое выражение для приближенного представления конечной суммы $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ или представить ее в виде сходящегося или полусходящегося (п. 4.8-6, а) ряда. Эта формула применяется также для численного интегрирования (п. 20.7-2, с).

Отметим следующие формулы для сумм специального вида (частные случаи этих формул приведены в п. 1.2-8 и табл. 4.8-1):

$$\sum_{k=1}^{n} k^N = \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N} C_{N+1}^{k} (n+1)^{N+1-k} B_k, \qquad (4.8\text{-}11)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2N}} = \frac{(-1)^{N+1}(2\pi)^{2N}}{2\,(2N)!} B_{2N}, \qquad (4.8\text{-}12)$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2N}} &= \frac{(-1)^{N+1}(2^{2N-1}-1)\pi^{2N}}{(2N)!} B_{2N}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2N}} &= \frac{(-1)^{N+1}(2^{2N}-1)\pi^{2N}}{2\,(2N)!} B_{2N}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.8\text{-}13)$$

В формулах (11) — (13) $N = 1, 2, \ldots$

(e) Лемма Абеля. Следующая лемма иногда оказывается полезной для оценки частичных сумм *Пусть последовательность $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ положительных действительных чисел удовлетворяет условиям $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n \geq \ldots$* Тогда $\alpha_0 S \leq \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a_k \leq \alpha_0 S'$, *где S и S' — соответственно наименьшая и наибольшая величина из последовательности сумм $\sum_{k=0}^{r} a_k$ при $r = 0, 1, 2, \ldots, n$.*

Отсюда следует, что если для любого n справедливы неравенства $M \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \leq M'$, то $\alpha_0 M \leq \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a_k \leq \alpha_0 M'$ также для любого n.

4.8-6. Расходящиеся бесконечные ряды (см. [4.2], т. II, гл. XII, § 6).

(a) Полусходимость. Расходящийся ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ может быть полезен для приближения величины s, если абсолютная погрешность $|s - s_n| = \left| s - \sum_{k=0}^{n} a_k \right|$, прежде чем вновь начинает возрастать, убывает до некоторого достаточно малого минимума, достигаемого при определенном значении n_0 номера n **(полусходящийся ряд).**

Если при этом последовательные частичные суммы $\sum_{k=0}^{n} a_k$ поочередно то больше, то меньше величины s, то ряд называется **обертывающим**. Соседние члены такого ряда обязательно имеют разные знаки (*знакочередующийся ряд*).

(b) Асимптотические ряды. Расходящийся ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ есть **асимптотический ряд, описывающий поведение функции** $f(x)$ при $x \to x_0$ ($f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ при $x \to x_0$), если существует такой номер N, что при любом фиксированном $n > N$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{(x - x_0)^n} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \right] = 0. \tag{4.8-14}$$

Расходящийся ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ есть **асимптотический ряд, описывающий поведение функции** $f(x)$ **при** $x \to +\infty$ ($f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ при $x \to +\infty$), если существует такой номер N, что при любом фиксированном $n > N$

$$\lim_{x \to +\infty} x^n \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \right] = 0. \tag{4.8-15}$$

Асимптотический ряд дает полусходящиеся приближения функции $f(x)$, причем при $x \to x_0$ или $x \to +\infty$ номер $n_0 \to \infty$ (см. также пп. 4.4-3 и 8.4-9).

(e) Суммирование средними арифметическими. Сходящийся или расходящийся ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ **суммируем средними арифметическими (суммируем по методу Чезаро средними первого порядка, суммируем C_1, суммируем $(C, 1)$) к C_1-сумме S_1**, если последовательность $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ средних арифметических $\sigma_{n-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k$ $\left(\text{где } s_k = \sum_{j=0}^{k} a_j \right)$ сходится к S_1. *Каждый сходящийся ряд суммируем средними арифметическими и $S_1 = s$. Ряд с положительными членами суммируем средними арифметическими в том и только в том случае, если он сходится* (см. также п. 4.11-7).

4.8-7. Бесконечные произведения.

(a) Бесконечное произведение

$$(1 + a_0)(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + a_k)$$

действительных или комплексных множителей $1 + a_k \neq 0$ **сходится к числу** $p = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + a_k) \neq 0$ **(значению бесконечного произведения)**, если

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{k=0}^{n} (1 + a_k) = p.$$

Это имеет место в том и только в том случае, если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \ln(1 + a_k)$ *сходится*

к одному из значений $\ln p$ (см. п. 21.2-10). Если $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}(1+a_k)=0$, то говорят, что бесконечное произведение **расходится к нулю.**

(b) Бесконечное произведение $\prod_{k=0}^{\infty}(1+a_k)$ (необходимо сходящееся) **сходится абсолютно,** если сходится произведение $\prod_{k=0}^{\infty}(1+|a_k|)$; *для этого необходимо и достаточно, чтобы абсолютно сходился ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. *Бесконечное произведение* **сходится коммутативно** (*т. е. его значение не зависит от порядка множителей*) *в том и только в том случае, если оно сходится абсолютно* (см. также п. 4.8.-3, b).

(c) Бесконечное произведение $\prod_{k=0}^{\infty}[1+a_k(x)]$ **равномерно сходится** на множестве S значений x, для которых при всех k выполняется условие $1+a_k(x)\neq 0$, если последовательность функций $\prod_{k=0}^{n}[1+a_k(x)]$ равномерно сходится на S к функции, не принимающей на S значения, равного нулю. *Это, в частности, имеет место, если на S равномерно сходится ряд* $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k(x)|$.

4.8-8. Непрерывные (цепные) дроби. Последовательность вида

$$\left.\begin{aligned} &s_0=b_0;\ s_1=b_0+\frac{a_1}{b_1},\quad s_2=b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2}},\\ &s_3=b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3}}},\ \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (4.8.\text{-}16)$$

называется последовательностью, определяющей данную **непрерывную дробь**; n-й знаменатель равен $b_{n-1}+a_n/b_n$.

✻ Сокращенно непрерывная дробь обычно записывается так:

$$b_0+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}+\ldots$$

Дробь $\frac{a_n}{b_n}$ называют *n-м звеном* непрерывной дроби. Непрерывная дробь называется *конечной,* если она имеет конечное число звеньев, и *бесконечной,* если она имеет их бесконечное число. ✻

Разложение некоторых функций в непрерывную дробь сходится быстрее, чем соответствующее разложение в степенной ряд, и оказывается полезным в некоторых приложениях (расчет электрических сетей; см. также п. 20.5-7).

✻ Примеры. Приведем разложения некоторых функций в непрерывную дробь (следует иметь в виду, что такое разложение не единственно):

$$e^x=1+\frac{x}{1}-\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x}{5}-\ldots-\frac{x}{2}+\frac{x}{2n+1}-\ldots=$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{x}{1}+\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\ldots+\frac{x}{2}-\frac{x}{2n+1}+\ldots \qquad (-\infty<x<\infty),$$

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{2x}{2}+\frac{2x}{5}+\ldots+\frac{nx}{2}+\frac{nx}{2n+1}+\ldots \qquad (x>-1),$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{5}-\ldots-\frac{x^2}{2n+1}-\ldots \qquad (x\neq\pi/2+k\pi),$$

$$\operatorname{arctg} x=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{3}+\frac{4x^2}{5}+\ldots+\frac{n^2x^2}{2n+1}+\ldots \qquad (-\infty<x<\infty). ✻$$

4.9. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ И РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ И НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

4.9-1. Признаки сходимости бесконечных рядов (п. 4.8-1).

(a) Необходимое и достаточное условие сходимости. *Последовательность действительных или комплексных чисел* $s_0, s_1, s_2, \ldots$ (например, *последовательность частичных сумм некоторого ряда*, п. 4.8-1) *сходится в том и только в том случае, если для каждого положительного числа* ε *существует такой номер* N, *что из* $m > N$ *и* $n > N$ *следует* $|s_n - s_m| < \varepsilon$ (*критерий Коши сходимости последовательностей или рядов*).

(b) Признаки сходимости рядов с положительными членами (эти признаки полезны и как *признаки абсолютной сходимости* рядов с произвольными действительными или комплексными членами, пп. 4.8-1 и 4.8-3). Ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ *с положительными членами сходится, если существует такой номер* N, *что при* $n > N$ *выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

1. $a_n \leqslant M_n$ *и/или* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{M_{n+1}}{M_n}$, *где* $M_0 + M_1 + M_2 + \ldots$ — *сходящийся ряд сравнения с положительными членами* (*признак сравнения*).

2. По крайней мере одна из величин

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \sqrt[n]{a_n}, \quad n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) + 2, \\ &\left[n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) + 1\right] \ln n + 2 \end{aligned}\right\} \tag{4.9-1}$$

имеет точную верхнюю границу $A < 1$.

Четвертый из этих четырех признаков сильнее третьего (*признака Раабе*), который в свою очередь сильнее двух первых (*признака Даламбера* и *«радикального» признака Коши*).

3. $a_n \leqslant f(n)$, *где* $f(x)$ — *положительная невозрастающая функция, для которой сходится* (*несобственный*) *интеграл* $\int_{N+1}^{+\infty} f(x)\,dx$ (*интегральный признак сходимости Коши*; см. также п. 4.9-3, b).

Ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ *расходится, если существует такой номер* N, *что при* $n > N$ *выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1. $a_n \geqslant d_n$ *и/или* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{d_{n+1}}{d_n}$, *где* $d_0 + d_1 + d_2 + \ldots$ — *расходящийся ряд сравнения с положительными членами* (признаки сравнения для расходимости).

2. *По крайней мере одна из величин условия* 1 *имеет точную нижнюю границу* $A \geqslant 1$.

3. $a_n \geqslant f(n)$, *где* $f(x)$ — *положительная невозрастающая функция, для которой интеграл* $\int_{N+1}^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится.*

Замечание. В качестве ряда сравнения часто бывает полезен ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\lambda}$, который при действительном λ сходится, если $\lambda > 1$, и расходится, если $\lambda \leqslant 1$.

(c) *Ряд* $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ *с действительными членами сходится*:

1. *Если соседние его члены имеют разный знак* (*знакочередующийся ряд*), *его общий член* a_n *не возрастает по абсолютной величине и* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ (*признак Лейбница*).

2. *Если последовательность* $s_0, s_1, s_2, \ldots$ *его частичных сумм ограничена и монотонна*; эта последовательность монотонна, лишь если члены ряда имеют один и тот же знак. См. в этом случае признаки из (b).

(d) *Пусть* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — *невозрастающая последовательность положительных чисел. Ряд* $\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots$ *сходится:*

1. *Если сходится ряд* $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ (*признак Абеля*; см. также п. 4.8-5, е).

2. *Если* $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$ *и сумма* $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ *как функция от* n *ограничена* (*признак Дирихле*).

4.9-2. Признаки равномерной сходимости бесконечных рядов (п. 4.8-2).

(а) Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. *Последовательность* $s_0(x), s_1(x), s_2(x), \ldots$ *действительных или комплексных функций* (*например, последовательность частичных сумм некоторого ряда функций*, п. 4.8-2), *определенных на множестве* S *значений* x, *равномерно сходится на множестве* S *в том и только в том случае, если для каждого положительного числа* ε *существует такой номер* N, *не зависящий от* x, *что из* $m > N$ *и* $n > N$ *для всех* $x \in S$ *следует* $|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$ (*критерий Коши равномерной сходимости последовательностей или рядов*).

(b) *Ряд* $a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \ldots$ *действительных или комплексных функций равномерно и абсолютно сходится на каждом множестве* S *значений* x, *на котором функции* $a_n(x)$ *определены, и при всех* n *выполняется неравенство* $|a_n(x)| \leqslant M_n$, *где* $M_0 + M_1 + M_2 + \ldots$ — *сходящийся ряд сравнения с положительными членами, мажорирующий ряд* (*признак Вейерштрасса*). Сходимость ряда сравнения может быть исследована с помощью признаков п. 4.9-1, b.

(с) *Пусть* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — *невозрастающая последовательность положительных чисел. Ряд* $\alpha_0 a_0(x) + \alpha_1 a_1(x) + \alpha_2 a_2(x) + \ldots$ *равномерно сходится на множестве* S *значений* x:

1. *Если ряд* $a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \ldots$ *равномерно сходится на* S (*признак Абеля*, см. также п. 4.9-1, d)

2. *Если* $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$ *и существует такое число* A, *что*

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \right| \leqslant A \text{ при всех } n \text{ и при всех } x \in S \text{ (признак Дирихле).}$$

* Признаки Абеля и Дирихле часто полезно применять и в более общей форме, рассматривая вместо последовательности $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ последовательность функций. См., например, [4.2], т. II, стр. 451. *

4.9-3. Признаки сходимости несобственных интегралов (см. также п. 4.6-2). В пп. 4.9-3 и 4.9-4 приводятся признаки сходимости несобственных интегралов вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{X \to b-0} \int\limits_a^{X} f(x)\,dx$. Несобственные интегралы других типов сводятся к интегралам этого вида (п. 4.6-2).

Предполагается, что действительная функция $f(x)$ **ограничена и интегрируема на каждом ограниченном интервале** $[a, X]$, **не содержащем верхний предел интеграла.**

(а) Необходимое и достаточное условие сходимости (критерий Коши). *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится в том и только в том случае, если для каждого положительного числа* ε *существует такое число* $M > a$, *что из* $X_2 > X_1 > M$ *следует* $\left| \int\limits_{X_1}^{X_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$.

Аналогично *интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится в том и только в том случае, если для каждого положительного числа* ε *существует такое число* δ $(0<\delta<b-a)$, *что из* $b-\delta<X_1<X_2<b$ *следует* $\left|\int\limits_{X_1}^{X_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$.

(b) Признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций (эти признаки полезны и как *признаки абсолютной сходимости несобственных интегралов* от произвольных действительных или комплексных функций; *заметим, что из абсолютной сходимости следует сходимость*). *Если функция* $f(x)\geqslant 0$ *в интервале интегрирования, то несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *или* $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{X\to b-0}\int\limits_a^X f(x)\,dx$ *сходится в том и только в том случае, если интеграл* $\int\limits_a^X f(x)\,dx$ *как функция от* X *ограничен в интервале интегрирования*. В частности, *если интервал интегрирования содержит такое число* M, *что при* $x>M$ (соответственно *при* $M<x<b$) *выполняется неравенство* $f(x)\leqslant g(x)$, *где* $g(x)$ — *функция сравнения, для которой сходится интеграл* $\int\limits_M^{+\infty} g(x)\,dx$ $\left(\text{или соответственно } \int\limits_M^b g(x)dx\right)$, *то первоначальный интеграл сходится* (признак сравнения).

Аналогично, если $g(x)\geqslant 0$ и интеграл $\int\limits_M^{+\infty} g(x)\,dx$ или $\int\limits_M g(x)\,dx$ расходится, то из $f(x)\geqslant g(x)$ следует, что расходится и соответствующий интеграл от $f(x)$.

Замечание. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}$, где $a>0$, сходится при $\lambda>1$ и расходится при $\lambda\leqslant 1$, а интеграл $\int\limits_a^b\frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ сходится при $\lambda<1$ и расходится при $\lambda\geqslant 1$. Если $f(x)=O\left(1/x^\lambda\right)$ $(\lambda>1)$ при $x\to+\infty$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится абсолютно. Если $f(x)=O\left[1/(b-x)^\lambda\right]$ $(\lambda<1)$ при $x\to b-0$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится абсолютно (см. также п. 4.4-3).

(c) *Если несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *или* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится абсолютно, а* $\alpha(x)$ — *функция, ограниченная на интервале интегрирования и интегрируемая на каждом конечном интервале* $[a, X]$, *не содержащем верхнего предела интеграла, то несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty}\alpha(x)f(x)\,dx$ *или соответственно* $\int\limits_u^b\alpha(x)f(x)\,dx$ *сходится* (*абсолютно*).

(d) *Пусть функция* $\alpha(x)$ *ограничена и монотонна на интервале* $a\leqslant x<+\infty$. *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty}\alpha(x)f(x)\,dx$ *сходится:*

1. *Если интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится* (*аналог признака Абеля*, п. 4.9-1, d) или

2. *Если интеграл* $\int\limits_a^{X} f(x)\,dx$ *как функция от* X *ограничен на интервале* $a \leqslant X < +\infty$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$ (*аналог признака Дирихле*, п. 4.9-1, d).

(e) В п. 8.2-4 см. ряд приложений.

4.9-4. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов (см. также п. 4.6-2, с).

(a) Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. *Критерий сходимости Коши* из п. 4.9-3, а *превращается в критерий равномерной сходимости несобственного интеграла* $\int\limits_a^{\infty} f(x, y)\,dx$ *или* $\int\limits_a^{b} f(x,y)\,dx$ *на множестве* S *значений* y, *если дополнительно указать, что число* M *или* δ, *находимое по этому критерию при каждом* $y \in S$ *для любого положительного числа* ε, *не зависит от* y (см. также п. 4.9-2, а).

(b) *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ *или* $\int\limits_a^{b} f(x, y)\,dx$ *равномерно и абсолютно сходится на каждом множестве* S *значений* y *таком, что при любом* $y \in S$ *и любом* x *из интервала интегрирования выполняется неравенство* $|f(x, y)| \leqslant g(x)$, *где* $g(x)$ — *функция сравнения, интеграл от которой* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ (или соответственно $\int\limits_a^{b} g(x)\,dx$) *сходится* (*аналог признака Вейерштрасса*, п. 4.9-2, b).

(c) *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} \alpha(x, y) f(x, y)\,dx$ *равномерно сходится на множестве* S *значений* y, *если при любом* $y \in S$ *функция* $\alpha(x, y)$ *не возрастает на интервале* $a \leqslant x < +\infty$ *и равномерно стремится на* S *к нулю при* $x \to +\infty$ *и если при* $x \geqslant a$ *и* $y \in S$ *абсолютная величина* $\left|\int\limits_a^{x} f(x, y)\,dx\right|$ *ограничена константой* A, *не зависящей ни от* x, *ни от* y (*аналог признака Дирихле*, п. 4.9-2, с).

4.10. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНЫЙ РЯД И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИХ ИНТЕГРАЛОМ. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И РЯД ТЕЙЛОРА

4.10-1. Разложение функций в бесконечный ряд и представление их интегралом. Функцию $f(x)$ часто разлагают в соответствующий бесконечный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$ ввиду того, что

1. Последовательность частичных сумм (или средних арифметических, пп. 4.8-6, с и 4.11-7) этого ряда может давать полезные для вычислений приближения функции $f(x)$.

2. Операции над функцией $f(x)$ может оказаться возможным описать в терминах более простых операций над функциями $\varphi_k(x)$ или над коэффициентами α_k (методы преобразований см. также пп. 4.11-5, b и 8.6-5). Функция $\varphi_k(x)$ и коэффициенты α_k могут иметь какой-либо наглядный (физический) смысл (п. 4.11-4, b).

Подобные же преимущества может давать представление функций в виде (обычно несобственного) интеграла $\int\limits_a^b \alpha(\lambda)\,\varphi(x, \lambda)\,dx$ (см. также пп. 4.11-4, c, 4.11-5, c и гл.8).

Возможность реализации одного или обоих преимуществ, перечисленных выше, часто нуждается в сходимости или же равномерной сходимости ряда или интеграла (отсюда — важность признаков сходимости из пп. 4.9-1 — 4.9-4), но это относится не ко всем случаям (пп. 4.8-6, 4.11-5 и 4.11-7).

4.10-2. Степенные ряды.

(a) Степенной ряд относительно (действительного или комплексного) переменного x есть ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \quad \text{или} \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{при} \quad a=0, \tag{4.10-1}$$

где коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — действительные или комплексные числа. *Для любого степенного ряда* (1) *существует такое действительное число* $r_c\,(0 \leqslant r_c \leqslant +\infty)$, *что этот ряд сходится абсолютно при* $|x| < r_c$ *и расходится при* $|x| > r_c$. Число r_c называется **радиусом сходимости** данного степенного ряда. *Каково бы ни было число* q, *удовлетворяющее условию* $0 < q < r_c$, *степенной ряд* (1) *равномерно сходится при* $|x| \leqslant q$ (на интервале, если x — действительное переменное, и в круге, если x — комплексное переменное).

Из сходимости степенного ряда (1) *при* $x = x_0$ *вытекает его сходимость и при* $|x| < |x_0|$, *а из его расходимости при* $x = x_0$ *вытекает его расходимость и при* $|x| > |x_0|$.

(b) *Сходящиеся степенные ряды можно складывать в соответствии с равенством* (4.8-2) *и перемножать в соответствии с правилом Коши* (4.8-4). *При* $|x| < r_c$ *сумма степенного ряда* (1) *есть непрерывная и сколько угодно раз дифференцируемая функция* x. *Степенной ряд* (1) *можно почленно дифференцировать при* $|x| < r_c$ *и интегрировать на любом замкнутом интервале, содержащемся в интервале* $(-r_c, r_c)$. *Получающиеся в результате почленного дифференцирования или почленного интегрирования от* 0 *до* x *ряды имеют тот же радиус сходимости* r_c.

Некоторые правила действий со степенными рядами приведены в табл. 4.10-1.

(c) *Если существует такое положительное число* r, *что при всех* x, *удовлетворяющих условию* $|x| < r$, *два степенных ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *и* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ *имеют одну и ту же сумму* $f(x)$, *то* $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ... (*теорема единственности*).

Пример. *Бесконечная геометрическая прогрессия*

$$a_0 + a_0 x + a_0 x^2 + \ldots \equiv a_0 \sum_{k=0}^{\infty} x^k \equiv a_0 \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1), \tag{4.10-2}$$

(см. также пп. 1.2-7 и 1.7-2) *сходится абсолютно при* $|x| < 1$ *и расходится при* $|x| \geqslant 1$. Для любого q, удовлетворяющего условию $0 < q < 1$, прогрессия равномерно сходится при $|x| \leqslant q$.

Таблица 4.10-1

Действия со степенными рядами

$$s_1 = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots,$$
$$s_2 = 1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \ldots,$$
$$s_3 = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots$$

Операция	c_1	c_2	c_3	c_4
$s_3 = s_1^{-1}$	$-a_1$	$a_1^2 - a_2$	$2a_1a_2 - a_3 - a_1^3$	$2a_1a_3 - 3a_1^2a_2 - a_4 + a_2^2 + a_1^4$
$s_3 = s_1^{-2}$	$-2a_1$	$3a_1^2 - 2a_2$	$6a_1a_2 - 2a_3 - 4a_1^3$	$6a_1a_3 + 3a_2^2 - 2a_4 - 12a_1^2a_2 + 5a_1^4$
$s_3 = s_1^{1/2}$	$\frac{1}{2}a_1$	$\frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{8}a_1^2$	$\frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{4}a_1a_2 + \frac{1}{16}a_1^3$	$\frac{1}{2}a_4 - \frac{1}{4}a_1a_3 - \frac{1}{8}a_2^2 + \frac{3}{16}a_1^2a_2 - \frac{5}{128}a_1^4$
$s_3 = s_1^{-1/2}$	$-\frac{1}{2}a_1$	$\frac{3}{8}a_1^2 - \frac{1}{2}a_2$	$\frac{3}{4}a_1a_2 - \frac{1}{2}a_3 - \frac{5}{16}a_1^3$	$\frac{3}{4}a_1a_3 + \frac{3}{8}a_2^2 - \frac{1}{2}a_4 - \frac{15}{16}a_1^2a_2 + \frac{35}{128}a_1^4$
$s_3 = s_1^n$	na_1	$\frac{1}{2}(n-1)c_1a_1 + na_2$	$c_1a_2(n-1) + \frac{1}{6}c_1a_1^2(n-1)(n-2) + na_3$	$na_4 + c_1a_3(n-1) + \frac{1}{2}n(n-1)a_2^2 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)c_1a_1a_2 + \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-3)c_1a_1^3$
$s_3 = s_1s_2$	$a_1 + b_1$	$b_2 + a_1b_1 + a_2$	$b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3$	$b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4$
$s_3 = s_1/s_2$	$a_1 - b_1$	$a_2 - (b_1c_1 + b_2)$	$a_3 - (b_1c_2 + b_2c_1 + b_3)$	$a_4 - (b_1c_3 + b_2c_2 + b_3c_1 + b_4)$
$s_3 = \exp(s_1 - 1)$	a_1	$a_2 + \frac{1}{2}a_1^2$	$a_3 + a_1a_2 + \frac{1}{6}a_1^3$	$a_4 + a_1a_3 + \frac{1}{2}a_2^2 + \frac{1}{2}a_2a_1^2 + \frac{1}{24}a_1^4$
$s_3 = 1 + \ln s_1$	a_1	$a_2 - \frac{1}{2}a_1c_1$	$a_3 - \frac{1}{3}(a_2c_1 + 2a_1c_2)$	$a_4 - \frac{1}{4}(a_3c_1 + 2a_2c_2 + 3a_1c_3)$

4.10-3. ⁎ Теоремы Абеля и Таубера.

(a) *Пусть* $r > 0$. *Если ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ *сходится и имеет сумму* s; *то ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *в замкнутом интервале* $[0, r]$ *сходится равномерно и* $\lim_{x \to r-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = s$ (*теорема Абеля*).

(b) *Пусть* $r > 0$. *Если ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится в интервале* $[0, r)$, *причем* $\lim_{x \to r-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = s$ и $\lim_{k \to \infty} k a_k r^k = 0$, *то ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ *сходится и его сумма равна* s (*теорема Таубера*).

Замечание. Особый интерес представляет случай $r = r_c$.

4.10-4. Ряд Тейлора (см. также п. 7.5-2).

(a) *Пусть* $f(x)$ — *действительная функция, имеющая в интервале* $a \leqslant x < b$ n-*ю производную* $f^{(n)}(x)$. *Тогда*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + R_n(x) \qquad (a \leqslant x < b), \qquad (4.10\text{-}3)$$

где $|R_n(x)| \leqslant \frac{|x-a|^n}{n!} \sup_{a<\xi<x} |f^{(n)}(\xi)|$ (*формула Тейлора*). $R_n(x)$ называется **остаточным членом** формулы Тейлора.

Более точно, *существует такое число* $X = a + \theta(x-a)$, *что* $a < X < x$ (или $0 < \theta < 1$) *и*

$$R_n(x) = \underbrace{\int_a^x d\xi \int_a^\xi d\xi \ldots \int_a^\xi}_{n \text{ раз}} f^{(n)}(\xi)\, d\xi = \frac{1}{n!} f^{(n)}(X)(x-a)^n \qquad (a \leqslant x < b) \qquad (4.10\text{-}4)$$

(*Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа*). X и θ зависят от a, x и n (см. также п. 4.7-1). Формулы (3) и (4) остаются справедливыми и если функция $f(x)$ имеет n-ю производную в интервале $-b < x \leqslant a$, причем здесь $b < x < X < a$.

(b) *Пусть функция* $f(x)$ *имеет в интервале* $(a-r, a+r)$ *все производные и пусть для нее в этом интервале* $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$. *Тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k, \qquad |x-a| < r \qquad (4.10\text{-}5)$$

и ряд равномерно сходится к $f(x)$ *на любом промежутке* $|x-a| \leqslant q$, *где* $q < r$ (*разложение функции* $f(x)$ *в ряд Тейлора в окрестности точки* a). Здесь по определению положено $0! = 1$ и $f^{(0)}(a) = f(a)$.

Если в (5) вместо a написать x, а вместо $x-a$ написать Δx, то соотношение (5) можно переписать в виде $f(x + \Delta x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \Delta x^k$ (пп. 4.5-3 и 11.2-1). При $a = 0$ ряд Тейлора (5) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k$ называется *рядом Маклорена*.

(c) Каждое разложение функции $f(x)$ в ряд по степеням $(x-a)$, сходящийся при $a - r < x < a + r$, необходимо тождественно с (5) (п. 4.10-2, c). Если $f(x)$ — рациональная функция, то ее разложение по степеням x или по степеням $1/x$ часто получают, неограниченно продолжая процесс деления (п. 1.7-2, см. также равенство (2)). Примеры разложения в степенной ряд см. в п. 21.2-12.

Разложения в степенной ряд допускают почленное дифференцирование и интегрирование (см. 4.10-2, b) и, таким образом, оказываются полезными для интегрирования функции $f(x)$ и для решения дифференциальных уравнений (п. 9.2-5). Заметим, однако, что n-я частичная сумма $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$ ряда Тейлора не обязательно будет наилучшим приближением функции $f(x)$, являющимся многочленом n-й степени (см. также п. 20.5-1).

Функция $f(x)$, которая может быть разложена в степенной ряд, сходящийся в некоторой окрестности точки a, называется **аналитической** в этой окрестности (см. также п. 7.3-3).

4.10-5. Кратный ряд Тейлора.

(a) Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — действительная функция, имеющая все непрерывные частные производные порядка $\leqslant m$ в некоторой окрестности D точки a. Тогда

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{(a_1, a_2, \ldots, a_n)} (x_i - a_i) + \\ + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_{(a_1, a_2, \ldots, a_n)} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \ldots + R_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$((x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D) \quad (\textit{формула Тейлора}). \qquad (4.10\text{-}6)$$

Остаточный член $R_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет соотношению, аналогичному равенству (4).

Формулу (6) можно записать при помощи дифференциалов

$$f(a_1 + dx_1, a_2 + dx_2, a_n + dx_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\ = df + \frac{1}{2!} d^2 f + \ldots + \frac{1}{(m-1)!} d^{m-1} f + R_m, \qquad (4.10\text{-}7)$$

где все дифференциалы вычисляются в точке $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, а

$$R_m = \frac{1}{m!} d^m f \,|_{(X_1, X_2, \ldots, X_n)} \quad (X_i = a_i + \theta\, dx_i, \quad 0 < \theta < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n). \quad (4.10\text{-}8)$$

(b) Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в D все непрерывные частные производные и $\lim_{m\to\infty} R_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$ в D, то равенство (6) приводит к разложению функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в кратный степенной ряд (*кратный ряд Тейлора*). Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть разложена в степенной ряд, сходящийся в некоторой окрестности точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то она называется **аналитической** в этой окрестности.

4.11. РЯДЫ ФУРЬЕ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

4.11-1. Вводные замечания. Ряды Фурье и интегралы Фурье используются для представления и/или приближения функций (п. 4.10-1) во многих важных приложениях. Разложение в ряд Фурье есть частный случай *разложения в ряд по ортогональным функциям* (см. пп. 15.2-3—15.2-6).

4.11-2. Ряды Фурье.

(a) Если задан интервал разложения $-\pi < t < \pi$, то **ряд Фурье**, порожденный действительной функцией $f(t)$, для которой существует интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} |f(\tau)|\, d\tau$ [1]), есть бесконечный **тригонометрический ряд**

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \qquad (4.11\text{-}1a)$$

[1]) Во многих приложениях достаточно рассматривать интегралы в этом параграфе как интегралы Римана (п. 4.6-1), но использование интеграла Лебега (п. 4.6-15) делает теорию значительно шире применимой. См. в пп. 15.2-3 — 15.2-6 ряд теорем, формулируемых специально для интеграла Лебега.

коэффициенты которого определяются по *формулам Эйлера—Фурье*

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\cos k\tau\,d\tau, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\sin k\tau\,d\tau, \\ c_k &= \bar{c}_{-k} = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,e^{-ik\tau}\,d\tau \end{aligned}\right\}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \quad (4.11\text{-}1b)$$

Здесь a_k и b_k — действительные, а c_k — вообще говоря, комплексные числа (п. 4.11-2, d).

(**b**) Если задан интервал разложения $-T/2 < t < T/2$, то ряд Фурье, порожденный действительной функцией $f(t)$, для которой существует интеграл $\int_{-T/2}^{T/2} |f(\tau)|\,d\tau$, есть бесконечный тригонометрический ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega_0 t + b_k\sin k\omega_0 t) \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right), \quad (4.11\text{-}2a)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\cos k\omega_0\tau\,d\tau, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\sin k\omega_0\tau\,d\tau, \\ c_k &= \bar{c}_{-k} = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\,e^{-ik\omega_0\tau}\,d\tau. \end{aligned}\right\} \quad (4.11\text{-}2b)$$

В частном случае, когда $T = 2\pi$, равенства (2) превращаются в равенства (1). Если в качестве интервала разложения выбрать интервал $(a,\ a+T)$, то интегралы в (2b) следует брать не между $-T/2$ и $T/2$, а между a и $a+T$.

(c) ✻ *Если существует интеграл* $\int_{-T/2}^{T/2} [f(\tau)]^2\,d\tau$, *то средняя квадратическая погрешность*

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(\tau) - P_n(\tau)]^2\,d\tau,$$

где $P_n(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\cos k\frac{2\pi t}{T} + \beta_k\sin k\frac{2\pi t}{T}\right)$ — *произвольный* **тригонометрический многочлен**, *при каждом n принимает наименьшее значение, когда в качестве коэффициентов* α_k, β_k *многочлена* $P_n(t)$ *берутся соответствующие коэффициенты Фурье* (2b) a_k *и* b_k *функции* $f(t)$, *т. е. когда тригонометрический многочлен* $P_n(t)$ *есть частичная сумма*

$$s_n(t) \equiv \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos k\frac{2\pi t}{T} + b_k\sin k\frac{2\pi t}{T}\right)$$

ряда Фурье функции $f(t)$ (см. также п. 15.2-6).

Если тригонометрический ряд (2a) сходится к $f(t)$ в интервале $(-T/2, T/2)$ равномерно, то его коэффициенты необходимо являются коэффициентами Фурье (2b) функции $f(t)$ (теорема Эйлера).

(d) ✳ *Если абсолютная величина $|f(t)|$ интегрируема на интервале разложения, то коэффициенты Фурье a_k и b_k функции $f(t)$ при $k\to\infty$ стремятся к нулю (теорема Римана — Лебега). Если функция $f(t)$ на всем замкнутом интервале разложения имеет непрерывные производные до $(m-1)$-го порядка включительно, причем каждая из этих производных в концах этого интервала имеет одно и то же значение, и если m-я производная кусочно-непрерывна, то коэффициенты Фурье a_k и b_k функции $f(t)$ при $k\to\infty$ убывают не медленнее, чем k^{-m}, т. е.*

$$|a_k| < \frac{C}{k^m}, \qquad |b_k| < \frac{C}{k^m},$$

где C — постоянная.

(e) Действительные коэффициенты a_k и b_k и комплексные коэффициенты c_k связаны формулами

$$\left.\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k}, \quad b_k = i\,(c_k - c_{-k}) \\ c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k),\ c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \end{aligned}\right\} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.11-3}$$

где $b_0 = 0$. Ряд Фурье (2) четной или же нечетной функции $f(t)$ (п. 4.2-2, b) сводится соответственно к ряду Фурье по косинусам и к ряду Фурье по синусам.

4.11-3. Интеграл Фурье и преобразование Фурье (примеры см. в табл. 4.11-3—4.11-5).

(a) **Интеграл Фурье**, порожденный действительной функцией $f(t)$, абсолютная величина $|f(t)|$ которой интегрируема на интервале $-\infty < t < +\infty$ (интервал разложения) [1]), по определению есть

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} c(\nu)\,e^{2\pi i\nu t}\,d\nu \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega, \tag{4.11-4a}$$

где

$$\left.\begin{aligned} c(\nu) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,e^{-2\pi i\nu\tau}\,d\tau, \\ C(\omega) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,c\left(\frac{\omega}{2\pi}\right), \\ \Omega(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau \equiv c\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad (\omega = 2\pi\nu). \end{aligned}\right\} \tag{4.11-4b}$$

Функция $c(\nu)$ называется **преобразованием Фурье** $c(\nu) = \mathscr{F}[f(t)]$ функции $f(t)$. Заметим, что преобразованием Фурье функции $f(t)$ называют не только $c(\nu)$, но и $C(\omega)$ или же $\Omega(\omega)$.

---

[1]) См. сноску к п. 4.11-2.

(b) Косинус- и синус-интегралы Фурье, порожденные действительной функцией $f(t)$, абсолютная величина $|f(t)|$ которой интегрируема на интервале разложения $0 < t < +\infty$, определяются соответственно как

$$\left.\begin{aligned} 2\int_0^{+\infty} c_c(\nu)\cos 2\pi\nu t\,d\nu &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} C_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega,\\ 2\int_0^{+\infty} c_s(\nu)\sin 2\pi\nu t\,d\nu &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} C_s(\omega)\sin\omega t\,d\omega,\end{aligned}\right\} \qquad (4.11\text{-}5a)$$

где

$$\left.\begin{aligned} c_c(\nu) &\equiv 2\int_0^{+\infty} f(\tau)\cos 2\pi\nu\tau\,d\tau,\\ C_c(\omega) &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}c_c(\nu),\\ c_s(\nu) &\equiv 2\int_0^{+\infty} f(\tau)\sin 2\pi\nu\tau\,d\tau,\\ C_s(\omega) &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}c_s(\nu) \quad (\omega = 2\pi\nu).\end{aligned}\right\} \qquad (4.11\text{-}5b)$$

Действительные функции $c_c(\nu) \equiv \mathscr{F}_c[f(t)]$ и $c_s(\nu) \equiv \mathscr{F}_s[f(t)]$ называются соответственно **косинус-преобразованием Фурье** и **синус-преобразованием Фурье** функции $f(t)$. Часто косинус- и синус-преобразованием Фурье называют вместо этого $C_c(\omega)$ и $C_s(\omega)$.

4.11-4. Функции, разложимые в ряд Фурье и представимые интегралом Фурье. Гармонический анализ (примеры см. в табл. 4.11-1).

(a) *Ряд Фурье или интеграл Фурье, порожденный действительной функцией $f(t)$, абсолютная величина которой интегрируема на соответствующем интервале разложения I,*

1) *сходится к* $\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$ *на каждом открытом интервале, где функция $f(t)$ и ее производная $f'(t)$ кусочно-непрерывны* (п. 4.4-7, с); *при этом на каждом замкнутом интервале, в котором функция непрерывна, ряд Фурье равномерно сходится к $f(t)$*;

2) *сходится равномерно к $f(t)$ на каждом таком интервале $(a, b) \subset \subset (a-\delta, b+\delta) \subset I$, где $\delta > 0$, что на $(a-\delta, b+\delta)$ функция $f(t)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию* (п. 4.4-8, b);

3) *сходится к* $\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$ *на каждом открытом интервале, содержащемся в I, на котором функция $f(t)$ имеет ограниченную вариацию (признак Жордана).*

Напомним, *что функция $f(t)$, ограниченная и имеющая конечное число относительных максимумов, относительных минимумов и точек разрыва первого рода на некотором конечном интервале (условия Дирихле,* п. 4.4-8, b), *является на этом интервале функцией ограниченной вариации.*

(b) Гармонический анализ периодических функций. *Пусть $f(t)$ — действительная периодическая функция с периодом T* (п. 4.2-2, b),

для которой существует интеграл $\int\limits_{-T/2}^{T/2} |f(\tau)|\, d\tau$. *Тогда*

$$\left.\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} = \\
&= c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos (k\omega_0 t + \arg c_k), \\
a_k &= \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos k\omega_0 \tau\, d\tau \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\right), \\
b_k &= \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \sin k\omega_0 \tau\, d\tau, \\
c_k &= \bar{c}_{-k} = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\, e^{-ik\omega_0 \tau}\, d\tau
\end{aligned}\right\} \qquad (4.11\text{-}6)$$

на каждом открытом промежутке, на котором $f(t)$ и $f'(t)$ кусочно-непрерывны, если в каждой точке разрыва $f(t)$ по определению положить

$$f(t) = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}$$

(см. также п. 4.4-8, b). Таким образом, функция $f(t)$ представлена в виде суммы

1) *постоянного члена* $(a_0/2) = c_0$ (*среднего значения функции* $f(t)$, см. также пп. 4.6-3 и 18.10-9) и

2) некоторого множества *синусоидальных членов* (синусоидальных компонент) с частотами $\nu_0 = 1/T$ (**основной** частоты), $2\nu_0 = 2/T$ (2-й **гармонической** частоты), $3\nu_0 = 3/T$ (3-й **гармонической** частоты), ...

k-я гармоническая компонента $2\,|c_k| \cos \left(k \frac{2\pi t}{T} + \arg c_k\right)$ имеет частоту $k\nu_0 = k/T$, **круговую частоту** $k\omega_0 = 2\pi k\nu_0 = 2\pi k/T$, **амплитуду** $2\,|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ и «фазу» $\arg c_k = -\operatorname{arctg} (b_k/a_k)$.

Нечетные гармонические члены в разложении (6) описывают антипериодическую часть функции $f(t)$ (п. 4.2-2).

Отметим, что

$$\langle f^2 \rangle \equiv \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} [f(\tau)]^2\, d\tau = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2, \qquad (4.11\text{-}7)$$

если интеграл в левой части равенства существует (*теорема Парсеваля*, см. также п. 15.2-4). В табл. 4.11-1 приведены коэффициенты Фурье и средние значения квадрата (7) некоторых периодических функций. По поводу численного гармонического анализа см. п. 20.6-6.

Таблица 4.11-1

Коэффициенты Фурье и среднеквадратические значения периодических функций

$$\left[s(x) \equiv \frac{\sin \pi x}{\pi x}\right]$$

	Периодическая функция, $f(t) = f(t+T)$		Коэффициенты Фурье	Среднее значение, $\langle f \rangle = \frac{a_0}{2}$	Среднее квадратическое значение, $\langle f^2 \rangle$
1	Прямоугольный импульс		$a_n = 2A\frac{T_0}{T}\, s\left(\frac{nT_0}{T}\right)$, $b_n = 0$	$A\frac{T_0}{T}$	$A^2\frac{T_0}{T}$
2	Симметричный треугольный импульс		$a_n = A\frac{T_0}{T}\, s^2\left(\frac{nT_0}{2T}\right)$, $b_n = 0$	$A\frac{T_0}{2T}$	$A^2\frac{T_0}{3T}$
3	Симметричный трапецеидальный импульс		$a_n = A\frac{T_0+T_1}{T} \times s\left[\frac{n(T_0-T_1)}{2T}\right] \times s\left[\frac{n(T_0+T_1)}{2T}\right]$, $b_n = 0$	$A\frac{T_0+T_1}{2T}$	$A^2\frac{2T_0+T_1}{3T}$
4	Полусинусоидальный импульс [1])		$a_n = A\frac{T_0}{T} \times \left\{s\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2nT_0}{T}-1\right)\right] + s\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2nT_0}{T}+1\right)\right]\right\}$, $b_n = 0$	$\frac{2}{\pi}A\frac{T_0}{T}$	$A^2\frac{T_0}{2T}$

[1]) При $T_0 = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, $f(t) = \frac{2}{\pi}A\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\cos\omega t + \frac{1}{3}\cos 2\omega t - \frac{1}{15}\cos 4\omega t + \frac{1}{35}\cos 6\omega t - \ldots\right)$ «детектированная» синусоида.

При $T_0 = T = \frac{2\pi}{\omega}$, $f(t) = \frac{4}{\pi}A\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos 2\omega t - \frac{1}{15}\cos 4\omega t + \frac{1}{35}\cos 6\omega t - \ldots\right)$ «выпрямленная» синусоида.

Таблица 4.11-1 (*продолжение*)

	Периодическая функция, $f(t) = f(t+T)$		Коэффициенты Фурье	Среднее значение, $\langle f \rangle = \frac{a_0}{2}$	Среднеквадратическое значение, $\langle f^2 \rangle$
5	Срезанная синусоида $A = A_0\left(1 - \cos\frac{\pi T_0}{T}\right)$	T, A, $2A_0$, t, $\frac{T_0}{2}$, $\frac{T_0}{2}$	$a_n = \frac{A_0 T_0}{T} \times \left\{ s\left[(n-1)\frac{T_0}{T}\right] + s\left[(n+1)\frac{T_0}{T}\right] - 2\cos\frac{\pi T_0}{T}\, s\left(\frac{nT_0}{T}\right)\right\}$	$\frac{1}{\pi} A_0^2\left(\sin\frac{\pi T_0}{T} - \frac{\pi T_0}{T} \times \cos\frac{\pi T_0}{T}\right)$	$\frac{1}{2\pi} A_0\left(\frac{\pi T_0}{T} - \frac{3}{2}\sin\frac{2\pi T_0}{T} + \frac{2\pi T_0}{T}\cos^2\frac{\pi T_0}{T}\right)$
6	Треугольная форма сигнала	T, A, t	$a_n = 0$, $b_n = -\frac{A}{n\pi}$, $n = 1, 2, \ldots$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A^2}{3}$

(c) **Функции, представимые интегралом Фурье.** Пусть $f(t)$ — действительная функция, для которой существует интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)|\, d\tau$. Тогда

$$
\left.
\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} c(\nu)\, e^{2\pi i\nu t}\, d\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \\
c(\nu) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-2\pi i\nu\tau}\, d\tau, \\
C(\omega) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, c\left(\frac{\omega}{2\pi}\right), \\
\Omega(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \equiv c\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad (\omega = 2\pi\nu)
\end{aligned}
\right\}
\qquad (4.11\text{-}8)
$$

на каждом открытом интервале, на котором $f(t)$ и $f'(t)$ кусочно-непрерывны, если в каждой точке разрыва $f(t)$ по определению положить

$$f(t) = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}.$$

Функция $f(t)$, имеющая преобразование Фурье $c(\nu)$, называется **обратным преобразованием Фурье** $\mathscr{F}^{-1}[c(\nu)]$ функции $c(\nu)$; при данных предположениях, если функция $f(t)$ непрерывна, равенство (8) определяет $\mathscr{F}^{-1}[c(\nu)]$ однозначно.

Равенство (8) можно переписать в различных формах, например:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}|C(\omega)|\cos[\omega t+\arg C(\omega)]\,d\omega=$$

$$=2\int_{0}^{+\infty}[A(\nu)\cos 2\pi\nu t+B(\nu)\sin 2\pi\nu t]\,d\nu \qquad (\omega=2\pi\nu). \qquad (4.11\text{-}9)$$

Действительные функции $A(\nu)$ и $B(\nu)$ в (9) соответственно являются косинус-преобразованием четной части (п. 4.2-2) функции $f(t)$ и синус-преобразованием нечетной части функции $f(t)$:

$$\left.\begin{aligned}
A(\nu)&=\frac{c(\nu)+c(-\nu)}{2}=\mathscr{F}_{\text{c}}\left[\frac{f(t)+f(-t)}{2}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos 2\pi\nu\tau\,d\tau,\\
-B(\nu)&=\frac{c(\nu)-c(-\nu)}{2i}=\mathscr{F}_{\text{s}}\left[\frac{f(t)-f(-t)}{2}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin 2\pi\nu\tau\,d\tau,\\
c(\nu)&=\overline{c(-\nu)}=A(\nu)-iB(\nu).
\end{aligned}\right\}\ (\nu\geqslant 0) \qquad (4.11\text{-}10)$$

$A(\nu)\equiv 0$, *если функция* $f(t)$ *нечетна*, а $B(\nu)\equiv 0$, *если функция* $f(t)$ четна (см. также п. 4.11-3, b).

Представление интегралом Фурье описывает функцию $f(t)$ как сумму бесконечно малых синусоидальных компонент с частотой ν или круговой частотой $\omega=2\pi\nu$ $(\nu\geqslant 0)$; функции $2|c(\nu)|$ и $\arg c(\nu)$ соответственно определяют амплитуду и фазу этих синусоидальных компонент.

Отметим, что $c(-\nu)\equiv\bar{c}(\nu)$, $C(-\omega)\equiv\bar{C}(\omega)$ и что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(\tau)]^2\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}|c(\nu)|^2\,d\nu\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}|C(\omega)|^2\,d\omega, \qquad (4.11\text{-}11)$$

если интеграл в левой части равенства существует (*теорема Парсеваля;* см. также табл. 4.11-2).

(d) Функции более общего типа могут быть представлены в виде суммы функции (8) и некоторого множества периодических функций (6), так что у них существуют как «дискретный спектр», так и «непрерывный спектр» (см. также п. 18.10-9). Рассмотрение рядов Фурье и интегралов Фурье может быть формально унифицировано с помощью введения *обобщенного преобразования Фурье* (п. 18.10-10).

(e) Теорема Пэли — Винера. *Пусть* $\varphi(\omega)$ — *действительная неотрицательная функция, определенная при* $-\infty<\omega<\infty$, *и* $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(\omega)\,d\omega$ *существует. Для того чтобы существовала действительная или комплекснозначная функция* $f(t)$, *равная нулю при* $t\geqslant 0$ *и такая, что ее преобразование Фурье* $C(\omega)$ *удовлетворяет условию*

$$|C(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{0}f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\right|=\varphi(\omega),$$

необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\ln\varphi(\omega)|}{1+\omega^2}\,d\omega$ *был сходящимся.*

Примечание. Теорему Пэли — Винера для преобразования Фурье в комплексной области см. в п. 7.6-5.

Свойства преобразования Фурье

(см. также п. 4.11-3 и табл. 8.3-1)

Пусть

$$\mathscr{F}[f(t)] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi i\nu t}\, dt = c(\nu) = \sqrt{2\pi}\, C(2\pi\nu),$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\nu)\, e^{2\pi i\nu t}\, d\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega,$$

$$\mathscr{F}_C[f(t)] = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos 2\pi\nu t\, dt = c_C(\nu),$$

$$\mathscr{F}_S[f(t)] = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin 2\pi\nu t\, dt = c_S(\nu)$$

и предположим, что рассматриваемые преобразования Фурье существуют.

(a) $\mathscr{F}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha\,\mathscr{F}[f_1(t)] + \beta\,\mathscr{F}[f_2(t)]$ (*линейность*),

$$\mathscr{F}[\overline{f(t)}] = \bar{c}(-\nu),$$

$\mathscr{F}[f(\alpha t)] = \dfrac{1}{\alpha}\, c\left(\dfrac{\nu}{\alpha}\right)$ $(\alpha > 0)$ (*теорема масштаба, теорема подобия*),

$\mathscr{F}[f(t+\tau)] = e^{2\pi i\nu\tau} c(\nu)$ (*теорема о сдвиге*).

(b) Если функция $f(t)$ непрерывна, то из $\mathscr{F}[f(t, \alpha)] \to \mathscr{F}[f(t)]$ при $\alpha \to a$ следует $f(t, \alpha) \to f(t)$ (*теорема непрерывности*). Аналогичные теоремы справедливы и для косинус- и синус-преобразований Фурье.

(c) $\left.\begin{aligned} &\mathscr{F}[f_1(t)]\,\mathscr{F}[f_2(t)] = \mathscr{F}[f_1(t) * f_2(t)], \\ &\mathscr{F}[f_1(t)\, f_2(t)] = \mathscr{F}[f_1(t)] * \mathscr{F}[f_2(t)] \end{aligned}\right\}$ (*теорема Бореля о свертке*),

где

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau$$

и

$$c_1(\nu) * c_2(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_1(\lambda)\, c_2(\nu-\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} c_1(\nu-\lambda)\, c_2(\lambda)\, d\lambda$$

(п. 4.6-13).

$\left.\begin{aligned} &\mathscr{F}\left[f(t)\, e^{2\pi i\nu_0 t}\right] = c(\nu-\nu_0), \\ &\mathscr{F}[f(t)\cos 2\pi\nu_0 t] = \frac{1}{2}[c(\nu-\nu_0) + c(\nu+\nu_0)], \\ &\mathscr{F}[f(t)\sin 2\pi\nu_0 t] = \frac{1}{2}[c(\nu-\nu_0) - c(\nu+\nu_0)] \end{aligned}\right\}$ (*теорема о модуляции*),

(d) $\mathscr{F}\left[f^{(r)}(t)\right] = (2\pi i\nu)^r\,\mathscr{F}[f(t)]$ $\quad (r = 0, 1, 2, \ldots)$

(*теорема о дифференцировании*),

если предположить, что производная $f^{(r)}(t)$ существует при всех t и что все производные меньшего порядка при $|t| \to +\infty$ стремятся к нулю.

(e) Если интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)|^2\, dt$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(t)|^2\, dt$ существуют, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathscr{F}[f_1(t)]}\,\mathscr{F}[f_2(t)]\, d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_1(t)}\, f_2(t)\, dt$$ (*теорема Парсеваля*).

Таблица 4.11-3

Преобразования Фурье

$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega$	$C(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$
$f(t)$	$C(\omega)$
$\frac{\sin at}{t}$ $(a>0)$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}$, $\lvert\omega\rvert<n$, 0, $\lvert\omega\rvert>a$
$e^{i\alpha t}$, $p<t<q$, 0, $t<p$, $t>q$	$\frac{i}{(2\pi)^{1/2}}\,\frac{e^{iq(\alpha-\omega)}-e^{ip(\alpha-\omega)}}{\omega-\alpha}$, $\omega\neq\alpha$, $\frac{q-p}{(2\pi)^{1/2}}$, $\omega=\alpha$
$e^{-ct+i\alpha t}$, $t>0$, 0, $t<0$ $(c>0)$	$\frac{i}{(2\pi)^{1/2}(\alpha-\omega+ic)}$
e^{-pt^2} $(\mathrm{Re}\, p>0)$, $e^{-t^2/2}$	$(2p)^{-1/2}e^{-\omega^2/4p}$, $e^{-\omega^2/2}$
$e^{i\alpha t^2}$, $\cos\alpha t^2$, $(\alpha>0)$ $\sin\alpha t^2$	$(2\alpha)^{-1/2}e^{-i\left(\frac{\omega^2}{4\alpha}-\frac{\pi}{4}\right)}$, $(2\alpha)^{-1/2}\cos\left(\frac{\omega^2}{4\alpha}-\frac{\pi}{4}\right)$, $(2\alpha)^{-1/2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega^2}{4\alpha}\right)$
$\lvert t\rvert^{-s}$ $(0<\mathrm{Re}\, s<1)$, $\lvert t\rvert^{-1/2}$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{1}{2}s\pi\right)\lvert\omega\rvert^{s-1}$, $\lvert\omega\rvert^{-1/2}$
$\frac{e^{-a\lvert t\rvert}}{\lvert t\rvert^{1/2}}$ $(a>0)$	$\frac{[(a^2+\omega^2)^{1/2}+a]^{1/2}}{(a^2+\omega^2)^{1/2}}$
$\frac{\operatorname{ch} at}{\operatorname{ch}\pi t}$ $(-\pi<a<\pi)$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{\cos(a/2)\operatorname{ch}(\omega/2)}{\operatorname{ch}\omega+\cos a}$
$\frac{\operatorname{sh} at}{\operatorname{sh}\pi t}$ $(-\pi<a<\pi)$	$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\frac{\sin a}{\operatorname{ch}\omega+\cos a}$

Таблица 4.11-3 (*продолжение*)

$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega$	$C(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$
$f(t)$	$C(\omega)$
$\frac{\operatorname{ch} at}{\operatorname{sh} \pi t}$ $(-\pi < a < \pi)$	$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{\operatorname{sh} \omega}{i(\operatorname{ch} \omega + \cos a)}$
$\frac{\operatorname{sh} at}{\operatorname{ch} \pi t}$ $(-\pi < a < \pi)$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sin(a/2)\operatorname{ch}(\omega/2)}{i(\operatorname{ch} \omega + \cos a)}$
$(a^2-t^2)^{-1/2}$, $\lvert t \rvert < a$, 0, $\lvert t \rvert > a$	$(\pi/2)^{1/2} J_0(a\omega)$
$\frac{\sin[b(a^2+t^2)^{1/2}]}{(a^2+t^2)^{1/2}}$	0, $\lvert\omega\rvert > b$, $(\pi/2)^{1/2} J_0(a\sqrt{b^2-\omega^2})$, $\lvert\omega\rvert < b$
$\frac{\cos(b\sqrt{a^2-t^2})}{(a^2-t^2)^{1/2}}$, $\lvert t \rvert < a$, 0, $\lvert t \rvert > a$	$(\pi/2)^{1/2} J_0(\sqrt{\omega^2+b^2})$
$\frac{\operatorname{ch}(b\sqrt{a^2-t^2})}{(a^2-t^2)^{1/2}}$, $\lvert t \rvert < a$, 0, $\lvert t \rvert > a$	$(\pi/2)^{1/2} J_0(\sqrt{\omega^2-b^2})$
$P_n(t)$, $\lvert t \rvert < 1$, 0, $\lvert t \rvert > 1$	$i^n \pi^{-1/2} J_{n+1/2}(\omega)$

4.11-5. Некоторые свойства коэффициентов Фурье и преобразования Фурье (см. также пп. 4.10.1 и 8.3-1).

(a) Теорема единственности Должным образом интегрируемая функция $f(t)$ однозначно определяет свои коэффициенты Фурье ($2b$) или свое преобразование Фурье. Обратно, *полный набор коэффициентов Фурье или преобразование Фурье однозначно определяет соответствующую функцию* $f(t)$ *почти всюду* (п. 4.6-11, b) *в интервале разложения;* в частности, *функция* $f(t)$ *однозначно определена в каждой точке непрерывности в интервале разложения.* Эта теорема единственности сохраняет силу даже в том случае, *если ряд Фурье или интеграл Фурье не сходятся* (см. также п. 4.11-7).

Заметим, что не каждый тригонометрический ряд (даже не каждый сходящийся тригонометрический ряд) является рядом Фурье и не каждая функция $c(\nu)$ является преобразованием Фурье (см. также п. 4.11-2, c)

(b) Операции над рядами Фурье. *Пусть* $f(t)$ — *функция с коэффициентами Фурье* a_k, b_k, c_k и $\varphi(t)$ — *функция с коэффициентами Фурье* α_k,

β_k, γ_k *для одного и того же интервала разложения, и пусть* λ *и* μ — *действительные числа. Тогда функция* $\lambda f(t)+\mu\varphi(t)$ *имеет коэффициенты Фурье* $\lambda a_k+\mu\alpha_k$, $\lambda b_k+\mu\beta_k$, $\lambda c_k+\mu\gamma_k$ (почленное сложение и умножение на число).

Почленное интегрирование ряда Фурье (2) *по интервалу* (t_0, t), *содержащемуся в интервале разложения, дает ряд, сходящийся к* $\int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau$. Если $f(t)$ — периодическая функция с периодом T, то эта теорема справедлива для любых значений t_0 и t.

Заметим, что эти теоремы не требуют сходимости данных рядов Фурье. По поводу дифференцирования бесконечных рядов см. п. 4.8-4.

(с) Свойства преобразования Фурье. Наиболее важные свойства преобразования Фурье перечислены в табл. 4.11-2 (см. также п. 8.3-1). Примеры преобразований Фурье приведены в табл. 4.11-3—4.11-5. Значительно более подробная таблица преобразований приведена в [8.2] и [8.7].

Отметим также, что

$$\mathscr{F}_c\,[f(t)\cos 2\pi\nu_0 t]=\frac{1}{2}\,[c_c(\nu+\nu_0)+c_c(\nu-\nu_0)],$$

$$\mathscr{F}_c\,[f(t)\sin 2\pi\nu_0 t]=\frac{1}{2}\,[c_s(\nu+\nu_0)-c_s(\nu-\nu_0)],$$

$$\mathscr{F}_s\,[f(t)\cos 2\pi\nu_0 t]=\frac{1}{2}\,[c_s(\nu+\nu_0)+c_s(\nu-\nu_0)],$$

$$\mathscr{F}_s\,[f(t)\sin 2\pi\nu_0 t]=\frac{1}{2}\,[c_c(\nu-\nu_0)-c_c(\nu+\nu_0)],$$

$$\mathscr{F}_c\,[f^{(2r)}(t)]=(-1)^r(2\pi\nu)^{2r}\mathscr{F}_c\,[f(t)]-2\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j(2\pi\nu)^{2j}f^{(2r-2j-1)}(+0),$$

$$\mathscr{F}_c\,[f^{(2r+1)}(t)]=(-1)^r(2\pi\nu)^{2r+1}\mathscr{F}_s\,[f(t)]-2\sum_{j=0}^{r}(-1)^j(2\pi\nu)^{2j}f^{(2r-2j)}(+0),$$

$$\mathscr{F}_s\,[f^{(r)}(t)]=2\pi\nu\,\mathscr{F}_c\,[f^{(r-1)}(t)]$$

при $r=0, 1, 2, \ldots$, предполагая, что производные в левых частях равенств существуют при $0<t<+\infty$ и что все производные меньшего порядка при $t\to+\infty$ стремятся к нулю.

4.11-6. Интегралы Дирихле и Фейера (см. также п. 4.11-7). Частичные суммы

$$s_0(t)=\frac{1}{2}a_0,\qquad s_n(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos k\frac{2\pi t}{T}+b_k\sin k\frac{2\pi t}{T}\right)$$

$$(n=1,\,2,\,\ldots)\qquad(4.11\text{-}12)$$

и соответствующие средние арифметические $\sigma_{n-1}(t)\equiv\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}s_k(t)$ (п. 4.8-6, с) ряда Фурье

Таблица 4.11-4

Косинус-преобразования Фурье

$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty C_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega$	$C_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(t)\cos\omega t\,dt$
$f(t)$	$C_c(\omega)$
$1,\ 0<t<a,$ $0,\ t>a$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{\sin\omega a}{\omega}$
$t^{-s}\ (0<\operatorname{Re} s<1)$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{1}{2}s\pi\right)\omega^{s-1}$
$\cos t,\quad 0<t<a,$ $0,\quad t>a$	$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\left[\frac{\sin a(1-\omega)}{1-\omega}+\frac{\sin a(1+\omega)}{1+\omega}\right]$
e^{-t}	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{1+\omega^2}$
e^{-t^2}	$\frac{1}{2}e^{-\omega^2/4}$
$\cos\left(\frac{1}{2}t^2\right)$	$\cos\left(\frac{\omega^2}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$
$\sin\left(\frac{1}{2}t^2\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega^2}{2}\right)$
$(1-t^2)^\nu,\quad 0<t<1,$ $0,\quad t>1$ $(\operatorname{Re}\nu>-1)$	$2^\nu\Gamma(\nu+1)\,\omega^{-\nu-1/2}J_{\nu+1/2}(\omega)$

Примечания.

1) Если $C_c(\omega)$ — косинус-преобразование Фурье для $f(t)$, то $f(\omega)$ — косинус-преобразование для $C_c(t)$.

2) Если $f(t)$ — четная функция в интервале $(-\infty,\infty)$, то косинус-преобразование Фурье для $f(t)$ $(0\leqslant t\leqslant\infty)$ есть $C(\omega)$.

3) Косинус-преобразование Фурье для $f(t/a)$, где $a>0$, есть $a\,C_c(a\omega)$.

Таблица 4.11-5

Синус-преобразования Фурье

$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty C_S(\omega)\sin\omega t\,d\omega$	$C_S(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(t)\sin\omega t\,dt$
$f(t)$	$C_S(\omega)$
$1,\quad 0<t<a,$ $0,\quad t>a$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1-\cos a\omega}{\omega}$
$t^{-s}\quad (0<\operatorname{Re} s<2)$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\Gamma(1-s)\cos\left(\frac{1}{2}s\pi\right)\omega^{s-1}$
e^{-t}	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{\omega}{1+\omega^2}$
$t^{n-1}e^{-at}\quad (a>0)$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(n-1)!\,(a^2+\omega^2)^{-n/2}\times$ $\times\sin(n\operatorname{arctg}\omega/a)$
$te^{-t^2/2}$	$\omega e^{-\omega^2/2}$
$\frac{\sin t}{t}$	$(2\pi)^{-1/2}\ln\left\|\frac{1+\omega}{1-\omega}\right\|$
$0,\quad 0<t<a,$ $(t^2-a^2)^{1/2},\quad t>a$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}J_0(a\omega)$
$t(1-t^2)^\nu,\quad 0<t<1,$ $0,\quad t>1$ $(\operatorname{Re}\nu>-1)$	$2^\nu\Gamma(\nu+1)\,\omega^{-\nu-1/2}J_{\nu+3/2}(\omega)$

Примечания.

1) Если $C_S(\omega)$ — синус-преобразование Фурье для $f(t)$, то $f(\omega)$ — синус-преобразование для $C_S(t)$.

2) Если $f(t)$ есть нечетная функция в интервале $(-\infty,\infty)$, то синус-преобразование Фурье для $f(t)$ $(0<t<\infty)$ есть $iC(\omega)$.

3) Синус-преобразование Фурье для $f(t/a)$, где $a>0$, есть $a\,C_S(a\omega)$.

(2) можно записать в виде

$$s_n(t)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t+\tau)\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi\tau}{T}}{\sin\frac{\pi\tau}{T}}\,d\tau=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\frac{f(t-\tau)+f(t+\tau)}{2}\,\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi\tau}{T}}{\sin\frac{\pi\tau}{T}}\,d\tau$$

$$\left(-\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2};\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\right), \qquad (4.11\text{-}13)$$

$$\sigma_{n-1}(t)=\frac{1}{nT}\int_{-T/2}^{T/2} f(t+\tau)\left(\frac{\sin n\frac{\pi\tau}{T}}{\sin\frac{\pi\tau}{T}}\right)^2 d\tau=\frac{2}{nT}\int_0^{T/2}\frac{f(t-\tau)+f(t+\tau)}{2}\left(\frac{\sin n\frac{\pi\tau}{T}}{\sin\frac{\pi\tau}{T}}\right)^2 d\tau$$

$$\left(-\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2};\ n=1,\ 2,\ \ldots\right) \qquad (4.11\text{-}14)$$

(см. также интегральную формулу Дирихле, п. 21.9-4, b).

4.11-7. Суммирование средними арифметическими.

(а) Частичные суммы ряда Фурье функции $f(t)$ могут не представлять собой полезных приближений функции $f(t)$. Это, в частности, может случиться, если ряд расходится или если эти частичные суммы «отходят» от функции $f(t)$ вблизи ее точки разрыва (неравномерная сходимость вблизи точки разрыва, *явление Гиббса*). В этом случае можно прибегнуть к суммированию средними арифметическими (п. 4.8-6, с).

Каждый ряд Фурье (2) *суммируем средними арифметическими к функции* $f(t)$ *при всех* t *в интервале* $(-T/2,\ T/2)$, *для которых функция* $f(t)$, *непрерывна; в точках разрыва первого рода средние арифметические сходятся к* $\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$ (*теорема Фейера*). Средние арифметические сходятся к $f(t)$ почти всюду в интервале разложения; они сходятся к $f(t)$ равномерно на каждом таком интервале $(a,\ b)\subset(a-\delta,\ b+\delta)\subset(-T/2,\ T/2)$, где $\delta>0$, что функция $f(t)$ на $(a-\delta,\ b+\delta)$ непрерывна.

(в) *Точно так же, если существует интеграл* $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\tau)|\,d\tau$ *и функция* $f(t)$ *непрерывна всюду, то средние арифметические*

$$\frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}}\int_0^{\lambda}d\xi\int_{-\xi}^{\xi}C(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t+\tau)\left(\frac{\sin\frac{\lambda\tau}{2}}{\frac{\lambda\tau}{2}}\right)^2 d\tau \qquad (4.11\text{-}15)$$

равномерно сходятся при $\lambda\to+\infty$ *к функции* $f(t)$ *на каждом ограниченном интервале*. Если функция $f(t)$ равномерно непрерывна на всем интервале $(-\infty,\ +\infty)$, то и равномерная сходимость распространяется на интервал $(-\infty,\ +\infty)$.

4.11-8 Кратные ряды и интегралы Фурье.

(а) Если задана n-мерная область разложения, определяемая неравенствами $a_j<t_j<a_j+T_j$, $j=1,\ 2,\ \ldots\ n$, то *кратный ряд Фурье*, порожденный функцией $f(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)$, для которой существует интеграл

$$\int_{a_1}^{a_1+T_1}\int_{a_2}^{a_2+T_2}\cdots\int_{a_n}^{a_n+T_n}|f(\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_n)|\,d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_n,$$

по определению есть

$$\left.\begin{gathered}\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=-\infty}^{\infty} c_{k_1k_2\ldots k_n}\exp\left[2\pi i\sum_{j=1}^{n}k_j\frac{t_j}{T_j}\right],\\ c_{k_1k_2\ldots k_n}=\frac{1}{T_1T_2\ldots T_n}\int_{a_1}^{a_1+T_1}\int_{a_2}^{a_2+T_2}\cdots\int_{a_n}^{a_n+T_n}f(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)\times\\ \times\exp\left[-2\pi i\sum_{j=1}^{n}k_j\frac{t_j}{T_j}\right]d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_n.\end{gathered}\right\}\quad(4.11\text{-}16)$$

(b) *Кратный интеграл Фурье*, порожденный функцией $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, для которой существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)|\,d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_n,$$

по определению есть

$$\left.\begin{gathered}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}C(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\exp\left[i\sum_{j=1}^{n}\omega_jt_j\right]d\omega_1d\omega_2\ldots d\omega_n,\\ C(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\equiv\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)\times\\ \times\exp\left[-i\sum_{j=1}^{n}\omega_j\tau_j\right]d\tau_1d\tau_2\ldots d\tau_n.\end{gathered}\right\}\quad(4.11\text{-}17)$$

Как и в равенстве (4), можно ввести $\nu_j=\omega_j/(2\pi)$. Для областей интегрирования, определяемых неравенствами $0<t_j<+\infty$ или $-\infty<t_j<0$, по аналогии с п 4.11-3 получают кратные синус- и косинус-интегралы Фурье.

(c) Если задана область разложения $-\infty<t_1<+\infty$, $a_2<t_2<a_2+T_2$, то для функции $f(t_1, t_2)$ можно получить «смешанное» разложение Фурье:

$$\left.\begin{gathered}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}C_k(\omega_1)\,e^{i\left(\omega_1t_1+k\frac{2\pi t_2}{T_2}\right)}d\omega_1,\\ C_k(\omega_1)\equiv\frac{1}{T_2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{a_2}^{a_2+T_2}f(\tau_1,\tau_2)\,e^{-i\left(\omega_1\tau_1+k\frac{2\pi\tau_2}{T_2}\right)}d\tau_1d\tau_2.\end{gathered}\right\}\quad(4.11\text{-}18)$$

Аналогично можно скомбинировать интегралы Фурье и ряды Фурье (а также синус- и косинус-интегралы Фурье) и в случае более чем двух измерений.

(d) Показательные функции в (16), (17) и (18) с помощью равенств (21.2-28) могут быть представлены в виде суммы синусов и косинусов. Все теоремы пп. 4.11-2 — 4.11-7 *могут быть обобщены на случай кратных рядов и интегралов Фурье.*

ГЛАВА 5
ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

5.1. ВЕКТОРЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В каждом классе векторов (например, перемещений, скоростей, сил, напряженностей магнитного поля) можно определить операции, известные как *сложение векторов* и *умножение их на* (*действительные*) *скаляры* (п. 5.2-1), а также как *скалярное умножение векторов* (п. 5.2-6). Классы векторов, встречающиеся в геометрии и физике, чаще всего связаны с двух- или трехмерным евклидовым пространством.

1. Векторы любого класса допускают однозначное представление в виде *перемещений* (т. е. *направленных отрезков*) в геометрическом пространстве. Это представление сохраняет соответствие между суммами векторов, произведениями их на скаляры и скалярными произведениями векторов (см. также пп. 12.1-6 и 14.2-1 — 14.2-7).
2. В большинстве приложений векторы появляются как *функции точки* в геометрическом пространстве (*вектор-функции точки*, п. 5.4-1).

Такие векторы, как скорости и силы, обычно впервые определяются на геометрическом языке как «величины, обладающие длиной и направлением», или, несколько точнее, как величины, которые могут быть представлены в виде направленных отрезков, складывающихся по «правилу параллелограмма». Такой геометрический подход, общий для большинства элементарных курсов, использован в пп. 5.2-1 и 5.2-8 при введении основных операций над векторами. Рассмотрение векторов с более общей точки зрения дано в п. 12.4-1 и в гл. 14.

Векторный анализ изучает векторные (и скалярные) функции. Любой вектор может быть задан набором числовых функций (*координат вектора*) в соответствующем базисе (пп.5.2-2, 5.2-3, 5.4-1 и 6.3-1).

Замечание. Описание физического состояния векторными величинами следует рассматривать не только как способ сокращенной записи системы координатных уравнений одним уравнением, но и как пример математической модели, элементы которой не ограничиваются числами. Заметим также, что класс объектов, допускающих взаимно однозначное соответствие с классом направленных отрезков, может и не являться векторным пространством, если у него нет описанных выше алгебраических свойств.

5.2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

5.2-1. Сложение векторов и умножение вектора на (действительный) скаляр. Векторная сумма $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ одного класса есть вектор, соответствующий геометрической сумме соответственных направленных отрезков (*правило параллелограмма*). **Произведение** вектора $\mathbf{a}$ на действительное число **(скаляр)** α есть вектор, соответствующий направленному отрезку, в $|\alpha|$ раз более длинному, чем отрезок, соответствующий вектору $\mathbf{a}$, и направленному в случае отрицательного α в сторону, противоположную вектору $\mathbf{a}$. *Нулевой вектор* $\mathbf{0}$ каждого класса векторов соответствует перемещению нулевой длины, и $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$.

Определенные таким образом сложение векторов и умножение их на скаляры удовлетворяют соотношениям:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a};\ \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}; \\ \alpha(\beta\mathbf{a})=(\alpha\beta)\mathbf{a};\ (\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a};\ \alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}; \\ 1\mathbf{a}=\mathbf{a};\ (-1)\cdot\mathbf{a}=-\mathbf{a};\ 0\mathbf{a}=0;\ \mathbf{a}-\mathbf{a}=0;\ \mathbf{a}+0=\mathbf{a}. \end{array}\right\} \qquad (5.2\text{-}1)$$

Обобщение векторной алгебры см. пп. 14.2-1 — 14.2-4.

5.2-2. Разложение векторов по базисным векторам. m векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ **линейно независимы**, если из

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda_m\mathbf{a}_m=0$$

следует

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0.$$

В противном случае эти векторы **линейно зависимы** (см. также пп. 1.9-3 и 14.2-3). Любой вектор $\mathbf{a}$ *трехмерного векторного пространства* может быть разложен по трем линейно независимым векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, т. е. представлен в виде их линейной комбинации

$$\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3. \qquad (5.2\text{-}2)$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ называются **координатами** вектора $\mathbf{a}$ по отношению к **базису**, определенному **базисными векторами** $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (см. также п. 14.2-4).

Если базисная система задана, то векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$ представляются упорядоченными тройками $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \ldots$ их координат; при этом $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и $\alpha\mathbf{a}$ представляются соответственно тройками $(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3)$ и $(\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \alpha\alpha_3)$. *Соотношения между векторами могут быть выражены через соответствующие системы соотношений между их координатами.*

Векторы, принадлежащие **двумерному векторному пространству** (например, плоские перемещения), представляются подобным образом упорядоченными *парами* координат.

Для разложения векторов, определенных в данной точке пространства (п. 5.4-1), обычно выбирают базис, связанный с используемой координатной системой. В гл 6 специально рассматривается разложение векторов по векторам локального базиса, направленным по координатным линиям криволинейной системы координат в каждой точке и перпендикулярно к ним; величины и направления векторов локального базиса, вообще говоря, различны в различных точках. Формулы преобразования координат вектора, заданных в различных базисах, даны в табл. 6.3-1 и в п. 14.6-1.

5.2-3. Декартовы прямоугольные координаты вектора. Если в пространстве задана правая прямоугольная система декартовых координат (п. 3.1-4), то единичные векторы (п. 5.2-5) $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ осей Ox, Oy и Oz соответственно образуют удобную систему базисных векторов. Координаты a_x, a_y, a_z вектора

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k} \qquad (5.2\text{-}3)$$

называются **декартовыми прямоугольными координатами вектора a.**

Заметим, что эти координаты

$$a_x=\mathbf{a}\cdot\mathbf{i},\quad a_y=\mathbf{a}\cdot\mathbf{j},\quad a_z=\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}$$

(п. 5.2-6) являются проекциями вектора $\mathbf{a}$; координаты $\mathbf{u}\cdot\mathbf{i}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{j}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{k}$ любого *единичного* вектора $\mathbf{u}$ являются его направляющими косинусами (п. 3.1-8).

5.2-4. Векторы и физические размерности. Векторы можно умножать не только на безразмерные скаляры (например, постоянный вектор скорости умножают на интервал времени, чтобы получить вектор перемещения). *Если физическая величина есть вектор* (2) *или* (3), *то ее физическую размерность целесообразно приписать координатам вектора, а не базисным векторам.* При этом последние рассматриваются как безразмерные величины и могут быть использованы в качестве общей базисной системы для различных классов векторов, имеющих различные физические размерности (например, перемещения, скорости, силы и т. п.; см. также п. 16.1-4).

5.2-5. Модуль (норма, абсолютная величина, длина) вектора. Модуль $|\mathbf{a}|$ вектора $\mathbf{a}$ в евклидовом пространстве есть скаляр, пропорциональный длине перемещения, соответствующего вектору $\mathbf{a}$ (п. 5.1-1; абстрактное определение см. пп. 14.2-5 и 14.2-7). Модуль вектора удовлетворяет соотношениям (1.1-4). Вектор, модуль которого равен 1, называется **единичным вектором** или **ортом.** (Попарно перпендикулярные) базисные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (п. 5.2-3) являются единичными, так что

$$\left.\begin{aligned} &|a_x\mathbf{i}| = |a_x|, \quad |a_y\mathbf{j}| = |a_y|, \quad |a_z\mathbf{k}| = |a_z|, \\ &|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.2\text{-}4)$$

5.2-6. Скалярное (внутреннее) произведение двух векторов. Скалярное произведение $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ [другое обозначение $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$] двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ есть скаляр

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\gamma, \qquad (5.2\text{-}5)$$

где γ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (абстрактное определение см. пп. 14.2-6 и 14.2-7).

Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — физические величины, то физическая размерность скалярного произведения $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ должна быть указана (см. также п. 5.2-4). В табл. 5.2-1

Таблица 5.2-1

Свойства скалярного произведения

(а) Основные соотношения:
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$; $\quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$; $\quad (\alpha\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$;
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = \lvert\mathbf{a}\rvert^2 \geqslant 0$; $\quad \lvert\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\rvert \leqslant \lvert\mathbf{a}\rvert\cdot\lvert\mathbf{b}\rvert$; $\quad \cos\gamma = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2}}$.
(b) Выражение в прямоугольных декартовых координатах (п. 5.2-3):
$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$; $\quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$;
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$;
$a_x = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}, \quad a_y = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j}, \quad a_z = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}$.

приведены основные соотношения для скалярного произведения. *Два ненулевых вектора* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ *взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

5.2-7. Векторное произведение двух векторов. Векторное произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (другое обозначение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$) двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ есть вектор, модуль которого равен

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\gamma; \qquad (5.2\text{-}6)$$

его направление перпендикулярно к обоим векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его повороте от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ на угол, меньший π. *Два вектора линейно зависимы* (п. 5.2-2) *тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю.* В табл. 5.2-2 приведены основные соотношения для векторного произведения. Более общее определение векторного произведения см. п. 16.8-4; в пп. 3.1-10 и 17.3-3 даны представления площади области как вектора.

Таблица 5.2-2

Свойства векторного произведения

(a) **Основные соотношения:**

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a};\quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c};\quad (\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b});$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0;\quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0.$$

b) **Выражение в любом базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:**

$$\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3;\quad \mathbf{b}=\beta_1\mathbf{e}_1+\beta_2\mathbf{e}_2+\beta_3\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 & \alpha_1 & \beta_1\\ \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 & \alpha_2 & \beta_2\\ \mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 & \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}.$$

(c) **Выражение в прямоугольных декартовых координатах:**

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0,\quad \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j};$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\mathbf{k}=$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\,\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\,\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\,\mathbf{k}.$$

5.2-8. Смешанное (векторно-скалярное) произведение.

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\equiv[\mathbf{abc}]=[\mathbf{bca}]=[\mathbf{cab}]=-[\mathbf{bac}]=-[\mathbf{cba}]=-[\mathbf{acb}],\qquad(5.2\text{-}7)$$

$$[\mathbf{abc}]^2=[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,(\mathbf{c}\times\mathbf{a})]=a^2b^2c^2-a^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})^2-b^2(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})^2-c^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2+$$

$$+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}\end{vmatrix}\qquad(5.2\text{-}8)$$

(*определитель Грама*, см. п. 14.2-6),

$$[\mathbf{abc}]\,[\mathbf{def}]=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{f}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{f}\\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{f}\end{vmatrix}.\qquad(5.2\text{-}9)$$

В любом базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (п. 5.2-2, см. также пп. 5.2-3 и 6.3-4)

$$[\mathbf{abc}]=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}[\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3].\qquad(5.2\text{-}10)$$

В правой системе декартовых прямоугольных координат

$$[\mathbf{abc}]=\begin{vmatrix}a_x & b_x & c_x\\ a_y & b_y & c_y\\ a_z & b_z & c_z\end{vmatrix}\qquad(5.2\text{-}11)$$

(>0, если векторы **a**, **b**, **c** образуют правую тройку).

5.2-9. Другие произведения, содержащие более двух векторов.

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\begin{vmatrix}\mathbf{b} & \mathbf{c}\\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) & (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\end{vmatrix} \tag{5.2-12}$$

(*двойное векторное произведение*),

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}, \tag{5.2-13}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2, \tag{5.2-14}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b})=[\mathbf{acd}]\,\mathbf{b}-[\mathbf{bcd}]\,\mathbf{a}=[\mathbf{abd}]\,\mathbf{c}-[\mathbf{abc}]\,\mathbf{d}. \tag{5.2-15}$$

5.2-10. Разложение вектора a по направлению единичного вектора u и ему перпендикулярному:

$$\mathbf{a}=\mathbf{u}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})+\mathbf{u}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{u}). \tag{5.2-16}$$

5.2-11. Решение уравнений ($[\mathbf{abc}]\neq 0$).

(a)

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}&=p,\\ \mathbf{x}\times\mathbf{a}&=\mathbf{b},\end{aligned}\right\}\quad \mathbf{x}=\mathbf{a}\frac{p}{\mathbf{a}^2}+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\frac{1}{\mathbf{a}^2}; \tag{5.2-17}$$

(b)

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}&=p,\\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{b}&=q,\\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{c}&=r,\end{aligned}\right\}\quad x=\frac{p(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+q(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+r(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{[\mathbf{abc}]}; \tag{5.2-18}$$

(c)

$$\mathbf{a}x+\mathbf{b}y+\mathbf{c}z+\mathbf{d}=0,$$

$$x=-\frac{[\mathbf{dbc}]}{[\mathbf{abc}]};\quad y=-\frac{[\mathbf{adc}]}{[\mathbf{abc}]};\quad z=-\frac{[\mathbf{abd}]}{[\mathbf{abc}]}; \tag{5.2-19}$$

(d)

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,x+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\,y+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,z+\mathbf{d}=0,$$

$$x=-\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}}{[\mathbf{abc}]};\quad y=-\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}}{[\mathbf{abc}]};\quad z=-\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{c}}{[\mathbf{abc}]}. \tag{5.2-20}$$

5.3. ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

5.3-1. Векторные функции и их пределы. Векторная функция $\mathbf{v}=\mathbf{v}(t)$ скалярного аргумента t ставит в соответствие каждому значению аргумента t из области определения (см. также п. 4.2-1) одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) «значений» вектора $\mathbf{v}$. В прямоугольных декартовых координатах

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}(t)=v_x(t)\,\mathbf{i}+v_y(t)\,\mathbf{j}+v_z(t)\,\mathbf{k}. \tag{5.3-1}$$

Вектор-функция $\mathbf{v}(t)$ **ограничена**, если ограничен ее модуль $|\mathbf{v}(t)|$. Она имеет **предел** $\mathbf{v}_1=\lim\limits_{t\to t_1}\mathbf{v}(t)$, если для каждого положительного числа ε существует такое число δ, что из $0<|t-t_1|<\delta$ следует $|\mathbf{v}(t)-\mathbf{v}_1|<\varepsilon$ (см. также пп. 4.4-1 и 12.5-3). Если $\lim\limits_{t\to t_1}\mathbf{v}(t)$ существует, то

$$\lim_{t\to t_1}\mathbf{v}(t)=\mathbf{i}\lim_{t\to t_1}v_x(t)+\mathbf{j}\lim_{t\to t_1}v_y(t)+\mathbf{k}\lim_{t\to t_1}v_z(t). \tag{5.3-2}$$

Предел суммы векторов, скалярного и векторного произведений находится по формулам, аналогичным формулам п. 4.4-2.

Вектор-функция $\mathbf{v}(t)$ **непрерывна** при $t=t_1$, если $\lim\limits_{t\to t_1}\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}(t_1)$ (см. также пп. 4.4-6 и 12.5-3).

5.3-2. Дифференцирование. Векторная функция $\mathbf{v}(t)$ **дифференцируема** при данном значении t, если существует конечная производная (см. также п. 4.5-1):

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t)}{\Delta t}. \tag{5.3-3}$$

Если производная $d^2\mathbf{v}/dt^2$ от $d\mathbf{v}/dt$ существует, она называется **второй производной** от $\mathbf{v}(t)$, и т. д. Табл. 5.3-1 содержит основные правила дифференцирования.

Таблица 5.3-1

Дифференцирование векторной функции скалярного аргумента

(a) Основные правила:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{v}(t) \pm \mathbf{w}(t)] = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{w}}{dt}; \qquad \frac{d}{dt}[\alpha\,\mathbf{v}(t)] = \alpha\frac{d\mathbf{v}}{dt}\ (\alpha = \text{const});$$

$$\frac{d}{dt}[f(t)\,\mathbf{v}(t)] = \frac{df}{dt}\mathbf{v}(t) + f(t)\frac{d\mathbf{v}}{dt}; \qquad \frac{d}{dt}[\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{w}(t)] = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{w}}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{v}(t)\times\mathbf{w}(t)] = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{w} + \mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{w}}{dt}; \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{v}[f(t)] = \frac{d\mathbf{v}}{df}\frac{df}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{v}(t)\,\mathbf{w}(t)\,\mathbf{u}(t)] = \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt}\mathbf{w}\mathbf{u}\right] + \left[\mathbf{v}\frac{d\mathbf{w}}{dt}\mathbf{u}\right] + \left[\mathbf{v}\mathbf{w}\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right].$$

(b) В прямоугольных декартовых координатах

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\mathbf{k}.$$

(c) Если базисные векторы $\mathbf{e}_1(t)$, $\mathbf{e}_2(t)$, $\mathbf{e}_3(t)$ — функции от t и $\mathbf{v}(t) = \alpha_1(t)\,\mathbf{e}_1(t) + \alpha_2(t)\,\mathbf{e}_2(t) + \alpha_3(t)\,\mathbf{e}_3(t)$, то

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{d\alpha_2}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{d\alpha_3}{dt}\mathbf{e}_3\right) + \left(\alpha_1\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + \alpha_2\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} + \alpha_3\frac{d\mathbf{e}_3}{dt}\right).$$

Аналогичные правила применимы к вычислению *частных производных* $\partial\mathbf{v}/\partial t_1$, $\partial\mathbf{v}/\partial t_2$, ... векторной функции $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t_1, t_2, \ldots)$ от двух или более скалярных аргументов t_1, t_2, ...

Замечание. Если $\mathbf{v}^0(t)$ — орт вектора $\mathbf{v}(t)$:

$$\mathbf{v}(t) = |\mathbf{v}(t)|\,\mathbf{v}^0(t),$$

то

$$\frac{d\mathbf{v}^0}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}^0 \quad \text{и} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt}\mathbf{v}^0 + |\mathbf{v}|\frac{d\mathbf{v}^0}{dt} = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt}\mathbf{v}^0 + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}, \tag{5.3-4}$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен (по правилу правого винта) вдоль оси, вокруг которой поворачивается вектор $\mathbf{v}(t)$, и имеет длину, равную *угловой скорости поворота вектора* $\mathbf{v}(t)$ по отношению к t. (Пример: *вектор угловой скорости* в физике; см. также п. 17.2-3). В формуле (4) первое слагаемое характеризует изменение длины вектора $\mathbf{v}(t)$, а второе слагаемое — изменение его направления. Если $|\mathbf{v}(t)| = \text{const}$, *то векторы* $\mathbf{v}(t)$ *и* $d\mathbf{v}/dt$ *перпендикулярны.*

5.3-3. Интегрирование и обыкновенные дифференциальные уравнения. Неопределенный интеграл $\mathbf{V}(t) = \int \mathbf{v}(t)\,dt$ от векторной функции $\mathbf{v}(t)$ определяется как решение векторного дифференциального уравнения (см. также п. 9.1-1):

$$\frac{d}{dt}\mathbf{V}(t) = \mathbf{v}(t), \tag{5.3-5}$$

которое можно заменить системой дифференциальных уравнений для координат вектора $\mathbf{V}(t)$. Другие обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие производные от векторной функции скалярного аргумента, трактуются подобным же образом.

Определенный интеграл

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b \mathbf{v}(t)\,dt = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{v}(\tau_i)\,(t_i - t_{i-1}),\\ &\text{где}\quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\\ &\text{и}\quad t_{i-1} \leqslant \tau_i \leqslant t_i;\ \delta = \max|t_i - t_{i-1}| \end{aligned}\right\} \tag{5.3-6}$$

(см. также п. 4.6-1), может быть выражен через координаты

$$\int_a^b \mathbf{v}(t)\,dt = \mathbf{i}\int_a^b v_x(t)\,dt + \mathbf{j}\int_a^b v_y(t)\,dt + \mathbf{k}\int_a^b v_z(t)\,dt. \tag{5.3-7}$$

5.4. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

5.4-1. Вводные замечания. Конец этой главы посвящен *скалярным и векторным функциям точки в евклидовом пространстве.* Если не оговорено противное, скалярные и векторные функции предполагаются однозначными, непрерывными и дифференцируемыми достаточное число раз. Соотношения между скалярными и векторными функциями устанавливаются:

1) в инвариантной форме (независимо от системы координат) и

2) в координатной форме по отношению к *правой прямоугольной* декартовой системе координат (п. 5.2-3), так что[1])

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{F}(x, y, z) \equiv F_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + F_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + F_z(x, y, z)\,\mathbf{k}. \qquad (5.4\text{-}1)$$

Соотношения в пп. 5.4-2—5.7-3 не зависят от выбора системы координат в пространстве. Запись векторных соотношений в локальных базисах систем криволинейных координат рассматривается в гл. 6.

5.4-2. Скалярные поля. Скалярное поле есть **скалярная функция точки** $\Phi(\mathbf{r}) \equiv \Phi(x, y, z)$ вместе с областью ее определения. Поверхности

$$\Phi(\mathbf{r}) \equiv \Phi(x, y, z) = \text{const} \qquad (5.4\text{-}2)$$

(п. 3.1-14) называются **поверхностями уровня** поля; они позволяют представить поле геометрически.

5.4-3. Векторные поля. Векторное поле есть **векторная функция точки** $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$ вместе с областью ее определения. **Векторные линии (линии тока)** в каждой точке $(\mathbf{r})$ имеют направление вектора поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ и определяются дифференциальными уравнениями

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dx}{F_x(x, y, z)} = \frac{dy}{F_y(x, y, z)} = \frac{dz}{F_z(x, y, z)}. \qquad (5.4\text{-}3)$$

Векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ может быть представлено геометрически своими векторными линиями, относительная плотность которых в каждой точке $(\mathbf{r})$ пропорциональна модулю $|\mathbf{F}(\mathbf{r})|$.

5.4-4. Векторный элемент линии и длина дуги (см. также п. 4.6-9).

(а) Векторный элемент линии (дифференциал радиуса-вектора) $d\mathbf{r}$ вдоль кривой C, описываемой уравнениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad (5.4\text{-}4)$$

определяется в каждой точке $(\mathbf{r}) \equiv [x(t), y(t), z(t)]$ формулой

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) dt = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\,dt. \qquad (5.4\text{-}5)$$

Вектор $d\mathbf{r}$ направлен по касательной к кривой C в каждой регулярной точке (см. также п. 17.2-2).

(b) Длина дуги s спрямляемой кривой (4) (п. 4.6-9) выражается формулой

$$s = \int_{t_0}^{t} ds,$$

где

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt =$$

$$= \frac{ds}{dt}\,dt = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}}\,dt \qquad (5.4\text{-}6)$$

в каждой регулярной точке $(\mathbf{r}) \equiv [x(t), y(t), z(t)]$ кривой C.

---

[1]) Всюду в гл. 5 и 6 индексы в обозначениях $F_x, F_y, F_z, \ldots$ не указывают на дифференцирование по $x, y, z, \ldots$

5.4-5. Криволинейные (линейные) интегралы (см. также п. 4.6-10). Для спрямляемой дуги C, заданной уравнением (4), скалярные интегралы

$$\left.\begin{aligned} &\int_C \Phi(\mathbf{r})\,ds = \int_C \Phi(x,\ y,\ z)\,ds = \int_C \Phi[x(t),\ y(t),\ z(t)]\frac{ds}{dt}\,dt,\\ &\int_C F(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_C F_x(x,\ y,\ z)\,dx + F_y(x,\ y,\ z)\,dy + F_z(x,\ y,\ z)\,dz =\\ &\qquad = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \int_C \left(F_x\frac{dx}{dt} + F_y\frac{dy}{dt} + F_z\frac{dz}{dt}\right)dt \end{aligned}\right\} \quad (5.4\text{-}7)$$

можно определить непосредственно как пределы сумм тем же способом, что и в п. 4.6-10; однако более удобно подставить функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$; dx/dt, dy/dt, dz/dt из формул (4) в формулу (7) и интегрировать по t.

Подобным же образом определяются и векторные криволинейные интегралы:

$$\int_C \Phi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \mathbf{i}\int_C \Phi(x,\ y,\ z)\,dx + \mathbf{j}\int_C \Phi(x,\ y,\ z)\,dy + \mathbf{k}\int_C \Phi(x,\ y,\ z)\,dz =$$
$$= \int_C \Phi(\mathbf{r})\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \int_C \left[\Phi(x,\ y,\ z)\frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \Phi(x,\ y,\ z)\frac{dy}{dt}\,\mathbf{j} + \Phi(x,\ y,\ z)\frac{dz}{dt}\,\mathbf{k}\right]dt, \quad (5.4\text{-}8)$$

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\times d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt =$$
$$= \mathbf{i}\int_C (F_y\,dz - F_z\,dy) + \mathbf{j}\int_C (F_z\,dx - F_x\,dz) + \mathbf{k}\int_C (F_x\,dy - F_y\,dx) =$$
$$= \int_C \left[\left(F_y\frac{dz}{dt} - F_z\frac{du}{dt}\right)\mathbf{i} + \left(F_z\frac{dx}{dt} - F_x\frac{dz}{dt}\right)\mathbf{j} + \left(F_x\frac{dy}{dt} - F_y\frac{dx}{dt}\right)\mathbf{k}\right]dt. \quad (5.4\text{-}9)$$

Значение скалярного или векторного криволинейного интеграла зависит от пути интегрирования C, если только не выполнены специальные условия п. 5.7-1.

Применение криволинейных координат см. пп. 6.2-3 и 6.4-3.

Замечание. Часто оказывается полезным в качестве нового параметра в выражения (7), (8), (9) ввести длину дуги s с помощью формулы (6).

5.4-6. Поверхностные интегралы (см. также пп. 4.6-12 и 17.3-3,c).

(a) В каждой регулярной точке двусторонней поверхности, заданной уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,\ v)$ (п. 3.1-14), можно определить **векторный элемент поверхности (вектор площадки)**

$$d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)du\,dv =$$
$$= \left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\mathbf{k}\right]du\,dv. \quad (5.4\text{-}10)$$

В случае замкнутой поверхности координаты u, v на поверхности обычно упорядочивают так, чтобы направление вектора $d\mathbf{S}$ (направление положительной нормали к поверхности, п. 17.3-2) было *внешним по отношению к телу, ограниченному данной поверхностью.*

Элемент площади поверхности в точке $(u,\ v)$ определяется так:

$$dS = |d\mathbf{S}| = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|du\,dv. \quad (5.4\text{-}11)$$

В частности, при $u = x$, $v = y$, $z = z(x,\ y)$

$$d\mathbf{S} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)dx\,dy, \qquad dS = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dx\,dy. \quad (5.4\text{-}12)$$

(b) В дальнейшем предполагается, что площадь $\int\limits_S dS$ (п. 4.6-11) рассматриваемой поверхности S существует; в этом случае формула (10) определяет элемент $d\mathbf{S}$ почти всюду на S (п. 4 6-14,b). Скалярные поверхностные интегралы

$$\int\limits_S \Phi(\mathbf{r})\,dS \quad \text{и} \quad \int\limits_S \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S} \tag{5.4-13}$$

и векторные поверхностные интегралы

$$\int\limits_S \Phi(\mathbf{r})\,d\mathbf{S} \quad \text{и} \quad \int\limits_S \mathbf{F}(\mathbf{r})\times d\mathbf{S} \tag{5.4-14}$$

от функций $\Phi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, заданных на поверхности, могут быть определены непосредственно как пределы сумм так же, как в пп. 4.6-1, 4.6-10 и 5.3-3. Однако удобнее применить формулу (10), чтобы выразить каждый поверхностный интеграл через двойной интеграл по координатам u, v (см. также п. 6.4-3,b). Иногда в формулах (13) и (14) вместо одного знака интеграла пишут два, например $\iint\limits_S \Phi(\mathbf{r})\,dS$. Скалярный поверхностный интеграл $\int\limits_S \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S}$ называется **потоком вектора $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ через поверхность** S. Заметим, что

$$\int\limits_S \mathbf{F}(x, y, z)\cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_S F_x[x(y, z), y, z]\,dy\,dz + \\ + \iint\limits_S F_y[x, y(x, z), z]\,dx\,dz + \iint\limits_S F_z[x, y, z(x, y)]\,dx\,dy. \tag{5.4-15}$$

В первом интеграле независимые переменные $u=y$, $v=z$, во втором интеграле $u=z$, $v=x$ и т. д. (см. также формулу (12)).

Формально к такому же результату приводит запись $d\mathbf{S} = dy\,dz\,\mathbf{i} + dz\,dx\,\mathbf{j} + dx\,dy\,\mathbf{k}$, но она требует специальных оговорок относительно смысла dx, dy, dz.

5.4-7. Объемные интегралы (см. также п. 4.6-12). Если дана область V в трехмерном евклидовом пространстве, то скалярный объемный интеграл

$$\int\limits_V \Phi(\mathbf{r})\,dV = \iiint\limits_V \Phi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \tag{5.4-16}$$

и векторный объемный интеграл

$$\int\limits_V \mathbf{F}(\mathbf{r})\,dV = \iiint\limits_V [F_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + F_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + F_z(x, y, z)\,\mathbf{k}]\,dx\,dy\,dz \tag{5.4-17}$$

могут быть определены как пределы сумм тем же способом, что и в п. 4.6-1; они могут быть также выражены непосредственно через тройные интегралы по x, y, z. О применении криволинейных координат см. пп. 6.2-3,b и 6.4-3,c.

5.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

5.5-1. Градиент, дивергенция и ротор; инвариантные определения. Градиент скалярной функции точки $\Phi(\mathbf{r}) \equiv \Phi(x, y, z)$ есть *векторная* функция точки, определяемая формулой

$$\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) \equiv \nabla\Phi \equiv \lim_{\delta\to 0}\frac{\int\limits_{S_1}\Phi(\mathbf{r}_1)\,d\mathbf{S}}{\int\limits_{V_1} dV}, \tag{5.5-1}$$

где V_1 — область, содержащая точку (r), S_1 — замкнутая поверхность, ограничивающая область V_1, δ — наибольшее расстояние от точки (r) до точек поверхности S_1.

Дивергенция векторной функции точки $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ есть *скалярная* функция точки, определяемая формулой

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \nabla\cdot\mathbf{F} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\int\limits_{S_1} d\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}_1)}{\int\limits_{V_1} dV}. \tag{5.5-2}$$

Ротор векторной функции точки $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ есть *векторная* функция точки, определяемая формулой

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \nabla\times\mathbf{F} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\int\limits_{S_1} d\mathbf{S}\times\mathbf{F}(\mathbf{r}_1)}{\int\limits_{V_1} dV}. \tag{5.5-3}$$

Замечание. В каждой точке, где существует вектор $\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) \neq 0$, его модуль

$$|\nabla\Phi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2} \tag{5.5-4}$$

равен наибольшей производной по направлению $d\Phi/ds$ в этой точке, а его направление совпадает с направлением, в котором эта наибольшая производная достигается (п. 5.5-3,c). Векторные линии поля $\operatorname{grad}\Phi$ определяются уравнениями

$$d\mathbf{r}\times\nabla\Phi = 0 \quad \text{или} \quad dx:dy:dz = \frac{\partial\Phi}{\partial x}:\frac{\partial\Phi}{\partial y}:\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \tag{5.5-5}$$

Линии градиента, определяемые этими уравнениями, перпендикулярны к поверхностям уровня (5.4-2).

5.5-2. Оператор ∇. В прямоугольных декартовых координатах линейный оператор ∇ (набла) определяется формулой

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{5.5-6}$$

Его применение к скалярным и векторным функциям точки формально соответствует некоммутативной операции умножения на вектор с декартовыми координатами $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\Phi(x, y, z) \equiv \operatorname{grad}\Phi(x, y, z) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{k},\\
&\nabla\cdot\mathbf{F}(x, y, z) \equiv \operatorname{div}\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z},\\
&\nabla\times\mathbf{F}(x, y, z) \equiv \operatorname{rot}\mathbf{F}(x, y, z) =\\
&= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},\\
&(\mathbf{G}\cdot\nabla)\Phi = G_x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + G_y\frac{\partial\Phi}{\partial y} + G_z\frac{\partial\Phi}{\partial z},\\
&(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} = G_x\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x} + G_y\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y} + G_z\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z} =\\
&\qquad = (\mathbf{G}\cdot\nabla F_x)\mathbf{i} + (\mathbf{G}\cdot\nabla F_y)\mathbf{j} + (\mathbf{G}\cdot\nabla F_z)\mathbf{k}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.5-7}$$

В таблице 5.5-1 приведены правила действий с оператором ∇.

Таблица 5.5-1

Правила действий с оператором ∇

(a) **Линейность** ($\alpha = \text{const}$)

$$\nabla(\Phi + \Psi) = \nabla\Phi + \nabla\Psi; \qquad \nabla(\alpha\Phi) = \alpha\,\nabla\Phi;$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla\cdot\mathbf{F} + \nabla\cdot\mathbf{G}; \qquad \nabla\cdot(\alpha\mathbf{F}) = \alpha\,\nabla\cdot\mathbf{F};$$
$$\nabla\times(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla\times\mathbf{F} + \nabla\times\mathbf{G}; \qquad \nabla\times(\alpha\mathbf{F}) = \alpha\,\nabla\times\mathbf{F}.$$

(b) **Действия с произведениями**

$$\nabla(\Phi\Psi) = \Psi\,\nabla\Phi + \Phi\,\nabla\Psi;$$
$$\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) = (\mathbf{F}\cdot\nabla)\,\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\,\mathbf{F} + \mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{G}) + \mathbf{G}\times(\nabla\times\mathbf{F});$$
$$\nabla\cdot(\Phi\mathbf{F}) = \Phi\,\nabla\cdot\mathbf{F} + (\nabla\Phi)\cdot\mathbf{F};$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\nabla\times\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\nabla\times\mathbf{G};$$
$$(\mathbf{G}\cdot\nabla)\,\Phi\mathbf{F} = \mathbf{F}\,(\mathbf{G}\cdot\nabla\Phi) + \Phi\,(\mathbf{G}\cdot\nabla)\,\mathbf{F};$$
$$\nabla\times(\Phi\mathbf{F}) = \Phi\nabla\times\mathbf{F} + \nabla\Phi\times\mathbf{F};$$
$$\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = (\mathbf{G}\cdot\nabla)\,\mathbf{F} - (\mathbf{F}\cdot\nabla)\,\mathbf{G} + \mathbf{F}\,(\nabla\cdot\mathbf{G}) - \mathbf{G}\,(\nabla\cdot\mathbf{F});$$
$$(\mathbf{G}\cdot\nabla)\,\mathbf{F} = \frac{1}{2}\,[\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) + \nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) - \mathbf{F}\,(\nabla\cdot\mathbf{G}) + \mathbf{G}\,(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{G}) - \mathbf{G}\times(\nabla\times\mathbf{F})].$$

Заметим, что векторные соотношения, содержащие $\nabla\Phi$, $\nabla\cdot\mathbf{F}$ и $\nabla\times\mathbf{F}$, не зависят от выбора системы координат. Выражение операций $\nabla\Phi$, $\nabla\cdot\mathbf{F}$ и $\nabla\times\mathbf{F}$ в различных системах координат см. в гл. 6 и п. 16.10-7.

5.5-3. Полный дифференциал, полная производная и производная по направлению.

(a) **Полный дифференциал** $d\Phi$ скалярной функции точки $\Phi(\mathbf{r})$, соответствующий перемещению точки $d\mathbf{r} \equiv dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$, есть

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\,dz = d\mathbf{r}\cdot\operatorname{grad}\Phi = (d\mathbf{r}\cdot\nabla)\,\Phi \qquad (5.5\text{-}8)$$

(см. также п. 4.5-3,а).

(b) **Полная производная** $d\Phi/dt$ функции $\Phi(\mathbf{r})$ вдоль кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ есть скорость изменения функции $\Phi(\mathbf{r})$ по отношению к параметру t, когда $\mathbf{r}$ изменяется как функция от t (см. также табл. 4.5-2,а):

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)\Phi, \qquad (5.5\text{-}9)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ или $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Замечание. Если функция Φ явно зависит от t, т. е. $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$, то

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial t}. \qquad (5.5\text{-}10)$$

(c) **Производная по направлению** $d\Phi/ds$ от скалярной функции точки $\Phi(\mathbf{r})$ есть скорость изменения функции по отношению к величине перемещения s точки $(\mathbf{r})$ вдоль выбранного направления. Если направление задано единичным вектором $\mathbf{u} \equiv \cos\alpha_x\,\mathbf{i} + \cos\alpha_y\,\mathbf{j} + \cos\alpha_z\,\mathbf{k}$ с направляющими косинусами $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$ (п. 3.1-8, а), то производная по этому направлению равна

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\cos\alpha_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cos\alpha_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\cos\alpha_z = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\Phi; \qquad (5.5\text{-}11)$$

$d\Phi/ds$ есть полная производная от функции $\Phi(\mathbf{r})$ по длине дуги s кривой, касающейся вектора $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/ds$.

(d) Полный дифференциал, полная производная и производная по направлению от векторной функции точки $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ определяются аналогично:

$$\left.\begin{aligned}
d\mathbf{F} &= (d\mathbf{r}\cdot\nabla)\,\mathbf{F} = (d\mathbf{r}\cdot\nabla)\,F_x\mathbf{i} + (d\mathbf{r}\cdot\nabla)\,F_y\,\mathbf{j} + (d\mathbf{r}\cdot\nabla)F_z\,\mathbf{k} = \\
&= dF_x\,\mathbf{i} + dF_y\,\mathbf{j} + dF_z\,\mathbf{k}, \\
\frac{d\mathbf{F}}{dt} &= \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)\mathbf{F} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)F_x\,\mathbf{i} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)F_y\,\mathbf{j} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)F_z\,\mathbf{k} = \\
&= \frac{dF_x}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dF_y}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{dF_z}{dt}\,\mathbf{k}, \\
\frac{d\mathbf{F}}{ds} &= (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{F} = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,F_x\,\mathbf{i} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,F_y\,\mathbf{j} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)F_z\,\mathbf{k} = \\
&= \frac{dF_x}{ds}\,\mathbf{i} + \frac{dF_y}{ds}\,\mathbf{j} + \frac{dF_z}{ds}\,\mathbf{k}\quad\left(\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(5.5\text{-}12)$$

5.5-4. Производные высших порядков по направлению. Ряд Тейлора. Производные порядка n от функций Φ и $\mathbf{F}$ по направлению единичного вектора $\mathbf{u}$ определяются формулами

$$\frac{d^n}{ds^n}\,\Phi(\mathbf{r}) = (\mathbf{u}\cdot\nabla)^n\,\Phi(\mathbf{r}) \quad \text{и} \quad \frac{d^n}{ds^n}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (\mathbf{u}\cdot\nabla)^n\,\mathbf{F}(\mathbf{r}). \qquad (5.5\text{-}13)$$

Если рассматриваемые ниже ряды сходятся, то (см. также п. 4.10-5)

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) &= \Phi(\mathbf{r}) + (\Delta\mathbf{r}\cdot\nabla)\,\Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!}\,(\Delta\mathbf{r}\cdot\nabla)^2\,\Phi(\mathbf{r}) + \ldots = \\
&= e^{(\Delta\mathbf{r}\cdot\nabla)}\,\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + \Delta r\,\frac{d}{ds}\,\Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!}\,(\Delta r)^2\,\frac{d^2}{ds^2}\,\Phi(\mathbf{r}) + \ldots,
\end{aligned}\qquad (5.5\text{-}14a)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) + (\Delta\mathbf{r}\cdot\nabla)\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!}\,(\Delta\mathbf{r}\cdot\nabla)^2\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \ldots = \\
&= e^{(\Delta\mathbf{r}\cdot\nabla)}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \Delta r\,\frac{d}{ds}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!}\,(\Delta r)^2\,\frac{d^2}{ds^2}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \ldots,
\end{aligned}\qquad (5.5\text{-}14b)$$

где все производные по направлению берутся в точке $(\mathbf{r})$ в направлении $\Delta\mathbf{r}$, а $\Delta r = |\Delta\mathbf{r}|$.

5.5-5. Оператор Лапласа. Оператор Лапласа (лапласиан) $\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla$ (обозначаемый иногда через Δ) выражается в декартовых прямоугольных координатах формулой

$$\nabla^2 \equiv \nabla\cdot\nabla \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (5.5\text{-}15)$$

(другие выражения см. гл. 6 и п. 16.10-7). Этот оператор может быть применен к скалярным и векторным функциям точки с помощью некоммутативного скалярного «умножения»:

$$\left.\begin{aligned}
\nabla^2\Phi &\equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi(x, y, z), \\
\nabla^2\mathbf{F} &\equiv \nabla^2 F_x\,\mathbf{i} + \nabla^2 F_y\,\mathbf{j} + \nabla^2 F_z\,\mathbf{k}.
\end{aligned}\right\}\qquad (5.5\text{-}16)$$

Заметим, что

$$\nabla^2(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha\,\nabla^2\Phi + \beta\,\nabla^2\Psi \ \text{(линейность)}, \qquad (5.5\text{-}17)$$

$$\nabla^2(\Phi\Psi) = \Psi\,\nabla^2\Phi + 2\,(\nabla\Phi)\cdot(\nabla\Psi) + \Phi\,\nabla^2\Psi. \qquad (5.5\text{-}18)$$

5.5-6. Операции второго порядка. Отметим следующие правила повторного применения оператора ∇:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi &= \nabla\cdot(\nabla\Phi) = \nabla^2\Phi, \\
\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) = \nabla^2\mathbf{F} + \nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}), \\
\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}, \\
\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi &= \nabla\times(\nabla\Phi) = 0, \\
\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) = 0.
\end{aligned}\right\}\qquad (5.5\text{-}19)$$

5.5-7. Операции над простейшими функциями от r. В табл. 5.5-2 и 5.5-3 приведены результаты применения дифференциальных операций к некоторым простейшим скалярным и векторным функциям от радиуса-вектора **r**.

Таблица 5.5-2

Операции над скалярными функциями

($r \equiv |\mathbf{r}|$, $\mathbf{a} = \text{const}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

Φ	$\nabla\Phi$	$\nabla^2\Phi$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$	$\mathbf{a}$	0
r^n	$nr^{n-2}\mathbf{r}$	$n(n+1)r^{n-2}$
$\ln r$	$\dfrac{\mathbf{r}}{r^2}$	$\dfrac{1}{r^2}$

Таблица 5.5-3

Операции над векторными функциями

$\mathbf{F}$	$\nabla \cdot \mathbf{F}$	$\nabla \times \mathbf{F}$	$(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$	$\nabla^2\mathbf{F}$	$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$
$\mathbf{r}$	3	0	$\mathbf{G}$	0	0
$\mathbf{a} \times \mathbf{r}$	0	$2\mathbf{a}$	$\mathbf{a} \times \mathbf{G}$	0	0
$\mathbf{a}r^n$	$nr^{n-2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})$	$nr^{n-2}(\mathbf{r} \times \mathbf{a})$	$nr^{n-2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{G})\mathbf{a}$	$n(n+1) \times r^{n-2}\mathbf{a}$	$nr^{n-2}\mathbf{a} + n(n-2)r^{n-4} \times (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{r}$
$\mathbf{r}r^n$	$(n+3)r^n$	0	$r^n\mathbf{G} + nr^{n-2} \times (\mathbf{r} \cdot \mathbf{G})\mathbf{r}$	$n(n+3) \times r^{n-2}\mathbf{r}$	$n(n+3)r^{n-2}\mathbf{r}$
$\mathbf{a}\ln r$	$\dfrac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^2}$	$\dfrac{\mathbf{r} \times \mathbf{a}}{r^2}$	$\dfrac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}}{r^2}$	$\dfrac{\mathbf{a}}{r^2}$	$\dfrac{\mathbf{a}}{r^2} - \dfrac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{r}}{r^4}$

Дополнительные формулы могут быть получены с помощью табл. 5.5-1. Отметим еще формулы

$$\{\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\}\mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \tag{5.5-20}$$

$$\nabla \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\nabla \times \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad \text{при} \quad \mathbf{a} = \text{const}. \tag{5.5-21}$$

5.5-8. **Функции от двух и более радиусов-векторов.** В типичном случае двух радиусов-векторов $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ и $\boldsymbol{\varrho} \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ к функциям вида $\Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varrho}) \equiv \Phi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varrho}) \equiv \mathbf{F}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ могут быть применены **два различных оператора** ∇:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}; \qquad \nabla_{\varrho} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial \eta}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\mathbf{k}.$$

В частности, имеем

$$\left.\begin{aligned} \nabla\Phi(\mathbf{r} - \boldsymbol{\varrho}) &= -\nabla_{\varrho}\Phi(\mathbf{r} - \boldsymbol{\varrho}), \\ \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\varrho}) &= -\nabla_{\varrho} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\varrho}), \\ \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\varrho}) &= -\nabla_{\varrho} \times \mathbf{F}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\varrho}). \end{aligned}\right\} \tag{5.5-22}$$

5.6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

5.6-1. Теорема о дивергенции *) и связанные с ней теоремы.

(a) В табл. 5.6-1 собраны важнейшие теоремы, связывающие объемные интегралы по области V и поверхностные интегралы по границе S этой области. Область V предполагается ограниченной и пространственно-односвязной (п. 4.3-6), поверхность S — замкнутой и регулярной (п. 3.1-14), функции — однозначными и непрерывными в V и на S, причем *все частные производные,*

Таблица 5.6-1

Теоремы, связывающие объемные и поверхностные интегралы

1. Теорема о дивергенции	$\int\limits_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})\, dV = \int\limits_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$
2. Теорема о роторе	$\int\limits_V \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})\, dV = \int\limits_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$
3. Теорема о градиенте	$\int\limits_V \nabla \Phi(\mathbf{r})\, dV = \int\limits_S d\mathbf{S}\, \Phi(\mathbf{r})$
4. Теоремы Грина	$\int\limits_V \nabla\Phi \cdot \nabla\Psi\, dV + \int\limits_V \Psi \nabla^2\Phi\, dV = \int\limits_S d\mathbf{S} \cdot (\Psi \nabla\Phi) = \int\limits_S \Psi \frac{\partial\Phi}{\partial n}\, dS,$ $\int\limits_V (\Psi \nabla^2\Phi - \Phi \nabla^2\Psi)\, dV = \int\limits_S d\mathbf{S} \cdot (\Psi \nabla\Phi - \Phi \nabla\Psi) = \int\limits_S \left(\Psi \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial\Psi}{\partial n}\right) dS$
5. Частные случаи	$\int\limits_V \nabla^2\Phi\, dV = \int\limits_S d\mathbf{S} \cdot \nabla\Phi = \int\limits_S \frac{\partial\Phi}{\partial n}\, dS$ (*теорема Гаусса*), $\int\limits_V \lvert\nabla\Phi\rvert^2\, dV + \int\limits_V \Phi \nabla^2\Phi\, dV = \int\limits_S d\mathbf{S} \cdot (\Phi \nabla\Phi) = \int\limits_S \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n}\, dS$

встречающиеся в объемных или поверхностных интегралах, предполагаются непрерывными соответственно в V или на S. Все теоремы остаются справедливыми и для неограниченной области, если подынтегральные функции в поверхностных интегралах имеют порядок $O(1/r^3)$ при $r \to \infty$ (п. 4.4-3). Формулы для поверхностных и объемных интегралов в системах криволинейных координат см. гл. 6 и п. 17.3-3; приложения см. пп. 15.6-5 и 15.6-10.

Словесная формулировка теоремы о дивергенции (теоремы Гаусса-Остроградского) такова. *Поток вектора через замкнутую поверхность* (п. 5.4-6) *равен интегралу от дивергенции по объему, ограниченному этой поверхностью.*

(b) Замечание о нормальной производной. **Нормальная производная** от скалярной функции $\Phi(\mathbf{r})$ в регулярной точке поверхности S

*) Эта теорема в отечественной литературе называется *теоремой Гаусса — Остроградского.*

есть производная по направлению положительной нормали, т. е. $d\mathbf{S}$ (если поверхность замкнута, то обычно берут *внешнюю нормаль*, п. 17.3-2).

Нормальная производная обозначается обычно через $\partial\Phi/\partial n$, так что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}\, dS \equiv (d\mathbf{S}\cdot\nabla)\,\Phi.$$

5.6-2. Теорема о роторе и связанные с ней теоремы. Если векторная функция $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ однозначна и имеет непрерывные частные производные всюду в конечной поверхностно-односвязной области V и если лежащая в области V поверхность S односвязна, регулярна и ограничена регулярной замкнутой кривой C, то

$$\int_S d\mathbf{S}\cdot[\nabla\times\mathbf{F}(\mathbf{r})] = \oint_C d\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (\textit{теорема Стокса}), \tag{5.6-1}$$

т. е. *криволинейный интеграл от* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *по замкнутому контуру* C *равен потоку ротора* $\nabla\times\mathbf{F}$ *через поверхность, натянутую на контур* C. Ориентация вектора площадки $d\mathbf{S}$ должна быть согласована с ориентацией контура C по правилу правого винта. (Точнее, такая ориентация производится у края поверхности, а затем продолжается по непрерывности.)

При тех же условиях, что и выше,

$$\int_S (d\mathbf{S}\times\nabla)\times\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \oint_C d\mathbf{r}\times\mathbf{F}(\mathbf{r}), \tag{5.6-2}$$

и для любой однозначной скалярной функции $\Phi(\mathbf{r})$ с непрерывными частными производными в области V

$$\int_S d\mathbf{S}\times\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \oint_C d\mathbf{r}\,\Phi(\mathbf{r}). \tag{5.6-3}$$

Формулы (1), (2), (3) остаются справедливыми и для неограниченной области V, если подынтегральная функция в криволинейном интеграле справа имеет порядок $O(1/r^2)$ при $r\to\infty$ (п. 4.4-3).

5.6-3. Поля с разрывами на поверхностях (см. также п. 15.6-5, b). Пусть скалярная функция $\Phi(\mathbf{r})$ или координаты векторной функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ непрерывно дифференцируемы по обе стороны от регулярной поверхности S_1, но разрывны на S_1, причем существуют предельные значения как на одной (положительной) стороне поверхности

$$\Phi_+(\mathbf{r}) \quad \text{или} \quad \mathbf{F}_+(\mathbf{r}),$$

так и на другой (отрицательной) стороне поверхности

$$\Phi_-(\mathbf{r}) \quad \text{или} \quad \mathbf{F}_-(\mathbf{r}).$$

В каждой точке $(\mathbf{r})$ поверхности S_1 определим функции

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{n}^0(\mathbf{r})\,[\Phi_+(\mathbf{r})-\Phi_-(\mathbf{r})] \quad (\textit{поверхностный градиент}),\\
&\mathbf{n}^0(\mathbf{r})\cdot[\mathbf{F}_+(\mathbf{r})-\mathbf{F}_-(\mathbf{r})] \quad (\textit{поверхностная дивергенция}),\\
&\mathbf{n}^0(\mathbf{r})\times[\mathbf{F}_+(\mathbf{r})-\mathbf{F}_-(\mathbf{r})] \quad (\textit{поверхностный ротор}),
\end{aligned}\right\} \tag{5.6-4}$$

где $\mathbf{n}^0$ — орт положительной нормали к поверхности S_1 в точке $(\mathbf{r})$ (п. 17.3-2). Тогда *интегральные теоремы табл.* 5.6-1 *останутся в силе и для таких функций, если в точках поверхности* S_1 *заменить в объемных интегралах градиент, дивергенцию и ротор на их поверхностные аналоги.*

5.7. ОТЫСКАНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ПО ЕГО РОТОРУ И ДИВЕРГЕНЦИИ

5.7-1. Безвихревое векторное поле. Векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ называется **безвихревым** в области V, если в каждой точке этой области

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\times\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0,\\
\text{т. е.}\quad &\frac{\partial F_y}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_x}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial x}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{5.7-1}$$

Поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *является безвихревым тогда и только тогда, когда* $-\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *есть градиент* $\nabla\Phi(\mathbf{r})$ *некоторой скалярной функции точки* $\Phi(\mathbf{r})$ *в каждой точке области* V (см. также формулу (5.5-19)); *в этом случае выражение*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \equiv F_x(x, y, z)\,dx + F_y(x, y, z)\,dy + F_z(x, y, z)\,dz \equiv \equiv -d\mathbf{r}\cdot\nabla\Phi(\mathbf{r}) \equiv -d\Phi \tag{5.7-2}$$

есть полный дифференциал (п. 4.5-3, а). Функцию $\Phi(\mathbf{r})$ часто называют **скалярным потенциалом** безвихревого векторного поля.

Если область V *псверхностно-односвязна* (п. 4.3-6. b), *то* $\Phi(\mathbf{r})$ — *однозначная функция, определяемая по* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *с точностью до аддитивной постоянной, и криволинейный интеграл от* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *по кривой* C, *лежащей в области* V, *не зависит от пути интегрирования*:

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho})\cdot d\boldsymbol{\rho} = -[\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{a})]. \tag{5.7-3}$$

В этом случае указывают только нижний и верхний пределы интегрирования.

Криволинейный интеграл $\oint \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho})\cdot d\boldsymbol{\rho}$ по любому замкнутому пути C (циркуляция вектора $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ вдоль C) в области V равен нулю. Если область V многосвязна, то функция $\Phi(\mathbf{r})$ может быть многозначной.

В частности, условие

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \equiv 0 \tag{5.7-4}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы криволинейный интеграл

$$\int_C F_x(x, y)\,dx + F_y(x, y)\,dy$$

не зависел от пути интегрирования, т. е. чтобы подынтегральное выражение было полным дифференциалом [1]).

5.7-2. Соленоидальные (трубчатые) векторные поля. Векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ называется **соленоидальным** в области V, если в каждой точке этой области

$$\nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0. \tag{5.7-5}$$

Векторное поле является соленоидальным тогда и только тогда, когда $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ есть ротор $\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})$ некоторой векторной функции точки $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (см. также формулы (5.5-19)), которая называется **векторным потенциалом** векторного поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

5.7-3. Отыскание векторного поля по его ротору и дивергенции.

(а) Пусть V — конечная открытая область пространства, ограниченная регулярной поверхностью S (п. 3.1-14), положительная нормаль которой однозначно определена и непрерывна в каждой точке поверхности.

Если дивергенция и ротор поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *определены в каждой точке* $(\mathbf{r})$ *области* V, *то всюду в* V *функция* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *может быть представлена в виде суммы безвихревого поля* $\mathbf{F}_1(\mathbf{r})$ *и соленоидального поля* $\mathbf{F}_2(\mathbf{r})$:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{r}), \\ \text{где}\quad &\nabla\times\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = 0; \quad \nabla\cdot\mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.7-6}$$

(*теорема разложения Гельмгольца*).

[1]) См. сноску к п. 5.4-1.

Функция $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *определяется однозначно при дополнительном условии задания нормальной составляющей* $\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\frac{d\mathbf{S}}{|d\mathbf{S}|}$ *функции* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *в каждой точке поверхности* S (*теорема единственности*).

Эффективное отыскание функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ по этим данным сводится к решению дифференциальных уравнений с частными производными при некоторых краевых условиях. Важный частный случай, в котором

$$\nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r})=0,\qquad \nabla\times\mathbf{F}(\mathbf{r})=0,$$

и, значит, всюду в V

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=-\nabla\Phi(\mathbf{r}),\qquad \nabla^2\Phi(\mathbf{r})=0,$$

рассматривается в теории потенциала (пп. 15.6-1—15.6-10).

(b) Если в каждой точке ($\mathbf{r}$) пространства заданы функции

$$\nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r})=4\pi Q(\mathbf{r});\qquad \nabla\times\mathbf{F}(\mathbf{r})=4\pi\mathbf{I}(\mathbf{r}),\tag{5.7-7}$$

то формулы (6) определяют $\mathbf{F}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{F}_2(\mathbf{r})$, а следовательно, и $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, однозначно с точностью до такого слагаемого $\mathbf{F}_0(\mathbf{r})$, для которого $\nabla^2\mathbf{F}_0(\mathbf{r})=0$. Имеют место следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{F}_1(\mathbf{r})&=-\nabla\Phi(\mathbf{r}),\\ \mathbf{F}_2(\mathbf{r})&=\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}),\\ \Phi(\mathbf{r})&=\int\frac{Q(\boldsymbol{\varrho})}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\varrho}|}\,dV,\\ \mathbf{A}(\mathbf{r})&=\int\frac{\mathbf{I}(\boldsymbol{\varrho})}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\varrho}|}\,dV,\end{aligned}\right\}\tag{5.7-8}$$

где интегралы справа (*скалярный и векторный потенциалы*) предполагаются существующими (см. также п. 15.6-5); интегрирование производится по всем точкам ($\boldsymbol{\rho}$) пространства.

ГЛАВА 6

СИСТЕМЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

6.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В главе 6 дается описание скалярных и векторных функций точки (см. также пп. 5.4-1—5.7-3) в *криволинейных координатах* (п. 6.2-1). Векторы будут разложены по направлениям координатных линий или перпендикулярно к ним (пп. 6.3-1—6.3-3). Применение криволинейных координат упрощает многие задачи; например, можно выбрать такую систему координат, чтобы на координатной поверхности рассматриваемая функция была постоянной (пп. 6.4-3 и 10.4-1, с).

Основное внимание в гл. 6 уделяется *ортогональным системам координат* (пп. 6.4-1—6.5-1), как наиболее важным для физических приложений. Представление векторных соотношений в неортогональных координатах рассмотрено более подробно в тензорном анализе (гл. 16).

6.2. СИСТЕМЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

6.2-1. Криволинейные координаты. Система криволинейных координат, заданная в области V трехмерного евклидова пространства, ставит в соответствие каждой точке (x, y, z) упорядоченную тройку действительных чисел x^1, x^2, x^3 [1]). **Криволинейные координаты** x^1, x^2, x^3 точки $(x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$ связаны с ее прямоугольными декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x^1 = x^1(x, y, z), \qquad x^2 = x^2(x, y, z), \qquad x^3 = x^3(x, y, z), \tag{6.2-1}$$

где функции (1) всюду в V однозначны и непрерывно дифференцируемы, причем якобиан $\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(x, y, z)} \neq 0$ (*допустимые преобразования*, см. также пп. 4.5-6 и 16.1-2).

Система координат x^1, x^2, x^3 будет *декартовой* (п. 3.1-2; но, вообще говоря, не прямоугольной) в том и только в том случае, когда все уравнения (1) линейны.

6.2-2. Координатные поверхности и координатные линии. Условие $x^i = x^i(x, y, z) = \text{const}$ определяет **координатную поверхность.** Координатные поверхности, соответствующие различным значениям одной и той же координаты x^i, не пересекаются в V. Две координатные поверхности, соответствующие различным координатам x^i, x^j, пересекаются по **координатной линии,** соответствующей третьей координате x^k. Каждая точка $(x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$ из V может быть представлена как точка пересечения трех координатных поверхностей или трех координатных линий.

6.2-3. Элементы длины дуги и объема (рис. 6.2-1; см. также пп. 6.4-3 и 17.3-3).

(a) **Элемент длины дуги** ds между двумя «соседними» точками $(x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$ и $(x+dx, y+dy, z+dz) \equiv (x^1+dx^1, x^2+dx^2, x^3+dx^3)$ задается

---

[1]) Значки 1, 2, 3 в обозначениях x^1, x^2, x^3 не являются показателями степени; см. также пп. 16.1-2 и 16.1-3.

квадратичной дифференциальной формой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} g_{ik}(x^1, x^2, x^3)\, dx^i\, dx^k, \tag{6.2-2}$$

где

$$g_{ik}(x^1, x^2, x^3) = \left[\frac{\partial x}{\partial x^i}\frac{\partial x}{\partial x^k} + \frac{\partial y}{\partial x^i}\frac{\partial y}{\partial x^k} + \frac{\partial z}{\partial x^i}\frac{\partial z}{\partial x^k}\right]_{(x^1,\ x^2,\ x^3)} = g_{ki}(x^1, x^2, x^3)$$

$$(i,\ k = 1,\ 2,\ 3).$$

Функции $g_{ik}(x^1, x^2, x^3)$ — *компоненты метрического тензора* (п. 16.7-1).

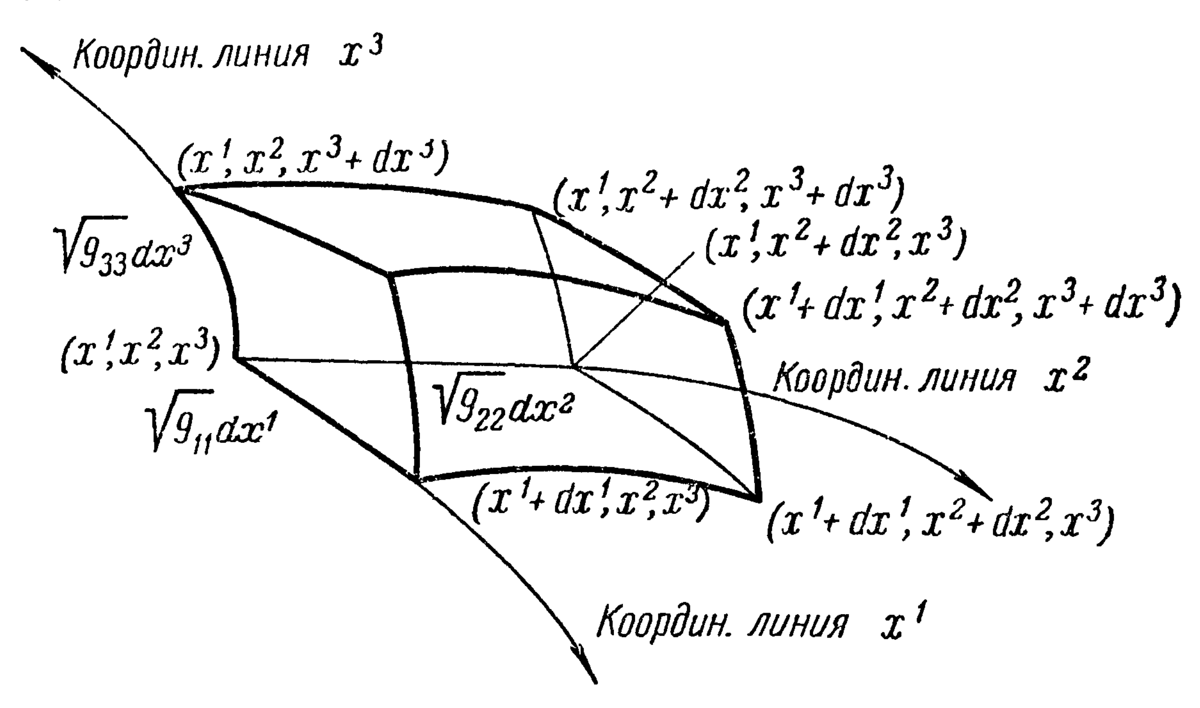


Рис. 6.2-1. Элементы координатных линий, поверхностей и объема в системе криволинейных координат.

(b) Шесть координатных поверхностей, соответствующих точкам (x^1, x^2, x^3) и $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ (рис. 6.2-1), ограничивают *элемент объема* (параллелепипеда)

$$dV = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^1, x^2, x^3)}\, dx^1\, dx^2\, dx^3, \tag{6.2-3}$$

где

$$\left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^1, x^2, x^3)}\right]^2 \equiv \det[g_{ik}(x^1, x^2, x^3)] \equiv g$$

(см. также пп. 5.4-7, 6.4-3, с, 16.10-10). Система координат называется **правой** в области V, если касательные векторы к координатным линиям x^1, x^2, x^3, ориентированные в сторону возрастания соответствующих координат (что определяет **положительные направления** координатных линий), образуют правую тройку (как и орты **i**, **j**, **k** правой декартовой системы координат). Для правой системы координат якобиан $\partial(x, y, z)/\partial(x^1, x^2, x^3) = \sqrt{g} > 0$.

Описание векторных элементов линий и поверхностей в криволинейных координатах см. пп. 6.4-3, 17.3-3 и 17.4-2.

6.3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

6.3-1. Координаты вектора и локальный (местный) базис. В гл. 5 векторные функции точки были разложены по базису **i**, **j**, **k** системы декартовых координат; модуль и направление каждого вектора этого базиса одни и те же в каждой точке. Если векторная функция **F** (**r**) описывается в криволинейных координатах x^1, x^2, x^3, то удобнее применять локальный базис из векторов, касательных к координатным линиям в каждой точке (x^1, x^2, x^3) или перпендикулярных к ним. *Такие базисные векторы сами являются векторными функциями точки.* В каждой системе криволинейных координат можно указать три способа выбора локального базиса (пп. 6.3-2 и 6.3-3).

Таблица 6.3-1

Соотношения между базисными векторами и координатами векторов в различных локальных системах отсчета

(a) Соотношения между $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и векторами локальных базисов $\mathbf{i}_i$, $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^i$ системы криволинейных координат x^1, x^2, x^3:

$$\mathbf{i}_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\mathbf{e}_i; \quad \mathbf{e}_i = \frac{\partial x}{\partial x^i}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial x^i}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial x^i}\mathbf{k};$$

$$\mathbf{e}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial x^i}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial x^i}{\partial z}\mathbf{k} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$\mathbf{i} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial x}\sqrt{g_{ii}}\,\mathbf{i}_i = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial x}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x}{\partial x^i}\mathbf{e}^i,$$

$$\mathbf{j} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial y}\sqrt{g_{ii}}\,\mathbf{i}_i = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial y}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial y}{\partial x^i}\mathbf{e}^i,$$

$$\mathbf{k} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial z}\sqrt{g_{ii}}\,\mathbf{i}_i = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial z}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial z}{\partial x^i}\mathbf{e}^i.$$

(b) Соотношения между F_x, F_y, F_z, физическими координатами $\hat{F}_i$, контравариантными координатами F_i и ковариантными координатами F^i в системе криволинейных координат x^1, x^2, x^3:

$$\hat{F}_i = \sqrt{g_{ii}}\,F^i; \qquad F^i = \frac{\partial x^i}{\partial x}F_x + \frac{\partial x^i}{\partial y}F_y + \frac{\partial x^i}{\partial z}F_z;$$

$$F_i = \frac{\partial x}{\partial x^i}F_x + \frac{\partial y}{\partial x^i}F_y + \frac{\partial z}{\partial x^i}F_z \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$F_x = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x}{\partial x^i}\frac{\hat{F}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x}{\partial x^i}F^i = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial x}F_i,$$

$$F_y = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial y}{\partial x^i}\frac{\hat{F}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial y}{\partial x^i}F^i = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial y}F_i,$$

$$F_z = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial z}{\partial x^i}\frac{\hat{F}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial z}{\partial x^i}F^i = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial z}F_i.$$

Таблица 6.3-1 (*продолжение*)

(c) Соотношения между векторами локальных базисов и координатами векторов в двух системах криволинейных координат (базисные векторы и координаты векторов для системы $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3$ отмечены чертой сверху, см. также п. 16.2-1);

$$\bar{\mathbf{i}}_k = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{kk}}}\bar{\mathbf{e}}_k; \quad \bar{\mathbf{e}}_k = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\mathbf{e}_i; \quad \bar{\mathbf{e}}^k = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\mathbf{e}^i \quad (k = 1,\ 2,\ 3),$$

$$\hat{\bar{F}}_k = \sqrt{\bar{g}_{kk}}\,\bar{F}^k; \quad \bar{F}^k = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}F^i; \quad \bar{F}_k = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}F_i \ (k = 1,\ 2,\ 3),$$

$$\bar{g}_{ik} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{h=1}^{3} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^k}g_{jh} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3).$$

6.3-2. Физические координаты вектора. В качестве векторов локального базиса в каждой точке $(x^1,\ x^2,\ x^3) \equiv (\mathbf{r})$ выберем единичные векторы $\mathbf{i}_1(x^1,\ x^2,\ x^3)$, $\mathbf{i}_2(x^1,\ x^2,\ x^3)$, $\mathbf{i}_3(x^1,\ x^2,\ x^3)$, касательные к координатным линиям x^1, x^2, x^3 (см. также п. 16.8-3). Каждая векторная функция $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{F}(x^1,\ x^2,\ x^3)$ может быть однозначно представлена в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x^1,\ x^2,\ x^3) = \hat{F}_1\mathbf{i}_1 + \hat{F}_2\mathbf{i}_2 + \hat{F}_3\mathbf{i}_3 \quad (6.3\text{-}1)$$

в каждой точке $(\mathbf{r}) = (x^1,\ x^2,\ x^3)$.

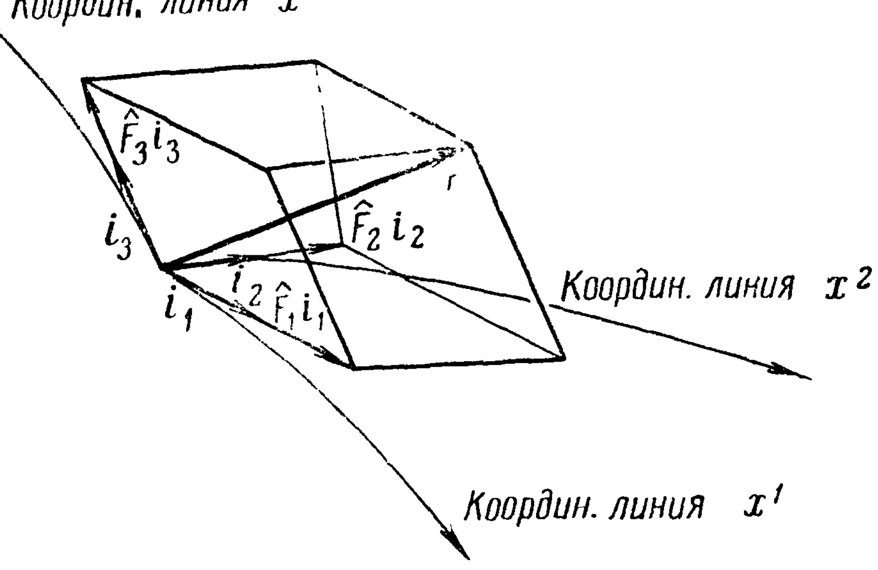


Рис. 6.3-1. Разложение вектора $\mathbf{F}$ по единичным векторам $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$; физические координаты $\hat{F}_1$, $\hat{F}_2$, $\hat{F}_3$ вектора.

Физические координаты

$$\left.\begin{aligned}\hat{F}_1 &\equiv \hat{F}_1(x^1,\ x^2,\ x^3),\\ \hat{F}_2 &\equiv \hat{F}_2(x^1,\ x^2,\ x^3),\\ \hat{F}_3 &\equiv \hat{F}_3(x^1,\ x^2,\ x^3)\end{aligned}\right\} \quad (6.3\text{-}2)$$

вектора $\mathbf{F}$ и локальные базисные векторы $\mathbf{i}_1(x^1, x^2, x^3)$, $\mathbf{i}_2(x^1, x^2, x^3)$, $\mathbf{i}_3(x^1,\ x^2, x^3)$ могут быть выражены непосредственно через координаты F_x, F_y, F_z того же вектора и орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ прямоугольной декартовой системы координат (см. табл. 6.3-1).

Заметим, что функции $\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{\partial x}{\partial x^i}$, $\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{\partial y}{\partial x^i}$, $\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{\partial z}{\partial x^i}$ являются направляющими косинусами орта $\mathbf{i}_i$ (т. е. i-й координатной линии) по отношению к осям Ox, Oy, Oz (см. также рис. 6.3-1).

6.3-3. Контравариантные и ковариантные координаты вектора. В качестве локального базиса можно также выбрать либо тройку векторов

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{e}_1(x^1,\ x^2,\ x^3) \equiv \sqrt{g_{11}}\,\mathbf{i}_1; \quad \mathbf{e}_2(x^1,\ x^2,\ x^3) \equiv \sqrt{g_{22}}\,\mathbf{i}_2;\\ &\mathbf{e}_3(x^1,\ x^2,\ x^3) \equiv \sqrt{g_{33}}\,\mathbf{i}_3,\end{aligned}\right\} \quad (6.3\text{-}3)$$

направленных по координатным линиям, либо тройку векторов

$$\mathbf{e}^1(x^1,\ x^2,\ x^3) \equiv \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]}; \quad \mathbf{e}^2(x^1,\ x^2,\ x^3) \equiv \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]}; \quad \mathbf{e}^3(x^1,\ x^2,\ x^3) \equiv \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]}, \quad (6.3\text{-}4)$$

направленных перпендикулярно к координатным поверхностям. Каждый вектор $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ может быть представлен в одной из следующих форм:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x^1, x^2, x^3) = F^1\mathbf{e}_1 + F^2\mathbf{e}_2 + F^3\mathbf{e}_3 = F_1\mathbf{e}^1 + F_2\mathbf{e}^2 + F_3\mathbf{e}^3 \qquad (6.3\text{-}5)$$

в каждой точке $(\mathbf{r}) \equiv (x^1, x^2, x^3)$. Как модули, так и направления базисных векторов $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^i$ меняются от точки к точке, за исключением того случая, когда x^1, x^2, x^3 — декартовы координаты (п. 16.6-1, а).

Контравариантные координаты $F^i \equiv F^i(x^1, x^2, x^3) \equiv \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}^i$ **и ковариантные координаты** $F_i \equiv F_i(x^1, x^2, x^3) \equiv \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ в системе координат x^1, x^2, x^3 и соответствующие базисные векторы $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^i$ могут быть выражены непосредственно через F_x, F_y, F_z и орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ прямоугольной декартовой системы координат (табл. 6.3-1). Отметим еще формулы (см. также пп. 16.6-1 и 16.8-4):

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3}{[\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3]}; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1}{[\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3]}; \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2}{[\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3]}; \qquad (6.3\text{-}6)$$

$$[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] = [\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3]^{-1} = [\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3]\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} = \pm\sqrt{g}; \qquad (6.3\text{-}7)$$

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k = g_{ik}; \quad |\mathbf{e}_i| = \sqrt{g_{ii}}; \quad \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}^k = \begin{cases} 1 \text{ при } i = k, \\ 0 \text{ при } i \neq k. \end{cases} \qquad (6.3\text{-}8)$$

В частном случае прямоугольных декартовых координат $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$ имеем:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}^1 = \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}; \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}^2 = \mathbf{i}_2 = \mathbf{j}; \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}^3 = \mathbf{i}_3 = \mathbf{k}. \qquad (6.3\text{-}9)$$

Главное преимущество представления векторов в контравариантных и ковариантных координатах заключается в относительной простоте соотношений, связывающих эти координаты в различных системах координат (табл. 6.3-1; см. также п. 6.3-4).

6.3-4. Запись векторных соотношений в криволинейных координатах. Каждое векторное соотношение, записанное в гл. 5 в прямоугольных декартовых координатах, может быть записано в криволинейных координатах с помощью табл. 6.3-1. Если рассматриваемое соотношение содержит производные или интегралы, то *следует учитывать, что базисные векторы в системе криволинейных координат сами являются функциями точки.*

Многие практически важные задачи допускают применение *системы ортогональных координат* (п. 6.4-1). В этом случае формулы пп. 6.4-1—6.4-3 и табл. 6.4-1—6.5-11 дают сравнительно простое выражение для векторных соотношений непосредственно в физических координатах. В тех случаях, когда такие специальные методы непригодны, целесообразнее применять не физические координаты векторов, а контравариантные и ковариантные координаты; *формулировка соотношений векторного анализа в контравариантных и ковариантных координатах изложена подробно в гл.* 16 *как частный случай более общих соотношений тензорного анализа.*

В частности, применение формул пп. 16.8-1—16.8-4 для вычисления скалярного и векторного произведений и прямой метод *ковариантного дифференцирования* (пп. 16.10-1 — 16.10-8) дают выражения для дифференциальных операторов типа $\nabla\Phi$, $\nabla\cdot\mathbf{F}$, $\nabla\times\mathbf{F}$.

6.4. СИСТЕМЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТ. ВЕКТОРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

6.4-1. Ортогональные координаты. Система криволинейных координат x^1, x^2, x^3 (п. 6.2-1) называется **ортогональной**, если функции $g_{ik}(x^1, x^2, x^3)$ удовлетворяют соотношениям

$$g_{ik}(x^1, x^2, x^3) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k \qquad (6.4\text{-}1)$$

в каждой точке (x^1, x^2, x^3). Координатные линии, а значит, и векторы локального базиса $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, будут при этом перпендикулярными друг к другу

в каждой точке; каждая координатная линия перпендикулярна ко всем координатным поверхностям, соответствующим постоянным значениям рассматриваемой координаты.

6.4-2. Векторные соотношения.

(а) В табл. 6.4-1 приведены наиболее важные векторные соотношения в ортогональных координатах. Функции $g_{ii}=g_{ii}(x^1, x^2, x^3)\equiv|\mathbf{e}_i|^2$ для каждой системы ортогональных координат получают из формулы (6.2-2). В этих формулах знаки плюс и минус относятся к правой и левой системам координат.

Таблица 6.4-1

Векторные соотношения в ортогональных координатах

(Знаки плюс и минус относятся к правой и левой системам ортогональных координат.)

(а) Скалярное и векторное произведения

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}=\hat F_1\hat G_1+\hat F_2\hat G_2+\hat F_3\hat G_3;\qquad |\mathbf{F}|=\sqrt{\hat F_1^2+\hat F_2^2+\hat F_3^2},$$

$$\mathbf{F}\times\mathbf{G}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}_2\times\mathbf{i}_3 & \hat F_1 & \hat G_1\\ \mathbf{i}_3\times\mathbf{i}_1 & \hat F_2 & \hat G_2\\ \mathbf{i}_1\times\mathbf{i}_2 & \hat F_3 & \hat G_3\end{vmatrix}=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3\\ \hat F_1 & \hat F_2 & \hat F_3\\ \hat G_1 & \hat G_2 & \hat G_3\end{vmatrix},$$

$$[\mathbf{FGH}]=\begin{vmatrix}\hat F_1 & \hat G_1 & \hat H_1\\ \hat F_2 & \hat G_2 & \hat H_2\\ \hat F_3 & \hat G_3 & \hat H_3\end{vmatrix}[\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3]=\pm\begin{vmatrix}\hat F_1 & \hat G_1 & \hat H_1\\ \hat F_2 & \hat G_2 & \hat H_2\\ \hat F_3 & \hat G_3 & \hat H_3\end{vmatrix}.$$

(b) Дифференциальные операторы [1] ($g\equiv g_{11}g_{22}g_{33}$)

$$\nabla\Phi\equiv\pm\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\Phi}{dx^1}\mathbf{i}_1+\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\mathbf{i}_2+\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\mathbf{i}^3\right),$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F}\equiv\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\hat F_1\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\hat F_2\sqrt{\frac{g}{g_{22}}}\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\hat F_3\sqrt{\frac{g}{g_{33}}}\right)\right],$$

$$\nabla\times\mathbf{F}\equiv\pm\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\sqrt{g_{11}}\,\mathbf{i}_1 & \sqrt{g_{22}}\,\mathbf{i}_2 & \sqrt{g_{33}}\,\mathbf{i}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3}\\ \hat F_1\sqrt{g_{11}} & \hat F_2\sqrt{g_{22}} & \hat F_3\sqrt{g_{33}}\end{vmatrix},$$

$$(\mathbf{F}\cdot\nabla)\,\Phi\equiv\pm\left(\frac{\hat F_1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}+\frac{\hat F_2}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}+\frac{\hat F_3}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right),$$

$$\nabla^2\Phi\equiv\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right)\right].$$

[1]) Выражение для $\nabla^2\mathbf{F}$ получают из формулы $\nabla^2\mathbf{F}\equiv\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})-\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})$ или из правил п. 16.10-7. Выражение для $(\mathbf{F}\cdot\nabla)\,G$ получают из табл. 5.5-1 или из правил п. 16.10-7.

Примечание. Формулы для $\nabla\Phi$, $\nabla\cdot\mathbf{F}$ и $\nabla\times\mathbf{F}$ могут быть получены и непосредственно из инвариантных определений п. 5.5-1, примененных к элементарному объему, изображенному на рис. 6.2-1.

(b) *Для любой системы ортогональных координат*:

$$\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_k = \begin{cases} 1 \text{ при } i=k, \\ 0 \text{ при } i \neq k; \end{cases} \left| \begin{array}{l} \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 = \pm \mathbf{i}_3; \quad \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 = \pm \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 = \pm \mathbf{i}_2, \\ \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_3 = 0; \quad [\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3] = \pm 1; \end{array} \right\} \quad (6\text{-}4\text{-}2)$$

$$\mathbf{i}_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \mathbf{e}_i = \pm \sqrt{g_{ii}}\, \mathbf{e}^i; \quad \hat{F}_i = \sqrt{g_{ii}}\, F^i = \pm \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} F_i \quad (i=1,\ 2,\ 3); \qquad (6.4\text{-}3)$$

$$[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] = [\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3]^{-1} = [\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3] \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} = \pm \sqrt{g}; \qquad (6.4\text{-}4)$$

$$\nabla = \mathbf{e}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \mathbf{e}^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \mathbf{e}^3 \frac{\partial}{\partial x^3} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \qquad (6.4\text{-}5)$$

6.4-3. Криволинейный интеграл, поверхностный интеграл и объемный интеграл (см. также рис. 6.2-1).

(a) Для спрямляемой кривой C *векторный элемент линии* $d\mathbf{r}$ имеет физические координаты $ds_1 = \sqrt{g_{11}}\ dx^1$, $ds_2 = \sqrt{g_{22}}\ dx^2$, $ds_3 = \sqrt{g_{33}}\ dx^3$, т. е.

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt = dx\, \mathbf{i} + dy\, \mathbf{j} + dz\, \mathbf{k} = ds_1\, \mathbf{i}_1 + ds_2\, \mathbf{i}_2 + ds_3\, \mathbf{i}_3 =$$
$$= \sqrt{g_{11}}\, dx^1\, \mathbf{i}_1 + \sqrt{g_{22}}\, dx^2\, \mathbf{i}_2 + \sqrt{g_{33}}\, dx^3\, \mathbf{i}_3. \qquad (6.4\text{-}6)$$

Подходящее выражение (6) для $d\mathbf{r}$ должно быть подставлено в криволинейный интеграл, определенный в п. 5.4-5. *Для ортогональных координат* x^1, x^2, x^3

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \hat{F}_1\, ds_1 + \hat{F}_2\, ds_2 + \hat{F}_3\, ds_3 = \int_C \left(\hat{F}_1 \frac{ds_1}{dt} + \hat{F}_2 \frac{ds_2}{dt} + \hat{F}_2 \frac{ds_3}{dt} \right) dt. \qquad (6.4\text{-}7)$$

Заметим что *для любой системы криволинейных координат*

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1\, dx^1 + \mathbf{e}_2\, dx^2 + \mathbf{e}_3\, dx^3$$

(см. также п. 17.2-1; *для ортогональных координат* x^1, x^2, x^3

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1\, dx^1 + F_2\, dx^2 + F_3\, dx^3 = \int_C g_{11}F^1\, dx^1 + g_{22}F^2\, dx^2 + g_{33}F^3\, dx^3.$$

(b) Описание площади поверхности S и векторного элемента поверхности $d\mathbf{S}$ в координатах на поверхности дано в пп. 5.4-6 и 17.3-1, В частности, *если система ортогональных координат выбрана так, что поверхность* S *есть часть координатной поверхности* $x^k = \text{const}$, то координаты x^i и x^j образуют на этой поверхности систему ортогональных поверхностных координат, и

$$d\mathbf{S} = \sqrt{g_{ii}g_{jj}}\, dx^i\, dx^j\, \mathbf{i}_k = ds_i\, ds_j\, \mathbf{i}_k = \frac{\sqrt{g}}{g_{kk}}\, dx^i\, dx^j\, \mathbf{e}_k$$
$$(i \neq j \neq k \neq i;\ k=1,\ 2,\ 3). \qquad (6.4\text{-}8)$$

Относительная простота получающихся отсюда выражений для поверхностных интегралов (5.4-13) и (5.4-14) часто служит основным поводом для введения системы криволинейных координат (см. также п. 10.4-1, с). Знак квадратного корня в формуле (8) определяется выбором положительного направления нормали (п. 17.3-2): знак + соответствует правой системе координат.

(c) *Элемент объема* dV, появляющийся в выражениях (5.4-16) и (5.4-17) для *объемного интеграла*, дается формулой (6.2-3) или

$$dV = \frac{\partial (x,\ y,\ z)}{\partial (x^1,\ x^2,\ x^3)}\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = \pm \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = \pm \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\, dx^1\, dx^2\, dx^3 =$$
$$= \pm\, ds_1\, ds_2\, ds_3. \qquad (6.4\text{-}9)$$

Если система координат правая в формуле (9) берется знак плюс.

6.5. ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТ

В табл. 6.5-1—6.5-12 даны формулы для некоторых специальных систем ортогональных координат. В частности, для каждой такой системы табулированы функции $g_{ii}(x^1, x^2, x^3) = |\mathbf{e}_i|^2$.

Таблица 6.5-1

Векторные формулы в сферических и цилиндрических координатах

(см. также рис. 2.1-2 и 3.1-2). Формулы для цилиндрических координат применимы также к *полярным координатам* на плоскости Oxy (п. 2.1-8)

	Сферические координаты $r,\ \vartheta,\ \varphi$ $(r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$	Цилиндрические координаты $\rho,\ \varphi,\ z$ $(\rho \geqslant 0)$
Координатные поверхности	$x^2+y^2+z^2=r^2$ (*сферы*) $x^2+y^2-z^2\operatorname{tg}^2\vartheta=0$ (*конусы круглые*) $y=x\operatorname{tg}\varphi$ (*полуплоскости*, проходящие через ось Oz)	$x^2+y^2=\rho^2$ (*цилиндры круглые прямые*) $y=x\operatorname{tg}\varphi$ (*полуплоскости*, проходящие через ось Oz) $z=z$ (*плоскости*, параллельные плоскости Oxy)
Преобразование координат ($x,\ y,\ z$ — прямоугольные декартовы координаты)	$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \vartheta=\arccos\dfrac{z}{r} \\ \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{x}\left(\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\end{cases}$ $\begin{cases} x=r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y=r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z=r\cos\vartheta\end{cases}$	$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{x}\left(\sin\varphi=\dfrac{y}{\rho}\right) \\ z=z\end{cases}$ $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z\end{cases}$
Преобразование дифференциалов координат	$dx=\sin\vartheta\cos\varphi\,dr+r\cos\vartheta\cos\varphi\,d\vartheta-r\sin\vartheta\sin\varphi\,d\varphi$ $dy=\sin\vartheta\sin\varphi\,dr+r\cos\vartheta\sin\varphi\,d\vartheta+r\sin\vartheta\cos\varphi\,d\varphi$ $dz=\cos\vartheta\,dr-r\sin\vartheta\,d\vartheta$	$dx=\cos\varphi\,d\rho-\rho\sin\varphi\,d\varphi$ $dy=\sin\varphi\,d\rho+\rho\cos\varphi\,d\varphi$ $dz=dz$
Квадрат элемента длины $ds^2=(d\mathbf{r})^2=dx^2+dy^2+dz^2$ $g_{ii}=\lvert\mathbf{e}_i\rvert^2$	$ds^2=dr^2+r^2\,d\vartheta^2+r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2$ $g_{rr}=1;\quad g_{\vartheta\vartheta}=r^2,\quad g_{\varphi\varphi}=r^2\sin^2\vartheta$	$ds^2=d\rho^2+\rho^2\,d\varphi^2+dz^2$ $g_{\rho\rho}=1;\quad g_{\varphi\varphi}=\rho^2;\quad g_{zz}=1$

Таблица 6.5-1 (*продолжение*)

	Сферические координаты $r,\ \vartheta,\ \varphi\ (r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$	Цилиндрические координаты $\rho,\ \varphi,\ z\ (\rho \geqslant 0)$
$\sqrt{g}=\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}$	$\sqrt{g}=\dfrac{\partial(x,\ y\ \ z)}{\partial(r,\ \vartheta,\ \varphi)}=r^2\sin\vartheta$	$\sqrt{g}=\dfrac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(\rho,\ \varphi,\ z)}=\rho$
Трехиндексные символы Кристоффеля (п. 16.10-3; символы, не приведенные в таблице, тождественно равны нулю)	$[\vartheta\vartheta;\ r]=-r;\quad [\varphi\varphi;\ r]=-r\sin^2\vartheta;\quad [\varphi\varphi;\ \vartheta]=-r^2\sin\vartheta\cos\vartheta$ $[r\vartheta;\ \vartheta]=r;\quad [r\varphi;\ \varphi]=r\sin^2\vartheta;\ [\vartheta\varphi;\ \varphi]=r^2\sin\vartheta\cos\vartheta$ $\left\{{r \atop \vartheta\vartheta}\right\}=-r;\quad \left\{{r \atop \varphi\varphi}\right\}=-r\sin^2\vartheta;\quad \left\{{\vartheta \atop \varphi\varphi}\right\}=-\sin\vartheta\cos\vartheta$ $\left\{{\vartheta \atop r\vartheta}\right\}=\dfrac{1}{r};\quad \left\{{\varphi \atop r\varphi}\right\}=\dfrac{1}{r};\quad \left\{{\varphi \atop \vartheta\varphi}\right\}=\operatorname{ctg}\vartheta$	$[\varphi\varphi;\ \rho]=-\rho;\quad [\rho\varphi;\ \varphi]=\rho$ $\left\{{\rho \atop \varphi\varphi}\right\}=-\rho;\quad \left\{{\varphi \atop \rho\varphi}\right\}=\dfrac{1}{\rho}$
Преобразование физических координат вектора	$\hat{F}_r=F_x\sin\vartheta\cos\varphi+F_y\sin\vartheta\sin\varphi+F_z\cos\vartheta$ $\hat{F}_\vartheta=F_x\cos\vartheta\cos\varphi+F_y\cos\vartheta\sin\varphi-F_z\sin\vartheta$ $\hat{F}_\varphi=-F_x\sin\varphi+F_y\cos\varphi$ $F_x=\hat{F}_r\sin\vartheta\cos\varphi+\hat{F}_\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi-\hat{F}_\varphi\sin\varphi$ $F_y=\hat{F}_r\sin\vartheta\sin\varphi+\hat{F}_\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi+\hat{F}_\varphi\cos\varphi$ $F_z=\hat{F}_r\cos\vartheta-\hat{F}_\vartheta\sin\vartheta$	$\hat{F}_\rho=F_x\cos\varphi+F_y\sin\varphi$ $\hat{F}_\varphi=-F_x\sin\varphi+F_y\cos\varphi$ $\hat{F}_z=F_z$ $F_x=\hat{F}_\rho\cos\varphi-\hat{F}_\varphi\sin\varphi$ $F_y=\hat{F}_\rho\sin\varphi+\hat{F}_\varphi\cos\varphi$ $F_z=\hat{F}_z$
Градиент в ***физических*** **координатах** $\nabla\Phi=\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\mathbf{i}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\mathbf{j}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{k}$	$\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{i}_r+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\mathbf{i}_\vartheta+\dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{i}_\varphi$	$\dfrac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathbf{i}_\rho+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{i}_\varphi+\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{i}_z$

Таблица 6.5-1 (*продолжение*)

	Сферические координаты r, ϑ, φ $(r \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq \pi)$	Цилиндрические координаты ρ, φ, z $(\rho \geq 0)$
Дивергенция в *физических* координатах $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \hat{F}_r\right) + \frac{1}{r \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\hat{F}_\vartheta \sin\vartheta\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial \hat{F}_\varphi}{\partial\varphi}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho\hat{F}_\rho\right)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\hat{F}_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\hat{F}_z}{\partial z}$
Ротор в *физических* координатах $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$	$\frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\hat{F}_\varphi \sin\vartheta\right) - \frac{\partial\hat{F}_\vartheta}{\partial\varphi}\right]\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\hat{F}_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial\left(r\hat{F}_\varphi\right)}{\partial r}\right]\mathbf{i}_\vartheta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(r\hat{F}_\vartheta\right)}{\partial r} - \frac{\partial\hat{F}_r}{\partial\vartheta}\right]\mathbf{i}_\varphi$	$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\hat{F}_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial\hat{F}_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{i}_\rho + \left(\frac{\partial\hat{F}_\rho}{\partial z} - \frac{\partial\hat{F}_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{i}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\left(\rho\hat{F}_\varphi\right)}{\partial\rho} - \frac{\partial\hat{F}_\rho}{\partial\varphi}\right]\mathbf{i}_z$
Лапласиан скалярной функции [1] $\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$

[1]) Лапласиан *векторной* функции находят по формуле $\nabla^2\mathbf{F} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})$ или по формуле (6.4-5) и по табл. 16.10-1

Таблица 6.5-2

Общие эллипсоидальные координаты λ, μ, ν

(a) **Координатные поверхности** ($\lambda > -c^2 > \mu > -b^2 > \nu > -a^2$)

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1 \quad (\textit{эллипсоиды}),$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}=1 \quad (\textit{однополостные гиперболоиды}),$$

$$\frac{x^2}{a^2+\nu}+\frac{y^2}{b^2+\nu}+\frac{z^2}{c^2+\nu}=1 \quad (\textit{двуполостные гиперболоиды}).$$

(b) **Преобразование к эллипсоидальным координатам**

$$x^2=\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)};$$

$$y^2=\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)};$$

$$z^2=\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

(c) **Специальная система эллипсоидальных координат** u, v, w вводится формулами

$$\lambda=4\wp(u)-\frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

$$\mu=4\wp(v)-\frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

$$\nu=4\wp(w)-\frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

так что (см. п. 21.6-2)

$$du=\frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},\qquad dv=\frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}},\qquad dw=\frac{d\nu}{\sqrt{f(\nu)}},$$

где $f(t)=(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)$.

(d) $$g_{\lambda\lambda}=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{4f(\lambda)},\quad g_{\mu\mu}=\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{4f(\mu)},\quad g_{\nu\nu}=\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{4f(\nu)}$$

$$g_{uu}=4[\wp(u)-\wp(v)][\wp(u)-\wp(w)],$$

$$g_{vv}=4[\wp(v)-\wp(w)][\wp(v)-\wp(u)],$$

$$g_{ww}=4[\wp(w)-\wp(u)][\wp(w)-\wp(v)].$$

(e) **Лапласиан скалярной функции**

$$\nabla^2\Phi=\frac{\sqrt{f(\lambda)}}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{f(\lambda)}\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\right]+\frac{4f(\mu)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{f(\mu)}\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right]+\frac{4f(\nu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\sqrt{f(\nu)}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{[\wp(u)-\wp(v)][\wp(u)-\wp(w)]}\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{1}{[\wp(v)-\wp(w)][\wp(v)-\wp(u)]}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}+\frac{1}{[\wp(w)-\wp(u)][\wp(w)-\wp(v)]}\frac{\partial^2\Phi}{\partial w^2}\right\}.$$

Таблица 6.5-3

Координаты σ, τ, φ вытянутого эллипсоида вращения

(ось Oz — ось вращения; см. также рис. 6.5-1)

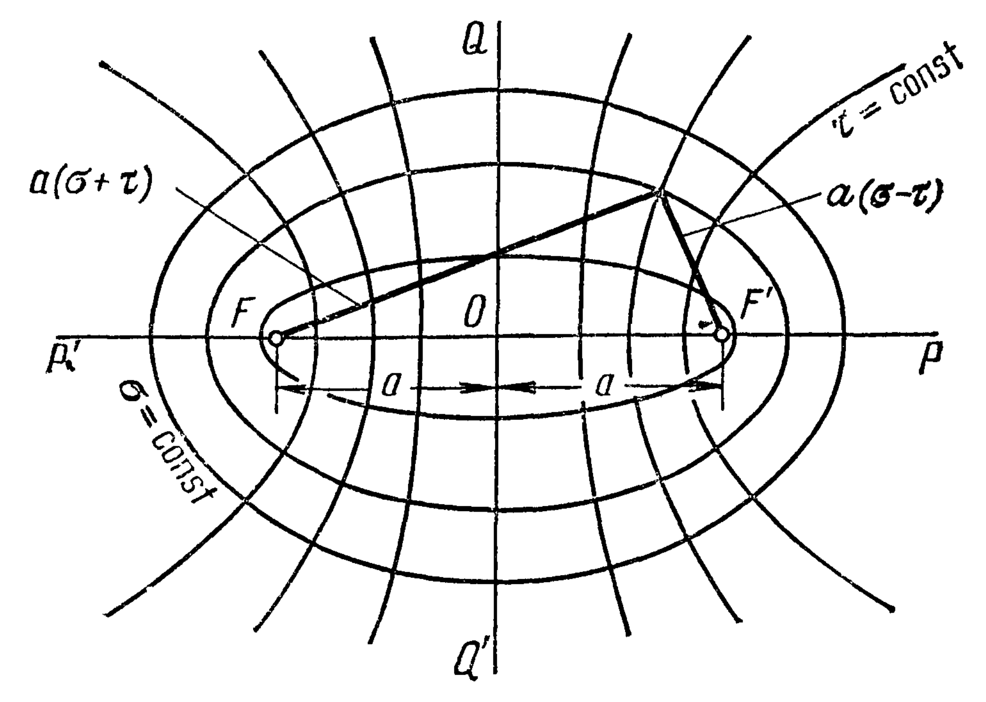


Рис. 6.5-1. Ортогональная система софокусных эллипсов и гипербол с фокусами F, F'. Эти кривые определяют систему эллиптических координат на плоскости и порождают координатные поверхности в следующих системах координат:

1) вытянутого эллипсоида вращения (если эти кривые вращаются вокруг оси $P'OP$; табл. 6.5-3);

2) сплюснутого эллипсоида вращения (если эти кривые вращаются вокруг оси $Q'OQ$; табл. 6.5-4);

3) эллиптического цилиндра (если эти кривые смещаются перпендикулярно к плоскости рисунка; табл. 6.5-5).

(a) **Координатные поверхности** ($\sigma \geqslant 1 \geqslant \tau \geqslant -1$)

$$\frac{x^2+y^2}{a^2(\sigma^2-1)}+\frac{z^2}{a^2\sigma^2}=1 \text{ (вытянутые эллипсоиды вращения)},$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2(\tau^2-1)}+\frac{z^2}{a^2\tau^2}=1 \text{ (двуполостные гиперболоиды вращения)},$$

$$y = x \operatorname{tg}\varphi \text{ (полуплоскости, проходящие через ось } Oz).$$

Все эллипсоиды и гиперболоиды имеют общие фокусы $(0, 0, a)$ и $(0, 0, -a)$; сумма и разность фокальных радиусов в любой точке (x, y, z) равны соответственно $2a\sigma$ и $2a\tau$.

(b) **Преобразование к координатам вытянутого эллипсоида вращения**

$$x^2 = a^2(\sigma^2-1)(1-\tau^2)\cos^2\varphi, \quad y^2 = a^2(\sigma^2-1)(1-\tau^2)\sin^2\varphi, \quad z = a\sigma\tau.$$

(c) **Специальная система** u, v, φ вводится формулами

$$\sigma = \operatorname{ch} u, \quad \tau = \cos v, \quad \varphi = \varphi \quad (0 \leqslant u < \infty,\ 0 \leqslant v \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi);$$

при этом

$$x = a \operatorname{sh} u \sin v \cos\varphi, \quad y = a \operatorname{sh} u \sin v \sin\varphi, \quad z = a \operatorname{ch} u \cos v.$$

(d) $$g_{\sigma\sigma} = a^2\frac{\sigma^2-\tau^2}{\sigma^2-1}, \quad g_{\tau\tau} = a^2\frac{\sigma^2-\tau^2}{1-\tau^2}, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2(\sigma^2-1)(1-\tau^2);$$

$$g_{uu} = g_{vv} = a^2(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v), \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v.$$

(e) **Лапласиан скалярной функции**

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\sigma^2-\tau^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[(\sigma^2-1)\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right]+\frac{\partial}{\partial\tau}\left[(1-\tau^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right]+\frac{\sigma^2-\tau^2}{(\sigma^2-1)(1-\tau^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right\}$$

Таблица 6.5-4

Координаты σ, τ, φ сплюснутого эллипсоида вращения

(ось Oz — ось вращения; см. также рис. 6.5-1)

(a) Координатные поверхности ($\sigma \geqslant 0$; $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$)

$$\frac{x^2+y^2}{a^2(1+\sigma^2)}+\frac{z^2}{a^2\sigma^2}=1 \quad (\textit{сплюснутые эллипсоиды вращения})$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2(1-\tau^2)}-\frac{z^2}{a^2\tau^2}=1 \quad (\textit{однополостные гиперболоиды вращения}),$$

$y = x \operatorname{tg} \varphi$ (*полуплоскости*, проходящие через ось Oz).

(b) Преобразование к координатам сплюснутого эллипсоида вращения

$$x^2 = a^2(1+\sigma^2)(1-\tau^2)\cos^2\varphi, \quad y^2 = a^2(1+\sigma^2)(1-\tau^2)\sin^2\varphi; \quad z = a\sigma\tau.$$

(c) Специальная система u, v, φ **вводится формулами**

$$\sigma = \operatorname{sh} u, \quad \tau = \cos v, \quad \varphi = \varphi \qquad (0 \leqslant u < \infty, \ 0 \leqslant v \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi);$$

при этом

$$x = a \operatorname{ch} u \sin v \cos\varphi, \quad y = a \operatorname{ch} u \sin v \sin\varphi, \quad z = a \operatorname{sh} u \cos v.$$

(d) $g_{\sigma\sigma} = a^2 \dfrac{\sigma^2+\tau^2}{1+\sigma^2}$, $g_{\tau\tau} = a^2 \dfrac{\sigma^2+\tau^2}{1-\tau^2}$, $g_{\varphi\varphi} = a^2(1+\sigma^2)(1-\tau^2)$;

$$g_{uu} = g_{vv} = a^2(\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v), \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v.$$

(e) Лапласиан скалярной функции

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\sigma^2+\tau^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[(1+\sigma^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right]+\frac{\partial}{\partial\tau}\left[(1-\tau^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right]+\frac{\sigma^2+\tau^2}{(1+\sigma^2)(1-\tau^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

Таблица 6.5-5

Координаты σ, τ, z эллиптического цилиндра

(применяются также как (софокусные) *эллиптические координаты* на плоскости Oxy; см. также рис. 6.5-1)

(a) Координатные поверхности ($\sigma \geqslant 1$; $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$)

$$\frac{x^2}{a^2\sigma^2}+\frac{y^2}{a^2(\sigma^2-1)}=1 \quad (\textit{эллиптические цилиндры}),$$

$$\frac{x^2}{a^2\tau^2}+\frac{y^2}{a^2(\tau^2-1)}=1 \quad (\textit{гиперболические цилиндры}),$$

$z = z$ (*плоскости*, параллельные плоскости Oxy).

(b) Преобразование к координатам эллиптического цилиндра

$$x = a\sigma\tau, \quad y^2 = a^2(\sigma^2-1)(1-\tau^2), \quad z = z.$$

(c) Специальная система u, v, z **вводится формулами**

$$\sigma = \operatorname{ch} u, \quad \tau = \cos v \qquad (0 \leqslant u < \infty; \ 0 \leqslant v \leqslant \pi);$$

при этом

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = a \operatorname{sh} u \sin v, \quad z = z.$$

(d) $g_{\sigma\sigma} = a^2 \dfrac{\sigma^2-\tau^2}{\sigma^2-1}$, $g_{\tau\tau} = a^2 \dfrac{\sigma^2-\tau^2}{1-\tau^2}$, $g_{zz} = 1$;

$$g_{uu} = g_{vv} = a^2(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v), \quad g_{zz} = 1.$$

(e) Лапласиан скалярной функции

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\sigma^2-\tau^2)}\left[\sqrt{\sigma^2-1}\,\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sqrt{\sigma^2-1}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right)+\sqrt{1-\tau^2}\,\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\sqrt{1-\tau^2}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right)\right]+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2(\operatorname{sh}^2 u+\sin^2 v)}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Таблица 6.5-6

Конические координаты u, v, w

(a) Координатные поверхности $(c^2 > v^2 > b^2 > w^2)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \quad (\textit{сферы}),$$

$$\frac{x^2}{v^2} + \frac{y^2}{v^2 - b^2} + \frac{z^2}{v^2 - c^2} = 0 \quad (\textit{конусы}, \text{ ось которых совпадает с осью } Oz),$$

$$\frac{x^2}{w^2} + \frac{y^2}{w^2 - b^2} + \frac{z^2}{w^2 - c^2} = 0 \quad (\textit{конусы}, \text{ ось которых совпадает с осью } Ox).$$

(b) Преобразование к коническим координатам

$$x = \pm\frac{uvw}{bc}, \qquad y^2 = \frac{u^2}{b^2}\frac{(v^2 - b^2)(w^2 - b^2)}{b^2 - c^2}, \qquad z^2 = \frac{u^2}{c^2}\frac{(v^2 - c^2)(w^2 - c^2)}{c^2 - b^2}.$$

(c) $g_{uu} = 1, \quad g_{vv} = -\dfrac{u^2(v^2 - w^2)}{(v^2 - b^2)(v^2 - c^2)}, \quad g_{ww} = \dfrac{u^2(v^2 - w^2)}{(w^2 - b^2)(w^2 - c^2)}.$

Таблица 6.5-7

Параболоидальные координаты λ, μ, ν

(a) Координатные поверхности $(\lambda < B < \mu < A < \nu)$

$$\frac{x^2}{\lambda - A} + \frac{y^2}{\lambda - B} = 2z + \lambda \quad (\textit{эллиптические параболоиды}),$$

$$\frac{x^2}{\mu - A} + \frac{y^2}{\mu - B} = 2z + \mu \quad (\textit{гиперболические параболоиды}),$$

$$\frac{x^2}{\nu - A} + \frac{y^2}{\nu - B} = 2z + \nu \quad (\textit{эллиптические параболоиды}).$$

(b) Преобразование к параболоидальным координатам

$$x^2 = \frac{(A - \lambda)(A - \mu)(A - \nu)}{B - A}, \quad y^2 = \frac{(B - \lambda)(B - \mu)(B - \nu)}{A - B},$$

$$z = \frac{1}{2}(A + B - \lambda - \mu - \nu).$$

(c) $g_{\lambda\lambda} = \dfrac{1}{4}\dfrac{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}{(A - \lambda)(B - \lambda)}, \quad g_{\mu\mu} = \dfrac{1}{4}\dfrac{(\nu - \mu)(\lambda - \mu)}{(A - \mu)(B - \mu)},$

$$g_{\nu\nu} = \frac{1}{4}\frac{(\lambda - \nu)(\mu - \nu)}{(A - \nu)(B - \nu)}.$$

Таблица 6.5-8

Параболические координаты σ, τ, φ

(ось Oz — ось вращения; см. также рис. 6.5-2)

(a) Координатные поверхности

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2+y^2}{\sigma^2} &= 2z+\sigma^2, \\ \frac{x^2+y^2}{\tau^2} &= -2z+\tau^2 \end{aligned}\right\}$$

(*софокусные параболоиды вращения*; фокусы в начале координат),

$y = x \operatorname{tg} \varphi$ (*полуплоскости*, проходящие через ось Oz).

(b) Преобразование к параболическим координатам

$$x = \sigma\tau\cos\varphi, \quad y = \sigma\tau\sin\varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\tau^2-\sigma^2).$$

(c) $g_{\sigma\sigma} = g_{\tau\tau} = \sigma^2+\tau^2$, $g_{\varphi\varphi} = \sigma^2\tau^2$.

(d) Лапласиан скалярной функции

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\sigma^2+\tau^2}\left[\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right) + \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right) + \left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right]$$

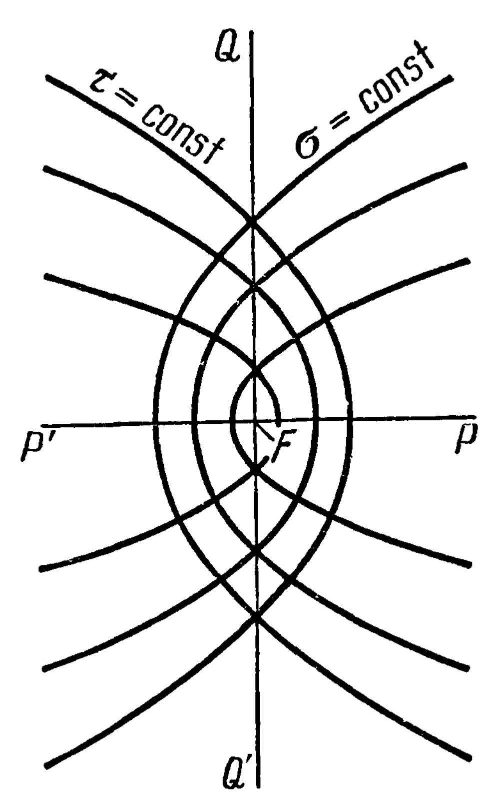


Рис. 6.5-2. Ортогональная система софокусных парабол с фокусом F. Эти кривые определяют систему параболических координат на плоскости и порождают координатные поверхности в следующих системах координат:

1) параболических (если эти кривые вращаются вокруг оси $P'FP$; табл. 6.5-8);

2) параболического цилиндра (если эти кривые смещаются перпендикулярно к плоскости рисунка; табл. 6.5-9).

Таблица 6.5-9

Координаты σ, τ, z параболического цилиндра

(применяются также как *параболические координаты* на плоскости Oxy; см. также рис. 6.5-2)

(a) Координатные поверхности

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{\sigma^2} &= 2y+\sigma^2, \\ \frac{x^2}{\tau^2} &= -2y+\tau^2 \end{aligned}\right\}$$

(*софокусные прямые параболические цилиндры*),

$z = z$ (*плоскости*, параллельные плоскости Oxy).

(b) Преобразование к координатам параболического цилиндра

$$x = \sigma\tau, \quad y = \frac{1}{2}(\tau^2-\sigma^2), \quad z = z.$$

(c) $g_{\sigma\sigma} = g_{\tau\tau} = \sigma^2+\tau^2$, $g_{zz} = 1$.

(d) Лапласиан скалярной функции

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\sigma^2+\tau^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\sigma^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Таблица 6.5-10

Бицилиндрические координаты σ, τ, z

(применяются также как *биполярные координаты* на плоскости Oxy; см. также рис. 6.5-3)

(a) Координатные поверхности

$$x^2 + (y - a \operatorname{ctg} \sigma)^2 = a^2 (\operatorname{ctg}^2 \sigma + 1) \quad (\textit{прямые круглые цилиндры}),$$

$$(x - a \operatorname{cth} \tau)^2 + y^2 = a^2 (\operatorname{cth}^2 \tau - 1) \quad (\textit{прямые круглые цилиндры}),$$

$$z = z \quad (\textit{плоскости}, \text{ параллельные плоскости } Oxy).$$

Для каждой точки (x, y) плоскости Oxy σ есть угол, образованный лучами, идущими из полюсов $A(-a, 0)$ и $B(a, 0)$ в точку (x, y); e^{τ} — отношение полярных радиусов точки (x, y).

(b) Преобразования

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma}, \qquad \sigma = \frac{i}{2} \ln \frac{x^2 + (y - ia)^2}{x^2 + (y + ia)^2},$$

$$y = \frac{a \sin \sigma}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma}, \qquad \tau = \frac{1}{2} \ln \frac{(x + a)^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2}, \qquad z = z.$$

(c) $$g_{\sigma\sigma} = g_{\tau\tau} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^2}, \quad g_{zz} = 1.$$

(d) $$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{a^2} (\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$

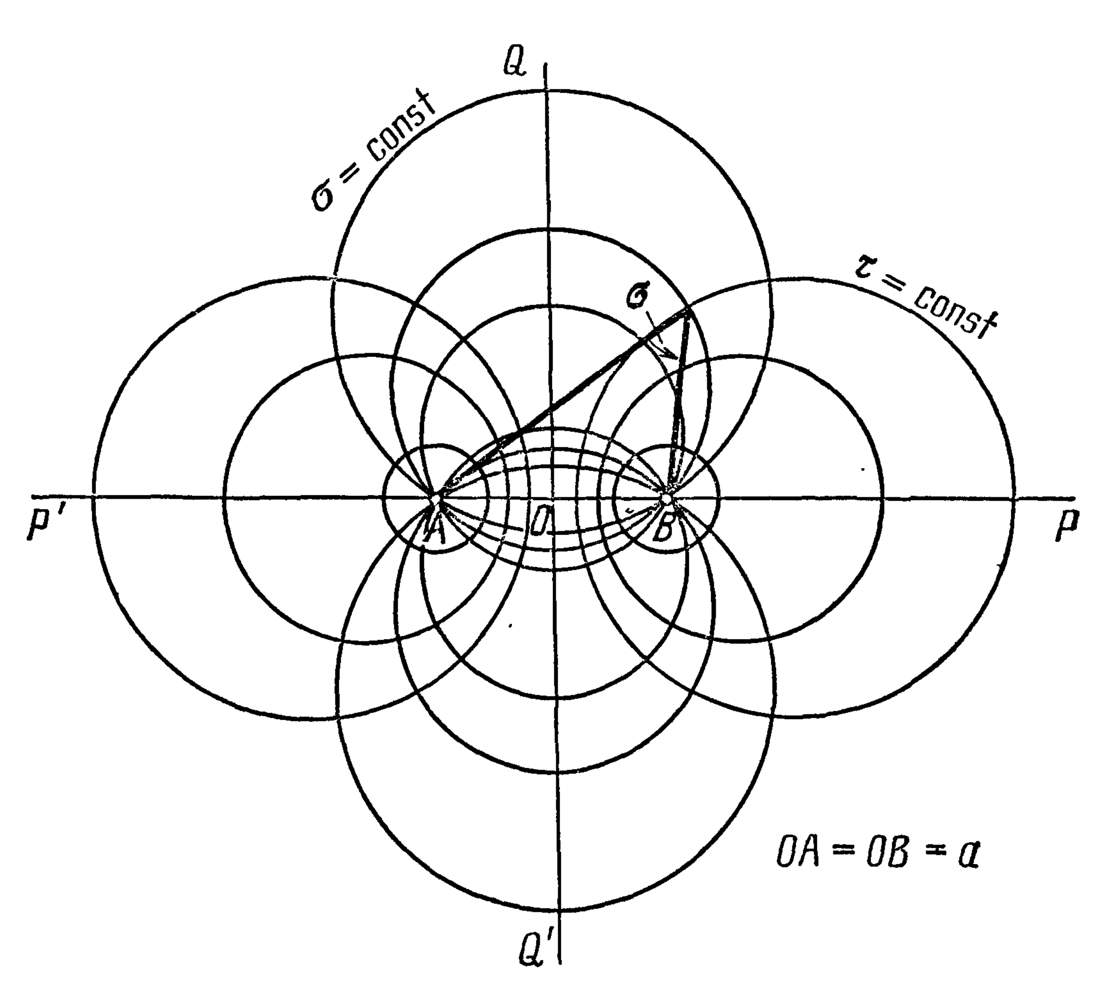


Рис. 6.5-3. Семейство окружностей с двумя полюсами A, B и семейство окружностей, ортогональных к ним. Эти кривые определяют биполярную систему координат на плоскости и порождают координатные поверхности в следующих системах координат:

1) бицилиндрических (если эти кривые смещаются перпендикулярно к плоскости рисунка; табл. 6.5-10);
2) тороидальных (если эти кривые вращаются вокруг оси $Q'OQ$; табл. 6.5-11);
3) биполярных (если эти кривые вращаются вокруг оси $P'OP$; табл. 6.5-12).

Таблица 6.5-11

Тороидальные координаты σ, τ, φ

(ось Oz — ось вращения; см. также рис. 6.5-3)

(a) Координатные поверхности

$$x^2+y^2+(z-a\operatorname{ctg}\sigma)^2=\frac{a^2}{\sin^2\sigma}\ (\textit{сферы}),$$

$$(\sqrt{x^2+y^2}-a\operatorname{cth}\tau)^2+z^2=\frac{a^2}{\operatorname{sh}^2\tau}\ (\textit{торы}),$$

$$y=x\operatorname{tg}\varphi\ (\textit{полуплоскости}, \text{ проходящие через ось } Oz).$$

(b) Преобразования

$$x=\frac{a\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}\cos\varphi,\qquad \sigma=\frac{i}{2}\ln\frac{x^2+y^2+(z-ia)^2}{x^2+y^2+(z+ia)^2},$$

$$y=\frac{a\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}\sin\varphi,\qquad \tau=\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{x^2+y^2}+a)^2+z^2}{(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2},$$

$$z=\frac{a\sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma},\qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x},$$

$$-\pi\leqslant\sigma\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\tau<\infty,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi.$$

(c) $$g_{\sigma\sigma}=g_{\tau\tau}=\frac{a^2}{(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)^2},\quad g_{\varphi\varphi}=\frac{a^2\operatorname{sh}^2\tau}{(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)^2}.$$

(d) Лапласиан скалярной функции

$$\nabla^2\Phi=\frac{(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)^3}{a^2\operatorname{sh}\tau}\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right)+\frac{1}{\operatorname{sh}\tau\,(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right]$$

Таблица 6.5-12

Биполярные координаты σ, τ, φ

(ось Oz — ось вращения, см. также рис. 6.5-3)

(a) Координатные поверхности

$$x^2+y^2+(z-a\operatorname{cth}\tau)^2=\frac{a^2}{\operatorname{sh}^2\tau}\ (\textit{сферы}),$$

$(\sqrt{x^2+y^2}-a\operatorname{ctg}\sigma)^2+z^2=\frac{a^2}{\sin^2\sigma}$ (*поверхности*, полученные при вращении дуг окружностей $(y-a\operatorname{ctg}\sigma)^2+z^2=\frac{a^2}{\sin^2\sigma}$ вокруг оси Oz; так как $|\operatorname{ctg}\sigma|<\frac{1}{|\sin\sigma|}$, то окружности пересекают ось Oz),

$$y=x\operatorname{tg}\varphi\ (\textit{полуплоскости}, \text{ проходящие через ось } Oz).$$

(b) Преобразования

$$x=\frac{a\sin\sigma\cos\varphi}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma},\qquad \tau=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2+(z+a)^2}{x^2+y^2+(z-a)^2},$$

$$y=\frac{a\sin\sigma\sin\varphi}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma},\qquad \sigma=\frac{i}{2}\ln\frac{[\sqrt{x^2+y^2}-ia]^2+z^2}{[\sqrt{x^2+y^2}+ia]^2+z^2},$$

$$z=\frac{a\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma},\qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x},$$

$$-\infty<\tau<\infty,\quad 0\leqslant\sigma<\pi,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi.$$

(c) $$g_{\tau\tau}=g_{\sigma\sigma}=\frac{a^2}{(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)^2},\quad g_{\varphi\varphi}=\frac{a^2\sin^2\sigma}{(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)^2}.$$

(d) Лапласиан скалярной функции

$$\nabla^2\Phi=\frac{(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)^3}{a^2\sin\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right)+\frac{1}{\sin\sigma\,(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right]$$

Примечание. Семейство координатных поверхностей

$$x^1 = x^1(x, y, z) = \text{const}, \quad x^2 = x^2(x, y, z) = \text{const}, \quad x^3 = x^3(x, y, z) = \text{const}$$

является в то же время семейством координатных поверхностей и для всех систем координат

$$\overline{x}^1 = \overline{x}^1(x^1), \quad \overline{x}^2 = \overline{x}^2(x^2), \quad \overline{x}^3 = \overline{x}^3(x^3).$$

∗ В таблицах 6.5-2—6.5-12 не приведены выражения для дифференциальных операторов $\nabla\Phi$, $\nabla \cdot \mathbf{F}$ и $\nabla \times \mathbf{F}$ в соответствующих системах координат. Их легко получить, пользуясь общими формулами табл. 6.4-1 (b), так как для всех систем координат даны выражения для функций g_{ii}.

Полные таблицы выражений для дифференциальных операторов приведены в [5.2]. Следует отметить, что применяются различные обозначения для координат; поэтому необходима осторожность при пользовании разными источниками.

Формулы п. 6.4-3 позволяют получать выражения для векторных элементов линии $d\mathbf{r}$ и поверхности $d\mathbf{S}$ и элемента объема dV.

Различные дополнительные формулы (например, символы Кристоффеля) могут быть получены с помощью соотношений, приведенных в пп. 16.10-1 — — 16.10-8. ∗

ГЛАВА 7
ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

7.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Теория аналитических функций комплексного переменного доставляет инженерам и исследователям много полезных математических моделей. Многие математические теоремы упрощаются, если рассматривать действительные переменные как частный случай комплексных переменных. Комплексные переменные употребляют для описания двумерных векторов в физике; аналитические функции комплексного переменного описывают двумерные скалярные и векторные поля (п. 15.6-8 и п. 15.6-9). Наконец, аналитические функции комплексного переменного реализуют конформные отображения одной плоскости на другую (пп. 7.9-1 — 7.9-5).

7.2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ОБЛАСТИ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

7.2-1. Функции комплексного переменного (см. также п. 1.3-2 и п. 4.2-1 и табл. 7.2-1; отсылаем к гл. 21 для дополнительных примеров). Комплексная функция

$$w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)=|w|e^{i\theta} \tag{7.2-1}$$

$$(z=x+iy=|z|e^{i\varphi})$$

каждому значению независимой комплексной переменной z из некоторой области определения ставит в соответствие одно или несколько значений зависимой комплексной переменной w.

Однозначные, многозначные и *ограниченные* функции комплексного переменного определены в пп. 4.2-2, а и 4.3-2, b. *Пределы комплексных функций и последовательностей и непрерывность комплексных функций*, а также *сходимость, абсолютная сходимость и равномерная сходимость комплексных рядов и несобственных интегралов* были определены в гл. 4; **теоремы гл. 4 применимы к комплексным функциям и переменным, если они не сформулированы специально для действительных количеств.**

В частности, *каждый комплексный степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ *имеет действительный радиус сходимости* r_c $(0 \leqslant r_c \leqslant \infty)$ *такой, что ряд сходится равномерно и абсолютно при* $|z-a| < r_c$ *и расходится при* $|z-a| > r_c$ (п. 4.10-2, а).

7.2-2. z-плоскость и w-плоскость. Окрестности. Бесконечно удаленные точки (см. также п. 4.3-5). Значения независимой переменной

$$z=x+iy$$

ставятся в соответствие единственной точке (x, y) *комплексной плоскости* z. Значения $w=u+iv$ таким же образом ставятся в соответствие точкам (u, v) *плоскости* w.

Окрестность (открытая) точки $z=a$, лежащей в конечной части плоскости, определяется как совокупность точек z таких, что $|z-a| < \delta$, где $\delta > 0$.

Таблица 7.2-1

Действительная и мнимая части, нули и особенности для наиболее часто встречающихся функций $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$

(см. также п. 1.3-2 и пп. 21.2-9—21.2-11) $|f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2}$; если $\arg f(z) = \theta$, то $\operatorname{tg}\theta = \frac{v}{u}$.

Функция $f(z)$	$u(x, y)$	$v(x, y)$	Нули (m — порядок)	Изолированные особенности
z	x	y	$z = 0, \quad m = 1$	Полюс ($m = 1$) при $z = \infty$
z^2	$x^2 - y^2$	$2xy$	$z = 0, \quad m = 2$	Полюс ($m = 2$) при $z = \infty$
$\frac{1}{z}$	$\frac{x}{x^2 + y^2}$	$-\frac{y}{x^2 + y^2}$	$z = \infty, \quad m = 1$	Полюс ($m = 1$) при $z = 0$
$\frac{1}{z^2}$	$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$	$\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$	$z = \infty, \quad m = 2$	Полюс ($m = 2$) при $z = 0$
$\frac{1}{z - (a + ib)}$ (a, b действительны)	$\frac{x - a}{(x - a)^2 + (y - b)^2}$	$-\frac{y - b}{(x - a)^2 + (y - b)^2}$	$z = \infty, \quad m = 1$	Полюс ($m = 1$) при $z = a + ib$
$\sqrt{z}$	$\pm\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}\right)^{1/2}$	$\pm\left(\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}\right)^{1/2}$	$z = 0$ (точка разветвления)	Точка разветвления порядка 1 при $z = 0$ Точка разветвления порядка 1 при $z = \infty$
e^z	$e^x \cos y$	$e^x \sin y$		Существенно особая точка при $z = \infty$

Таблица 7.2-1 (*продолжение*)

Функция $f(z)$	$u(x, y)$	$v(x, y)$	Нули (m — порядок)	Изолированные особенности
$\sin z$	$\sin x \operatorname{ch} y$	$\cos x \operatorname{sh} y$	$z = k\pi,\ m = 1$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$	Существенно особая точка при $z = \infty$
$\cos z$	$\cos x \operatorname{ch} y$	$-\sin x \operatorname{sh} y$	$z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,\ m = 1$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$	Существенно особая точка при $z = \infty$
$\operatorname{sh} z$	$\operatorname{sh} x \cos y$	$\operatorname{ch} x \sin y$	$z = k\pi i,\ m = 1$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$	Существенно особая точка при $z = \infty$
$\operatorname{ch} z$	$\operatorname{ch} x \cos y$	$\operatorname{sh} x \sin y$	$z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i,\ m = 1$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$	Существенно особая точка при $z = \infty$
$\operatorname{tg} z$	$\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$	$\dfrac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$	$z = k\pi,\ m = 1$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$	Полюсы ($m = 1$) при $z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $z = \infty$ — точка, предельная для полюсов
$\operatorname{th} z$	$\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$	$\dfrac{\sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$	$z = k\pi i,\ m = 1$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$	Полюсы ($m = 1$) при $z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $z = \infty$ — точка, предельная для полюсов
$\ln z$	$\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$	$\arg z + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$	$z = 1,\ m = 1$ (для ветви, соответствующей $k = 0$)	Логарифмические точки разветвления при $z = 0$, $z = \infty$

Бесконечно удаленная точка ($z=\infty$) определяется как точка $\tilde{z}$, соответствующая началу координат ($z=0$) при преобразовании $\tilde{z}=1/z$. **Окрестностью точки** $z=\infty$ является внешность любого круга.

7.2-3. Кривые и контуры (см. также п. 2.1-9 и п. 3.1-13). *Непрерывная кривая* в z-плоскости есть последовательность точек $z=x+iy$ таких, что

$$z=z(t) \quad \text{или} \quad x=x(t), \quad y=y(t)$$
$$(-\infty \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \leqslant \infty), \tag{7.2-2}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции действительного параметра t. Непрерывная кривая (или ее часть) есть **простая кривая (жорданова дуга)**, если она состоит из единой ветви и не содержит кратных точек; это значит, что функции $x(t)$ и $y(t)$ однозначны и в замкнутом интервале $[t_1, t_2]$ нет таких двух *различных* значений τ_1 и τ_2, для которых справедливы оба равенства

$$x(\tau_1)=x(\tau_2) \quad \text{и} \quad y(\tau_1)=y(\tau_2).$$

Простая замкнутая кривая (замкнутая жорданова кривая) есть непрерывная кривая, состоящая из единой ветви без кратных точек, кроме совпадающих начальной и конечной точек.

Простая кривая или простая замкнутая кривая называется (простым) **контуром**, если она спрямляема (п. 4.6-9)[1]). Элемент расстояния между соответствующими точками z и $z+dz$ контура (2) есть

$$ds=|dz|=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

7.2-4. Границы и области (см. также пп. 4.3-6, 7.9-16 и 12.5-1). Геометрия комплексной плоскости (включая определение расстояния и угла) тождественна с геометрией евклидовой плоскости точек (x, y) или векторов $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ для конечных значений x и y, кроме определения точки $z=\infty$ (п. 7.2-2) *). Точки комплексной плоскости z представляют гомеоморфное (п. 12.5-1) отображение точек сферы с долготой $\arg z$ и широтой $\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{|z|}{2}$ (*стереографическая проекция*); при этом точки $z=0$ и $z=\infty$ соответствуют противоположным полюсам. Точки каждой простой замкнутой кривой C разделяют плоскость на две связные открытые области: каждая непрерывная кривая, содержащая точки обеих областей, содержит точку их общей границы (*теорема Жордана*).

Если C не содержит точку $z=\infty$, то одна из двух областей **ограничена** (т. е. находится целиком в конечной части плоскости, где $|z|$ ограничен), а другая не ограничена; если C содержит точку $z=\infty$, то обе области не ограничены.

В более общем случае граница C области D может быть множеством непересекающихся простых кривых (многосвязная область, см. также п. 4.3-6). В этом случае **положительное направление (положительный обход)** граничной кривой определяется как оставляющее область D (внутренность граничной кривой) слева (против часовой стрелки для наружной компоненты границы, см. также ниже рис. 7.5-1). Открытое множество точек по одну сторону от граничной кривой C есть открытая область; добавляя к этому множеству точки, лежащие на самой границе, получаем замкнутую область.

В дальнейшем, если область D дополняется ее граничными точками, то получившуюся замкнутую область будем обозначать $\overline{D}$.

7.2-5*. Комплексные контурные интегралы (см. также п. 4.6-1 и 4.6-10). По определению

$$\int_C f(z)\,dz=\lim_{\max|z_i-z_{i-1}|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(z_i-z_{i-1}), \tag{7.2-3a}$$

где точки $z_0, z_1, \ldots, z_n$ расположены одна за другой вдоль контура C; $a=z_0$ —

---

[1]) Некоторые авторы применяют термин контур только к регулярным кривым (п. 3.1-13).

*) В комплексной плоскости вводится только *одна* бесконечно удаленная точка. В проективной плоскости, т. е. в евклидовой плоскости, дополненной несобственными элементами (бесконечно удаленными точками) любая совокупность параллельных прямых определяет свою бесконечно удаленную точку; эти точки образуют бесконечно удаленную прямую.

начальная точка контура, $b=z_n$ — конечная. Каждая из точек ζ_i лежит на участке кривой $[z_{i-1}, z_i]$ и может совпадать с одним из его концов.

Из определения интеграла (3a) следует, что

$$\int\limits_C f(z)\,dz=\int\limits_C u(x, y)\,dx-v(x, y)\,dy+i\int\limits_C v(x, y)\,dx+u(x, y)\,dy, \quad (7.2\text{-}3b)$$

где действительные криволинейные интегралы берутся по тому же контуру, что и комплексный интеграл. *Свойства интегралов табл.* 4.6-1 *переносятся на рассматриваемые интегралы*; в частности, изменение направления интегрирования на контуре C изменяет знак интеграла.

Если вдоль контура C функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны (т. е. непрерывны функции $u[x(t), y(t)]$ и $v[x(t), y(t)]$, где $x(t)$, $y(t)$ — параметрические уравнения контура (см. (7.2-3)), *то интеграл* (3a) *существует.*

Если при этом длина контура C равна L и на контуре

$$|f(z)|\leqslant M,$$

то

$$\left|\int\limits_C f(z)\,dz\right|\leqslant ML. \quad (7.2\text{-}4)$$

Если контур C содержит точку $z=\infty$ или если $f(z)$ не ограничена на C, то интеграл (3) может быть определен как несобственный интеграл в смысле п. 4.6-2.

7.3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ (РЕГУЛЯРНЫЕ, ГОЛОМОРФНЫЕ) ФУНКЦИИ

7.3-1. Производная функция (см. также п. 4.5-1). Функция $w=f(z)$ называется **дифференцируемой** в точке $z=a$, если предел

$$\frac{dw}{dz}=f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \quad (7.3\text{-}1)$$

(**производная** $f(z)$ **по** z) существует при $z=a$ и не зависит от способа стремления Δz к нулю. Функция может быть дифференцируема в точке (например, $|z|^2$ при $z=0$), на кривой и во всей области.

7.3-2. Уравнения Коши — Римана. *Для того чтобы функция $f(z)=u(x, y)+i\,v(x, y)$, определенная в некоторой области, была дифференцируемой в точке z этой области, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы**) *в той же точке и чтобы, кроме того, выполнялись условия*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad \text{(уравнения Коши — Римана)}. \quad (7.3\text{-}2)$$

Тогда

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}; \quad (7.3\text{-}3)$$

✻ При переходе к полярной системе координат $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, где $r=|z|$ и $\varphi=\arg z$, уравнения Коши — Римана принимают следующий вид ($r\neq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi},\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}.$$

Производная $f'(z)$ равна

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=-\frac{i}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}+i\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right). \text{ ✻}$$

---

*) Т. е. имели полные дифференциалы; для этого достаточно, чтобы частные производные u'_x, u'_y, v'_x, v'_y были непрерывны в рассматриваемой точке (см. п. 4.5-3).

7.3-3. Аналитические функции.

(a) Однозначная функция $f(z)$ называется **аналитической (регулярной, голоморфной)** в точке $z=a$, если она *дифференцируема в некоторой окрестности* точки a.

$f(z)$ — **аналитическая в точке** a *тогда и только тогда, когда она представима степенным рядом* $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$, *сходящимся в некоторой окрестности точки* $z=a$ (равносильное определение).

Функция называется **аналитической в открытой области** D, если она *аналитическая в каждой точке этой области*.

Отсылаем к пп. 7.4-1 — 7.4-3 для расширения этого определения применительно к многозначным функциям.

(b) $f(z)$ называется **аналитической в бесконечности**, если функция $F(z)=f(^1/_z)$ — аналитическая в точке $z=0$.

Функция $f(z)$ *аналитична в бесконечности тогда и только тогда, когда она может быть представлена рядом* $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}$ *по отрицательным степеням* z, *сходящимся для достаточно больших значений* $|z|$ (см. также п. 7.5-3).

Термины *дифференцируемая, аналитическая, регулярная* и *голоморфная* применялись в одном и том же смысле разными авторами.

7.3-4. Свойства аналитических функций. *Пусть* $f(z)$ — *аналитическая в открытой области* D. *Тогда во всей области* D:

1) *уравнения Коши — Римана* (2) *удовлетворяются* (верно и обратное утверждение);

2) $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ — *сопряженные гармонические функции* (п. 15.6-8);

3) *все производные функции* $f(z)$ *существуют и являются аналитическими функциями* (см. также п. 7.5-1);

4) *в односвязной области* D *интеграл* $\int\limits_a^z f(\zeta)\,d\zeta$ *не зависит от контура интегрирования*, если только этот контур имеет конечную длину и целиком лежит в области D; *производная интеграла есть* $f(z)$ (см. также п. 7.5-1);

5) *значения* $f(z)$ *на линии или в подобласти, целиком лежащих в области* D, *определяют* $f(z)$ *единственным образом всюду в* D.

Все обычные правила дифференцирования и интегрирования (пп. 4.5-4 и 4.6-1) применимы к аналитическим функциям комплексного переменного.

Если функция $w=f(z)$ *аналитична в точке* $z=a$ *и* $f'(a)\neq 0$, *то* $f(z)$ *имеет аналитическую обратную функцию* $z(w)$ (п. 4.2-2, а), *определенную в окрестности точки* $w=f(a)$.

Если $W=F(w)$ *и* $w=f(z)$ — *обе аналитические, то* W *есть аналитическая функция от* z.

Если последовательность (или *ряд*, п. 4.8-1) *функций* $f_k(z)$, *аналитических в открытой области* D, *сходится равномерно к пределу* $f(z)$ *всюду в* D, *то* $f(z)$ — *аналитическая функция и последовательность* (или *ряд*) *производных* $f'_k(z)$ *сходится равномерно к* $f'(z)$ *всюду в* D (*теорема Вейерштрасса*).

* Если функции $f_k(z)$ — аналитические в области D и непрерывны в $\bar{D}$, то равномерная сходимость последовательности (или ряда) $f_k(z)$ во всей замкнутой области $\bar{D}$ будет следовать из равномерной сходимости на границе этой области. При этом можно гарантировать сходимость последовательности производных только в открытой области D. *

В условии теоремы Вейерштрасса *последовательность* (или *ряд*) *контурных интегралов* $\int_C f_k(z)\,dz$, *где контур* C — *конечной длины и лежит в* D, *сходится равномерно к* $\int_C f(z)\,dz$.

7.3-5. Теорема о максимуме модуля. *Абсолютное значение* $|f(z)|$ *функции* $f(z)$, *аналитической в открытой ограниченной области* D, *не может достигать максимума ни в одной точке области* D, *если только* $f(z)$ *не константа.* Если, кроме того, функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и $|f(z)| \leqslant M$ на границе, то $|f(z)| < M$ всюду внутри D при условии, что $f(z) \neq \text{const}$.

* Если функция $f(z)$ при приведенных условиях не обращается в нуль в области D, то и минимум $|f(z)|$ не может достигаться внутри области. *

7.4. МНОГОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ

7.4-1. Ветви. Обобщением теории аналитических функций является рассмотрение **ветвей** $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... многозначной функции $f(z)$, которые определяются как однозначные непрерывные функции в области их определения. Каждая ветвь принимает некоторое множество значений функции $f(z)$ (см. также п. 7.8-1).

7.4.-2. Точки разветвления и разрезы.

(a) Пусть многозначная функция $f(z)$ определена всюду в окрестности D точки $z=a$, исключая, быть может, саму точку a. Тогда точка a называется **точкой разветвления (точкой ветвления)** функции $f(z)$, если $f(z)$ переходит от одной своей ветви к другой, когда переменная точка z описывает в окрестности D замкнутую кривую вокруг точки a. Если после m-кратного обхода этой кривой в одном и том же направлении мы снова впервые вернемся к первоначальной ветви, то число $m-1$ называется **порядком** точки разветвления. Если $f(z)$ определена в точке разветвления, то значение $f(a)$ есть общее для всех ветвей, полученных при указанном обходе. (Примеры. Функция $\sqrt[3]{z}$ имеет точку разветвления порядка 2 при $z=0$; все три ветви равны нулю в точке разветвления. Функция $1/\sqrt[3]{z}$ также имеет точку разветвления порядка 2 при $z=0$; все три ветви в этой точке не определены (см. п. 7.6-2, b).)

* Если $z=a$ — точка разветвления порядка $m-1$, то функция $\Phi(\zeta) = f(\zeta^m + a)$ однозначна в окрестности точки $\zeta=0$; если эту окрестность разбить на m секторов лучами $\arg\zeta = 2\pi k/m$ $(k=0, 1, \ldots, m-1)$, то значения функции $\Phi(\zeta)$ в каждом из таких секторов совпадают с соответствующими значениями одной из ветвей $f(z)$.

Если, описывая кривую вокруг точки $z=a$ сколько угодно раз в одном и том же направлении, мы каждый раз будем получать новые ветви, то точка a называется **точкой разветвления бесконечного порядка** или **логарифмической точкой разветвления.** (Пример: $w = \ln z$ при $z=0$.) *

Точка $z=\infty$ есть точка разветвления функции $f(z)$, если начало координат есть точка разветвления для функции $f(1/z)$ (см. также п. 7.6-3).

Пусть для функции $f(z)$ *обратная функция* $\Phi(w)$ *существует и однозначна всюду в окрестности точки* $w=f(a)$. *Тогда* $z=a\neq\infty$ *является точкой разветвления порядка* m *для* $f(z)$, *если* $\Phi'(w)$ *имеет нуль порядка* m (п. 7.6-1) *или полюс порядка* $m+2$ (п. 7.6-2) *при* $w=f(a)$. (Пример: $w=\sqrt{z}$ и $w=1/\sqrt{z}$, $a=0$.)

Подобным образом, *если* $\Phi(w)$ *существует и однозначна всюду в окрестности точки* $w=f(\infty)$, *то точка* $z=\infty$ *является точкой разветвления порядка* m *функции* $f(z)$, *если* $\Phi'(w)$ *имеет нуль порядка* $m+2$ *или полюс порядка* m *при* $w=f(\infty)$. (Пример: $w=\sqrt{z}$ и $w=1/\sqrt{z}$.)

* Если точка a является точкой разветвления функции $f(z)$, то в ее окрестности функция $f(z)$ может иметь несколько различных групп ветвей, а также ветви, аналитические или не аналитические в точке a и для которых

эта точка не является точкой разветвления. Каждая группа ветвей или отдельная ветвь определяются выбором начального значения функции $f(z)$ (элемента функции $f(z)$, см. п. 7.8-1). При обходе точки a ветви выбранной группы переходят друг в друга; все ветви этой группы имеют одно и то же значение в точке a, или они в ней не определены.

Если в окрестности точки разветвления $z=a$ функция $f(z)$ имеет несколько разных групп ветвей, то говорят, что функция $f(z)$ имеет над точкой a *разные* точки разветвления. На римановой поверхности функции $f(z)$ (см. п. 7.4-3) им соответствуют разные точки. Для каждой точки a функция $f(z)$ может иметь не более счетного множества различных групп ветвей.

Пример. Функция $w=\sqrt{1+\sqrt{z}}$ имеет четыре ветви. В окрестности точки $z=0$ эти ветви распадаются на две группы, по две ветви в каждой. Ветви первой группы объединяются значением $w|_{z=0}=1$, а ветви второй группы значением $w|_{z=0}=-1$. Для каждой группы точка $z=0$ является точкой разветвления первого порядка.

В окрестности точки $z=1$ ветви распадаются на три группы. Две ветви, образующие первую группу, объединяются условием $\sqrt{z}|_{z=1}=-1$ (тогда $w=0$); для этой группы точка $z=1$ служит точкой разветвления первого порядка. Вторая и третья группы, получающиеся при условии $\sqrt{z}|_{z=1}=1$, состоят каждая из одной аналитической в точке $z=1$ ветви, соответственно принимающей значения $w|_{z=1}=\sqrt{2}$ и $w|_{z=1}=-\sqrt{2}$.

Более сложные примеры см. в [7.7]. ⚹

(b) Отдельные однозначные ветви функции $f(z)$ определены в областях, ограниченных **разрезами**, которые являются простыми кривыми, выбранными так, что ни одна замкнутая кривая, окружающая точку разветвления, не лежит в области определения какой-либо однозначной ветви. Выбор ветвей и разрезов для заданной функции $f(z)$ не единствен, однако точки разветвления и число ветвей определяются единственным образом.

Примеры. Для функций $w=\sqrt[n]{z}$ и $w=\ln z$ разрезом может служить любая простая кривая, соединяющая точки разветвления $z=0$ и $z=\infty$, например, положительная или отрицательная части действительной оси.

Для функций $w=\sqrt{1-z^2}$ и $w=\operatorname{Arcsin} z$ разрезом может служить любая простая кривая, соединяющая точки разветвления -1 и 1, например, отрезок действительной оси (проходящий через точку $z=0$ или через точку $z=\infty$).

Для функций $w=\sqrt{1+z^2}$ и $w=\operatorname{Arctg} z$ разрезом может служить, например, отрезок мнимой оси, соединяющий точки разветвления $-i$ и i.

Все ветви *моногенной аналитической функции* могут быть последовательно получены аналитическим продолжением ее элемента (п. 7.8-1).

7.4-3. Римановы поверхности. Часто бывает полезно представить многозначную функцию как однозначную, определенную на римановой поверхности. Такая поверхность состоит из некоторого числа z-плоскостей, или «листов», соответствующих ветвям функции $f(z)$ и соединенных вдоль соответствующим образом выбранных разрезов. О способах построения римановых поверхностей см. [7.2], [7.4]. Заметим, что конструкция римановых поверхностей для произвольных функций может быть весьма сложной и требовать большой изобретательности при построении.

Если функция $w=f(z)$ и ей обратная обе многозначны, то z-плоскость и w-плоскость можно заменить соответствующими римановыми поверхностями; при этом функция $w=f(z)$ будет определять взаимно однозначное соответствие между точками обеих римановых поверхностей, исключая точки разветвления.

Замечание. Риманова поверхность для моногенной аналитической функции (полученной аналитическим продолжением, п. 7.8-1) будет связной; таким образом, многозначная функция $f(z)=\pm 1$, несмотря на аналитичность каждой ветви, не является моногенной аналитической функцией.

⚹ Более сложный пример представляет многозначная функция $w=\ln e^z$, распадающаяся на бесконечное множество различных однозначных ветвей $w=z+2k\pi i$ ($k=0, 1, 2, \ldots$). Эта функция не имеет точек разветвления. ⚹

Всюду в этой книге, исключая специальные утверждения, применимые к многозначным функциям, речь идет только об однозначных аналитических функциях или об однозначных ветвях аналитических функций (см. п. 7.8-1).

7.5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ И РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯДЫ

7.5-1. Интегральные теоремы. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в некоторой области, C — замкнутый контур, принадлежащий этой области вместе со своей внутренностью D, и z — любая точка из D. Тогда

$$\int_C f(\zeta)\,d\zeta = 0 \text{ (\textit{интегральная теорема Коши})}, \tag{7.5-1}$$

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \text{ (\textit{интегральная формула Коши})},\\ f'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta,\\ f''(z) &= \frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\,d\zeta,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{7.5-2}$$

Рис. 7.5-1 иллюстрирует применение интегральной теоремы Коши к многосвязной области (см. также п. 7.7-1).

Равенства (2) выражают функцию $f(z)$ и ее производные через граничные значения $f(z)$. В частности,

$$\int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i. \tag{7.5-3}$$

C, C_1, C_2, C_k

Рис. 7.5-1. Теорема Коши для многосвязной области (пп. 7.2-4 и 7.5-1). Область D ограничена внешним контуром C и внутренними контурами $C_1, C_2, \ldots, C_k$; направления обхода контуров указаны на рисунке:

$$\int_C f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Интегральная теорема Коши обобщается на тот случай, когда на контуре C функция $f(z)$ перестает быть аналитической, оставаясь непрерывной: если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, то интеграл (1), взятый по ее границе C, равен нулю.

* Интеграл вида $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$, где C — замкнутый или незамкнутый контур и $\varphi(\zeta)$ — функция, непрерывная на контуре C, называется *интегралом типа Коши*. Интеграл типа Коши представляет функцию $F(z)$, аналитическую в каждой области, не содержащей точек контура C. При этом $F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$. О свойствах и приложениях интегралов типа Коши см. [7.1], гл. 3, § 3. *

Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и равенство (1) *имеет место для любого замкнутого контура C, лежащего в D, то $f(z)$ — аналитическая в этой области (теорема Морера).*

7.5-2. Разложение в ряд Тейлора (см. также п. 4.10-4).

(a) *Если $f(z)$ аналитична внутри окружности K радиуса r с центром в точке $z=a$ $(a \neq \infty)$, то существует единственный ряд по степеням $(z-a)$, равномерно сходящийся к $f(z)$ при $|z-a| \leqslant r' < r$:*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k, \qquad (7.5\text{-}4)$$

где

$$a_k=\frac{1}{k!} f^{(k)}(a)=\frac{1}{2\pi i} \int_{K'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta$$

и K' — окружность $|z-a|=r'$.

Наибольший круг K_C $(|z-a| \leqslant r_C)$, все внутренние точки которого лежат внутри области, в которой $f(z)$ аналитична, является **кругом сходимости** степенного ряда (4); r_C есть **радиус сходимости** (п. 4.10-2, а). Наиболее важные разложения функций в степенные ряды приведены в п. 21.2-12.

(b) Если $M(r')$ — верхняя граница $|f(z)|$ на K', то

$$|a_n|=\frac{1}{n!}|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{M(r')}{r'^n} \quad (\textit{неравенства Коши}). \qquad (7.5\text{-}5)$$

(c) Если в ряде Тейлора (4) отбросить все члены, стоящие за $a_{n-1}(z-a)^{n-1}$, то *остаточный член* $R_n(z)$ равен

$$R_n(z)=\frac{(z-a)^n}{2\pi i} \int_{K'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-a)^n (\zeta-z)}, \qquad |R_n(z)| \leqslant \left(\frac{|z-a|}{r'}\right)^n \frac{r' M(r')}{r'-|z-a|}. \qquad (7.5\text{-}6)$$

$\left(\text{Если положить } |z-a|=kr', \text{ где } k<1, \text{ то } R_n(z) \leqslant \frac{k^n M(r')}{1-k}.\right)$

7.5-3. Разложение в ряд Лорана.

(a) *Если $f(z)$ аналитична в кольце между двумя концентрическими окружностями K_1 и K_2 с центрами в точке $z=a$ $(a \neq \infty)$ и радиусами r_1 и $r_2 < r_1$, то существует единственное разложение в ряд по положительным и отрицательным степеням $(z-a)$*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k+\sum_{k=1}^{\infty} b_k (z-a)^{-k} \quad (r_2<|z-a|<r_1), \qquad (7.5\text{-}7)$$

где

$$a_k=\frac{1}{2\pi i} \int_{K'_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}}, \qquad b_k=\frac{1}{2\pi i} \int_{K'_2} (\zeta-a)^{k-1} f(\zeta)\, d\zeta,$$

K'_1 — окружность $|z-a|=r'_1<r_1$ и K'_2 — окружность $|z-a|=r'_2>r_2$. Первая сумма в равенстве (7) равномерно сходится для $|z-a| \leqslant r'_1$ и аналитична внутри K_1; вторая сумма (**главная часть** *разложения для $f(z)$*) *равномерно сходится для $|z-a| \geqslant r'_2$ и аналитична во внешности окружности K_2.*

Замечание. Случай $a=\infty$ приводится к предыдущему при помощи преобразования $\tilde{z}=1/z$, переводящего $z=\infty$ в начало координат.

* Ряд (7.5-7) можно записать в виде

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k, \qquad c_k=\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\, d\zeta,$$

где Γ — любая окружность, расположенная между K_1 и K_2. *

(b) Если в первой сумме равенства (7) ограничиться членами по $a_{n-1}(z-a)^{n-1}$ включительно, то остаточный член $R_n(z)$ будет равен

$$\left.\begin{aligned} R_n(z) &= \frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_{K_1'}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^n(\zeta-z)}, \\ |R_n(z)| &\leqslant \left(\frac{|z-a|}{r_1'}\right)^n \frac{r_1' M(r_1')}{r_1'-|z-a|}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.5\text{-}8)$$

Если во второй сумме равенства (7) последним слагаемым взять $b_{n-1}(z-a)^{-(n-1)}$, то остаточный член $R_n^*(z)$ будет равен

$$\left.\begin{aligned} R_n^*(z) &= \frac{1}{2\pi i(z-a)^n}\int_{K_2'}\frac{(\zeta-a)^n f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \\ |R_n^*(z)| &\leqslant \left(\frac{r_2'}{|z-a|}\right)^n \frac{r_2' M(r_2')}{|r-a|-r_2'}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.5\text{-}9)$$

$M(r_1')$ и $M(r_2')$ — верхние границы для $|f(z)|$ на K_1' и K_2' соответственно.

7.6. НУЛИ И ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

7.6-1. Нули (см. также п. 1.6-2). Точки z, для которых $f(z)=0$, называются **нулями** функции $f(z)$ (корнями уравнения $f(z)=0$). Функция $f(z)$, аналитическая в точке $z=a$, имеет **нуль порядка** m, где m — целое положительное число, если в точке $z=a$ первые m коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора (7.5-4) равны нулю. При этом $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке a и $\varphi(a)\neq 0$.

Нули функции $f(z)$, аналитической в области D, все изолированы друг от друга (т. е. каждый нуль имеет окрестность, внутри которой $f(z)\neq 0$, исключая сам нуль), или $f(z)$ тождественно равна нулю в области D.

* Иначе говоря, нули функции $f(z)$, не равной тождественно нулю, не могут иметь предельной точки в области D. В то же время они могут иметь предельную точку на границе области D. Например, пусть D — круг $|z|<1$ и $f(z)=\sin\frac{1}{1-z}$. Нули $z=1-\frac{1}{k\pi}$ имеют предельную точку $z=1$. *

Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — аналитические в односвязной ограниченной области D и на ее контуре C и если $|f_2(z)|<|f_1(z)|\neq 0$ на C, то функции $f_1(z)$ и $f_1(z)+f_2(z)$ имеют одинаковое число нулей в области D (теорема Руше).

Каждый многочлен степени n имеет n нулей с учетом их кратности (*основная теорема алгебры*, см. также п. 1.6-3).

7.6-2*. Особые точки.

(a) Особые точки однозначных аналитических функций. **Особой точкой** или **особенностью** функции $f(z)$ называется точка, в которой $f(z)$ не аналитична. Точка $z=a$ называется **изолированной особенностью** $f(z)$, если существует действительное число $\delta>0$ такое, что $f(z)$ аналитична при $0<|z-a|<\delta$, но не в самой точке $z=a$. Изолированные особенности для $z=a\neq\infty$ могут быть такими:

1. **Устранимая особенность,** если функция $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности $z=a$, исключая, возможно, саму точку a, т. е. когда все коэффициенты b_k разложения в ряд Лорана (7.5-7) функции $f(z)$ в точке a равны нулю.

Пример. $w=\frac{\sin z}{z}$ имеет устранимую особенность при $z=0$.

В дальнейшем устранимые особые точки обычно не считаются особыми.

2. **Полюс порядка** m ($m=1, 2, \ldots$), если в разложении Лорана (7.5-7) функции $f(z)$ по степеням $(z-a)$

$$b_m\neq 0,\quad b_{m+1}=b_{m+2}=\ldots=0$$

(главная часть разложения содержит лишь *конечное* число членов). В этом случае $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$ при любом стремлении z к a. При этом функция $F(z)=1/f(z)$ будет аналитична в некоторой окрестности точки a (если положить $F(a)=0$) и иметь в этой точке нуль порядка m. Функцию $f(z)$ в окрестности точки a — полюса порядка m — можно представить в виде $f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a)^m}$, где $\psi(z)$ аналитична и $\psi(a)\neq 0$.

Примеры. $w=\frac{1}{(z-2)^3}$ имеет полюс 3-го порядка при $z=2$; $w=\operatorname{tg} z$ имеет полюсы 1-го порядка в точках $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$.

3. **Существенно особая точка**, если в разложении Лорана (7.5-7) функции $f(z)$ имеется бесконечное число членов, содержащих отрицательные степени $(z-a)$; при этом не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции $f(z)$ при z, стремящемся к a.

Примеры. Функции $\sin(1/z)$ и $e^{1/z}$ имеют существенно особую точку при $z=0$.

* (b) Особые точки многозначного характера. Особые точки многозначного характера являются *точками разветвления многозначной функции* $f(z)$. Определение точки разветвления конечного порядка и логарифмической точки разветвления дано в п. 7.4-2.

Пусть точка разветвления $z=a$ имеет конечный порядок, равный $m-1$, т. е. объединяет группу из $m\geqslant 2$ ветвей функции $f(z)$. Если все эти ветви имеют конечный или бесконечный предел при $z\to a$, то точка a называется **алгебраической точкой разветвления**. В этом случае однозначная функция (см. п. 7.4-2)

$$F(\zeta)=f(\zeta^m+a) \tag{7.6-1}$$

имеет при $\zeta=0$ *правильную точку* или *полюс*.

Если ветви функции $f(z)$ не имеют предела при $z\to a$, то точка a называется **трансцендентной точкой разветвления** *). В этом случае однозначная функция $F(\zeta)$ имеет при $\zeta=0$ *существенно особую точку*.

Разложение функции $F(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta=0$ в ряд Лорана порождает представление многозначной функции $f(z)$ в окрестности точки разветвления конечного порядка

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^{n/m} \qquad (a\neq\infty).$$

Если a — алгебраическая точка разветвления, то лишь конечное число коэффициентов c_n с отрицательными индексами отлично от нуля; в противном случае a — трансцендентная точка разветвления.

Примеры. Функция $\sqrt[3]{z-1}$ имеет алгебраическую точку разветвления порядка 2 при $z=1$; эта точка есть нуль для всех трех ветвей.

Для функции $1/\sqrt[3]{z-1}$ точка $z=1$ также является алгебраической точкой разветвления порядка 2; предел любой ветви при $z\to 1$ равен ∞. Соответствующая однозначная функция $\Phi(\zeta)=1/\zeta$ имеет в точке $\zeta=0$ полюс.

Функция $\sin\left(1/\sqrt[3]{z}\right)$ имеет трансцендентную точку разветвления порядка 2 при $z=0$. Соответствующая функция $\Phi(\zeta)=\sin(1/\zeta)$ имеет при $\zeta=0$ существенно особую точку.

Если в окрестности точки a функция $f(z)$ имеет несколько разных групп ветвей, т. е. если над точкой a лежат разные точки разветвления (см. п. 7.4-2), то поведение каждой такой группы ветвей нужно рассматривать независимо

*) Логарифмические точки разветвления относят к числу трансцендентных.

друг от друга; для каждой такой группы строится своя однозначная функция $F(\zeta)$. ⁎

7.6-3. Нули и особенности в бесконечности. Функция $f(z)$ аналитична в бесконечности, если $f(1/z)$ — аналитическая в начале координат (п. 7.3-3, b). Точка $z=\infty$ есть нуль или особенность одного из типов, указанных в п. 7.6-2, если $f(1/z)$ имеет соответственный характер в начале координат. Поведение $f(z)$ в бесконечности может быть исследовано с помощью разложения $f(1/z)$ в ряд Лорана в окрестности $z=0$.

7.6-4. Теоремы Вейерштрасса и Пикара. Пусть $f(z)$ — однозначная функция, имеющая изолированную существенно особую точку при $z=a$. Тогда

1) *для любого комплексного числа* A (включая $A=\infty$) *существует последовательность точек* $z_k \to a$ *такая, что* $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k)=A$ (*теорема Вейерштрасса* *));

2) *для любого комплексного числа* $A \neq \infty$, *за исключением, быть может, одного значения* $A=A_0$, *каждая окрестность точки* a *содержит бесконечное множество точек* z *таких, что* $f(z)=A$ (*теорема Пикара*).

⁎ Примеры. Функция $e^{1/z}$ имеет существенно особую точку $z=0$. Уравнение $e^{1/z}=A$ имеет в каждой окрестности этой точки бесконечное число корней для любого $A\neq\infty$, кроме $A=0$. Для функции $\sin(1/z)$, также имеющей существенно особую точку $z=0$, исключительных значений для A нет. ⁎

7.6-5. Целые функции.

(a) **Целой** функцией $f(z)$ называется однозначная аналитическая функция, не имеющая особых точек в конечной части плоскости. Она представляется всюду сходящимся степенным рядом $f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots$

Таким образом, целая функция может иметь единственную особую точку при $z=\infty$. *Если эта особенность есть полюс порядка* m, *то* $f(z)$ — *многочлен* (*целая рациональная функция*) *степени* m. *Если* $z=\infty$ — *существенно особая точка, то* $f(z)$ *называется целой трансцендентной функцией. Если, наконец,* $z=\infty$ — *правильная точка* (т. е. $f(z)$ — *аналитическая для всех значений* z), *то* $f(z)$ *есть константа* (*теорема Лиувилля*).

Целая трансцендентная функция принимает любое значение w, исключая, возможно, одно значение, в бесчисленном множестве точек z.

⁎ (b) Характеристики роста целых функций. Пусть $f(z)$ — целая функция и $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$. В силу теоремы о максимуме модуля (п. 7.3-5) $M(r)$ — *возрастающая функция* от r и $\lim\limits_{r\to\infty} M(r)=\infty$, если только $f(z)$ — не константа. Если $M(r)=O(r^{\mu})$, то $f(z)$ — многочлен степени не выше $[\mu]$ (целая часть μ).

Пусть $f(z)$ — целая трансцендентная функция. *Если существует число* $\beta>0$ *такое, что* $M(r)<e^{r^{\beta}}$ *для всех достаточно больших* r, *то* $f(z)$ *называется функцией конечного порядка.* Число $\rho=\inf\beta\geqslant 0$ называется **порядком** целой функции.

Примеры. e^z, $\sin z$, $\cos z$ — функции порядка 1, e^{z^2} — функция порядка 2, e^{e^z} не имеет конечного порядка (целая функция бесконечного порядка).

Если функция $f(z)$ *имеет порядок* ρ *и существует число* $K>0$ *такое, что* $M(r)<e^{Kr^{\rho}}$, *то* $f(z)$ *называется функцией конечного типа.* Число $\sigma=\inf K\geqslant 0$ называется **типом** целой функции.

---

*) Эта теорема была ранее доказана русским математиком *Ю. Сохоцким* и итальянским математиком *С. Казоратти*.

Отметим, что теорема справедлива для неизолированной особой точки, являющейся предельной для полюсов.

Если $\sigma > 0$, то $f(z)$ — функция нормального типа, если $\sigma = 0$, то минимального типа. Для функции бесконечного (максимального) типа полагают $\sigma = \infty$.

Если пределы справа существуют, то

$$\rho = \lim_{r \to \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}, \qquad \sigma = \lim_{r \to \infty} \frac{\ln M(r)}{r^\rho}.$$

Целая функция $f(z)$ называется **функцией экспоненциального типа,** если она первого порядка и конечного типа ($\rho = 1$, $\sigma < \infty$), а также если $\rho < 1$.

(с) Преобразование Фурье и целые функции (см. п. 4.11-3). Пусть функция $f(t)$ обращается в нуль при $|t| \geqslant a$. Тогда ее преобразование Фурье

$$\Omega(s) = \int_{-a}^{a} f(t)\, e^{-ist}\, dt$$

есть целая аналитическая функция от s экспоненциального типа $\leqslant a$ ($\rho = 1$ и $\sigma \leqslant a$, или $\rho < 1$).

Теорема Винера — Пэли. *Пусть* $\psi(s)$ — *целая функция экспоненциального типа* $\leqslant a$ *и такая, что* $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\, dx < \infty$ (интеграл берется по действительной оси). *Тогда существует функция* $f(t)$, *равная нулю при* $|t| \geqslant a$, *преобразование Фурье которой равно* $\psi(s)$. *

7.6-6. Разложение целой функции в произведение. Для каждой последовательности точек $z_0, z_1, z_2, \ldots$, не имеющих предельной точки (п. 4.3-6, а) в конечной части плоскости (т. е. имеющих $z = \infty$ своей единственной предельной точкой), существует целая функция $f(z)$, которая своими единственными нулями имеет нули порядка m_k, в точках $z = z_k$. Пусть $z_0 = 0$, $z_k \neq 0$ ($k > 0$); если $z_0 = 0$ не является нулем, то $m_0 = 0$. Функция $f(z)$ может быть представлена в виде

$$f(z) = z^{m_0} e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left[\frac{z}{z_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_k}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{r_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)^{r_k}\right]\right\}^{m_k}, \tag{7.6-2}$$

где $g(z)$ — некоторая целая функция, а целые числа r_k выбираются так, чтобы бесконечное произведение равномерно сходилось в любой ограниченной области (*теорема Вейерштрасса*; примеры см. в п. 21.2-13).

* Если последовательность $z_1, z_2, \ldots$ такова, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^p}$ сходится для некоторого целого положительного числа p, то все числа r_k можно положить равными $p - 1$. Если последовательность $\{z_k\}$ произвольная, то можно взять $r_k = [\ln k]$ (целая часть $\ln k$). *

7.6-7. Мероморфные функции. Однозначная функция $f(z)$ называется **мероморфной** в области D, если ее единственными особенностями в D являются полюсы. Число этих полюсов в каждой конечной замкнутой части D обязательно конечно. Полюсы могут иметь предельную точку на границе области D.

В частности, D может совпадать со всей конечной комплексной плоскостью (исключая $z = \infty$); тогда в любой конечной части плоскости имеется только конечное число полюсов, и единственной предельной точкой для полюсов может быть бесконечно удаленная точка.

Каждую функцию, мероморфную в конечной плоскости, можно представить в виде отношения двух целых функций, не имеющих общих нулей, и, следовательно, в виде отношения двух произведений вида (7.6-2).

Функция, мероморфная в конечной плоскости и имеющая в бесконечности правильную точку или полюс, есть *рациональная алгебраическая функция*, представимая в виде отношения двух многочленов (см. также п. 4.2-2, с).

7.6-8. Разложение мероморфных функций на простейшие дроби (см. также п. 1.7-4). *Пусть* $f(z)$ — *функция, мероморфная в конечной плоскости и имеющая полюсы с заданными главными частями* (п. 7.5-3) $\sum_{j=1}^{m_k} b_{kj}(z-z_k)^{-j}$ *в точках* $z=z_k$, *число которых конечно или бесконечно и которые не имеют предельных точек в конечной части плоскости. Тогда можно найти такие многочлены* $p_1(z)$, $p_2(z)$, ... *и целую функцию* $g(z)$, *что*

$$f(z)=\sum_k\left[\sum_{j=1}^{m_k} b_{kj}(z-z_k)^{-j}-p_k(z)\right]+g(z). \tag{7.6-3}$$

Ряд равномерно сходится в каждой ограниченной области, в которой $f(z)$ *аналитична (теорема Миттаг-Леффлера).*

7.6-9. Нули и полюсы мероморфных функций. *Пусть* $f(z)$ — *мероморфная функция в некоторой области* G *и* C — *замкнутый контур, принадлежащий вместе со своей внутренностью области* G *и не проходящий ни через нули, ни через полюсы функции* $f(z)$. *Пусть* N — *число нулей и* P — *число полюсов* $f(z)$, *лежащих внутри* G, *причем нуль или полюс порядка* m *считается* m *раз. Тогда*

$$N-P=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta=\frac{\Delta_C \operatorname{Arg} f(z)}{2\pi}; \tag{7.6-4}$$

если $P=0$, *то формула* (4) *дает число нулей*

$$N=\frac{\Delta_C \operatorname{Arg} f(z)}{2\pi}, \tag{7.6-5}$$

где $\Delta_C \operatorname{Arg} f(z)$ *обозначает изменение аргумента* $f(z)$ *при обходе точкой* z *контура* C *в положительном направлении (принцип аргумента).*

Формула (5) означает что $w=f(z)$ отображает движущуюся точку z, описывающую один раз контур C, на движущуюся точку w, окружающую в w-плоскости начало координат столько раз, сколько нулей имеет функция $f(z)$ внутри контура C в z-плоскости.

Формулы (4) и (5) играют важную роль для определения положения нулей и полюсов $f(z)$ и лежат в основе геометрических *критериев устойчивости* (см. [7.1]).

7.7. ВЫЧЕТЫ И КОНТУРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

7.7-1. Вычеты. Пусть в точке $z=a$ функция $f(x)$ или аналитична или имеет изолированную особенность. Тогда **вычетом** $\operatorname{Res} f(a)$ [1]) функции $f(z)$ в точке a называется коэффициент при $(z-a)^{-1}$ в разложении Лорана (7.5-7), или

$$\operatorname{Res} f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\,d\zeta, \tag{7.7-1a}$$

где C — контур, окружающий точку a и не содержащей внутри себя особенностей $f(z)$, отличных от a.

---

[1]) Вычеты обозначаются также $\operatorname{Res}[f(z);\,a]$ или $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$.

Вычет $\operatorname{Res} f(\infty)$ функции $f(z)$ при $z=\infty$ определяется как

$$\operatorname{Res} f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-C} f(\zeta)\,d\zeta, \qquad (7.7\text{-}1b)$$

где интегрирование производится в *отрицательном* направлении по контуру C (в этом случае внешность контура C остается слева), заключающему внутри себя *все* особые точки $f(z)$, лежащие в конечной части плоскости. Это значит, что $z=\infty$ является для функции $f(z)$ или правильной, или изолированной особой точкой.

$\operatorname{Res} f(\infty)$ равен взятому со знаком минус коэффициенту при z^{-1} в разложении Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Отметим, что

$$\operatorname{Res} f(\infty)=\lim_{z\to\infty}[-z f(z)], \qquad (7.7\text{-}2)$$

если этот предел существует.

Если $f(z)$ или аналитична, или имеет устранимую особенность при $z=a\neq\infty$, то $\operatorname{Res} f(a)=0$ (см. также формулу (7.5-1)). *Если $z=a\neq\infty$ есть полюс порядка m, то*

$$\operatorname{Res} f(a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]. \qquad (7.7\text{-}3)$$

В частности, пусть $z=a\neq\infty$ — простой полюс и $f(z)=p(z)/q(z)$, где $p(z)$ и $q(z)$ — аналитические функции в точке a и $p(a)\neq 0$. Тогда $q(a)=0$, $q'(a)\neq 0$ и

$$\operatorname{Res} f(a)=\frac{p(a)}{q'(a)}. \qquad (7.7\text{-}4)$$

Если бесконечность — правильная точка для функции $f(z)$, то вычет $\operatorname{Res} f(\infty)$ может и не равнятся нулю. Например, если $f(z)=1/z$, то $z=\infty$ есть нуль, а $\operatorname{Res} f(\infty)=-1$.

7.7-2. Теорема о вычетах (см. также п. 7.5-1). *Пусть однозначная функция $f(z)$ аналитична в области D, за исключением изолированных особых точек, а замкнутый контур C принадлежит вместе со своей внутренностью области D, содержит внутри себя конечное число $z_1, z_2, \ldots, z_n$ особых точек и не проходит ни через одну из них. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\,d\zeta=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_k)\ (\textit{теорема о вычетах}). \qquad (7.7\text{-}5)$$

С особой осторожностью нужно следить, чтобы контур C не пересекал разрезы для $f(z)$ (см. также п. 7.4-2).

Если функция $f(z)$ однозначна и аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением только изолированных особых точек (необходимо конечного числа, так как иначе существовала бы конечная или бесконечно удаленная предельная точка множества особых точек), то сумма всех ее вычетов (включая вычет $\operatorname{Res} f(\infty)$) равна нулю.

7.7-3. Вычисление определенных интегралов.

(а) Часто можно вычислять действительный определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, рассматривая его как часть комплексного контурного интеграла $\int_C f(z)\,dz$ при условии, что контур C включает интервал (a, b) действительной оси. Теорема о вычетах (5) может помогать в таких вычислениях и может, в частности, сводить неизвестные интегралы к уже известным.

(b) Для вычисления некоторых интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ следует применить формулу (5) к контуру C, состоящему из интервала $(-R, R)$ действительной оси и дуги C_R окружности $|z|=R$ в верхней полуплоскости. Следующие леммы часто позволяют отбросить интегралы по дуге C_R при $R\to\infty$:

1. $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)\,dz=0$, *если* $f(z)$ *аналитична при* $|z|>R_0$ *и* $zf(z)$ *стремится к нулю при* $|z|\to\infty$, *когда* $y\geqslant 0$; последнее, в частности, выполняется, если $|f(z)|<\frac{K}{|z|^{1+\alpha}}$, где $\alpha>0$, при всех достаточно больших $|z|$.

2. *Лемма Жордана. Если* $F(z)$ *аналитична в верхней полуплоскости, исключая, возможно, конечное число полюсов, и стремится к нулю при* $|z|\to\infty$, *когда* $y\geqslant 0$, *то для любого действительного положительного числа* m

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} F(\zeta)\,e^{im\zeta}\,d\zeta=0.$$

Метод контурного интегрирования может давать главное значение интеграла по Коши (см. п. 4.6-2) для $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, когда сам интеграл в обычном смысле не существует.

Лемма Жордана бывает особенно полезна для вычисления несобственных интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\,e^{imx}\,dx$ и, согласно формуле Эйлера, интегралов вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos mx\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\sin mx\,dx$$

эти интегралы встречаются при преобразовании Фурье п. 4.11-3 и в формуле обращения для преобразования Лапласа, п. 8.2-6).

(c) *Если* s *— какая-либо полуокружность круга* $|z-a|=\varepsilon$, *где точка* $z=a$ *— простой полюс функции* $f(z)$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{s} f(\zeta)\,d\zeta=\pi i \operatorname{Res} f(a).$$

Это используется, во-первых, при вычислении интегралов по контурам, когда приходится «огибать» простой полюс (например, при вычислении $\int \frac{e^{iz}}{z}\,dz$ по контуру, состоящему из отрезка $(-R, R)$ действительной оси и полуокружностей $|z|=R$ и $|z|=r$ при $R\to\infty$ и $r\to 0$) и, во-вторых, для вычисления главного значения по Коши некоторых несобственных интегралов.

(d) Теорему о вычетах можно применять к интегралам вида

$$\int\limits_{0}^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi,$$

где R — рациональная функция от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, если совершить подстановку

$$\left.\begin{aligned} z&=e^{i\varphi}, & d\varphi&=\frac{1}{iz}\,dz,\\ \cos\varphi&=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), & \sin\varphi&=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (7.7\text{-}6)$$

7.7-4. Применение вычетов к суммированию рядов. Пусть контур C окружает точки $z=m, z=m+1, z=m+2, \ldots, z=n$, где m — целое число, и пусть $f(z)$ аналитична

внутри C, за исключением, быть может, конечного числа полюсов $a_1, a_2, \ldots, a_N$, из которых ни один не совпадает с точками $z=m$, $z=m+1$, $z=m+2, \ldots, z=n$. Тогда

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \pi f(\zeta) \operatorname{ctg} \pi\zeta \, d\zeta - \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res} g(a_j), \tag{7.7-7}$$

где $\operatorname{Res} g(a_j)$ — вычет функции $g(z) = \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z$ в точке $z = a_j$;

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k f(k) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \pi f(\zeta) \operatorname{cosec} \pi\zeta \, d\zeta - \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res} g_1(a_j), \tag{7.7-8}$$

где $g_1(z) = \pi f(z) \operatorname{cosec} \pi z$. Иногда бывает возможно выбрать контур C так, что интеграл в правой части формулы (7) или (8) исчезает.

7.8. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

7.8-1. Аналитическое продолжение и моногенные аналитические функции (см. также пп. 7.4-1 — 7.4-3).

(a) Пусть однозначная функция $f_1(z)$ определена и аналитична всюду в области D_1; функция $f_2(z)$, определенная и аналитическая в области D_2, есть **аналитическое продолжение** $f_1(z)$, если существует пересечение областей D_1 и D_2, содержащее открытую область D_C, в которой функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают.

Аналитическое продолжение $f_2(z)$ *определяется единственным образом по значениям* $f_1(z)$ *в* D_C (см. также п. 7.3-3). Сверх того, *аналитические продолжения* $f_1(z)$ *удовлетворяют каждому функциональному уравнению и, в частности, каждому дифференциальному уравнению, которому удовлетворяет* $f_1(z)$ (*принцип консерватизма функциональных уравнений*). Можно также воспользоваться функцией $f_2(z)$ для расширения области определения $f_1(z)$ и обратно: рассматривать $f_1(z)$ и $f_2(z)$ как элементы единой аналитической функции $f(z)$, определенной всюду в D_1 и D_2.

$f_1(z)$ и/или $f_2(z)$ могут допускать дальнейшее аналитическое продолжение, ведущее к другим элементам функции $f(z)$.

(b) Многозначные функции. Заметим, что $f_1(z)$ и $f_2(z)$ не обязательно совпадают во всем пересечении областей их определения. $f_2(z)$ может иметь аналитическое продолжение $f_3(z)$, определенное в D_1, но не совпадающее с $f_1(z)$. *Аналитическое продолжение может производить элементы, принадлежащие к различным ветвям многозначной аналитической функции* $f(z)$; *два значения* $f(z_0)$, *полученные при аналитическом продолжении* $f_1(z)$ *вдоль двух различных путей* C *и* C_1, *совпадают, если* C *и* C_1 *не окружают точку разветвления* $f(z)$.

(c) Возможные аналитические продолжения данного элемента образуют **моногенную аналитическую функцию** $f(z)$, определенную, исключая изолированные особенности, во всей плоскости или в связной области с **естественными границами**. В то время как выбор последовательности элементов, определяющих $f(z)$, не является фиксированным, *принцип консерватизма функциональных уравнений применим ко всем элементам и каждый такой один элемент единственным образом определяет все ветви, изолированные особенности и естественную границу* $f(z)$.

7.8-2. *Методы аналитического продолжения.

(a) Стандартный метод аналитического продолжения отправляется от функции $f(z)$, определенной степенным рядом (7.5-4), сходящимся в круге $|z-a| < r$. Для каждой точки $z=b$ этого круга значения $f(b)$, $f'(b), \ldots$ известны и определяют разложение в ряд Тейлора в окрестности $z=b$. Новый степенной ряд сходится внутри круга $|z-b| < r'$, который может иметь

часть, расположенную вне первого круга. Тогда мы получаем аналитическое продолжение функции $f(z)$ в часть круга с центром в точке b, лежащую вне круга с центром в точке a. Этот процесс может быть продолжен вплоть до естественных границ функции; каждый степенной ряд есть элемент $f(z)$.

Замечание. Функция, определенная степенным рядом с конечным радиусом сходимости, имеет по крайней мере одну особую точку на границе круга сходимости.

(b) Пусть даны две односвязные области D_1 и D_2 без общих точек такие, что их границы имеют один общий кусок γ. Если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитичны соответственно в областях D_1 и D_2, непрерывны в $D_1+\gamma$ и $D_2+\gamma$ (т. е. вплоть до линии γ) и совпадают во всех точках кривой γ, то функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ являются аналитическими продолжениями друг друга.

(c) Принцип симметрии. Пусть $f(z)$ определена и аналитична в области D, граница которой содержит отрезок γ оси Ox, непрерывна в $D+\gamma$ и принимает на γ действительные значения. Тогда функция $f^*(z)$, определенная в области D^*, симметричной с областью D относительно действительной оси, соотношением

$$f^*(\bar{z})=\overline{f(z)}, \tag{7.8-1}$$

является аналитическим продолжением $f(z)$ в области D^*. Более общо, *пусть $f(z)$ определена и аналитична в области D, граница которой содержит дугу окружности или прямолинейный отрезок S_z, на котором $f(z)$ непрерывна и принимает значения, лежащие на некоторой дуге окружности или прямолинейном отрезке S_w в плоскости w. Тогда функция $f(z)$ может быть аналитически продолжена в область D^*, симметричную с областью D относительно S_z, причем ее значения в точках, симметричных относительно S_z, будут симметричны относительно S_w.*

7.9. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

7.9-1. Конформное отображение.

(a) Функция $w=f(z)$ отображает точки z-плоскости (или римановой поверхности, п. 7.4-3) в соответствующие точки w-плоскости (или римановой поверхности). В каждой точке z такой, что $f(z)$ аналитична и $f'(z)\neq 0$, *отображение* $w=f(z)$ **конформно**, т. е. угол между двумя кривыми, проходящими через точку z, переходит в равный по величине и по направлению отсчета угол между соответствующими кривыми в плоскости w.

Бесконечно малый треугольник около такой точки z отображается в подобный бесконечно малый треугольник w-плоскости; каждая сторона треугольника «растягивается» в отношении $|f'(z)|:1$ и поворачивается на угол $\arg f'(z)$. **Коэффициент искажения** (локальное отношение малых площадей) при отображении $w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ равен

$$|f'(z)|^2=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix} \tag{7.9-1}$$

в каждой точке z, где отображение конформно. Конформное отображение преобразует линии $x=\text{const}$, $y=\text{const}$ в семейство ортогональных траекторий в w-плоскости. Обратно, линии $u(x,y)=\text{const}$, $v(x,y)=\text{const}$ соответствуют ортогональным траекториям в z-плоскости (см. также табл. 7.2-1).

Область z-плоскости, отображающаяся на всю w-плоскость функцией $f(z)$, называется **фундаментальной областью** функции $f(z)$. Точки, где $f'(z)=0$ называются **критическими точками** отображения $w=f(z)$ [1]). Отображение, которое сохраняет величину, но не направление отсчета угла между двумя кривыми, называется **изогональным** или **конформным отображением второго рода** (*пример изогонального, но не конформного отображения*: $w=\bar{z}$).

[1]) Некоторые авторы называют особые точки, где $1/f'(z)=0$, также критическими точками $f(z)$.

(b) Отображение $w=f(z)$ **конформно в бесконечно удаленной точке,** если функция

$$w=f(1/z)=F(z)$$

отображает начало $z=0$ конформно в w-плоскость.

Две кривые пересекаются под углом γ в точке $z=\infty$, если преобразование $\tilde{z}=1/z$ переводит их в две кривые, пересекающиеся под углом γ в точке $\tilde{z}=0$. Аналогично $w=f(z)$ отображает точку $z=a$ конформно в точку $w=\infty$, если $\tilde{w}=1/f(z)$ отображает $z=a$ конформно в точку $\tilde{w}=0$ (см. также п. 7.2-3).

7.9.2. Дробно-линейное отображение (преобразование).

(а) Дробно-линейное отображение

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (bc-ad)\neq 0 \tag{7.9-2}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками z-плоскости и точками w-плоскости. Оно имеет две **инвариантные точки**

$$z=\frac{1}{2c}\left[(a-d)\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}\right] \tag{7.9-3}$$

(которые могут и совпадать), отображающиеся сами в себя. Отображение конформно всюду, исключая точку $z=-d/c$, которой соответствует $w=\infty$.

Прямым и окружностям z-плоскости соответствуют прямые или окружности w-плоскости и обратно; в этой связи можно прямые рассматривать как окружности с бесконечным радиусом, проходящие через бесконечно удаленную точку. Для каждого дробно-линейного отображения, отображающего четыре точки z_1, z_2, z_3, z соответственно в w_1, w_2, w_3, w,

$$\frac{z_1-z}{z_3-z}:\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=\frac{w_1-w}{w_3-w}:\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2} \tag{7.9-4}$$

(**инвариантное двойное отношение** или **ангармоническое отношение**[1])). Равенство (4) определяет *единственное дробно-линейное отображение, переводящее три данные точки* z_1, z_2, z_3 *соответственно в три данные точки* w_1, w_2, w_3. *Существует дробно-линейное отображение, которое преобразует заданную окружность или прямую в z-плоскости в заданную окружность или прямую в w-плоскости* (см. также табл. 7.9-2 и п. 7.9-3).

Частные случаи. Отображение

$$w=Az+B, \tag{7.9-5}$$

где A и B — произвольные комплексные числа, соответствует *вращению* на угол $\arg A$, *растяжению* в $|A|$ раз и параллельному сдвигу на вектор B. *Линейное отображение* (5) *есть самое общее конформное отображение, которое сохраняет подобие геометрических фигур.*

Отображение

$$w=\frac{1}{z} \tag{7.9-6}$$

представляет геометрически *инверсию* точки z относительно единичной окружности с центром в начале координат с последующим симметричным отображением относительно действительной оси. *Отображение* (6) *преобразует*:

1) прямые, проходящие через начало координат, в прямые, также проходящие через начало координат;

2) окружности, проходящие через начало координат, в прямые, не проходящие через начало координат, и наоборот (прямые, не проходящие через начало координат, в окружности, проходящие через начало);

3) окружности, которые не проходят через начало координат, в окружности, также не проходящие через начало координат.

---

[1]) Двойное отношение (4) действительно, если точки z_1, z_2, z_3, z (и следовательно, точки w_1, w_2, w_3, w) лежат на окружности или прямой.

(b) Дробно-линейные отображения (2) образуют группу; обратные преобразования и произведения дробно-линейных отображений также являются дробно-линейными (п. 12.2-7). Каждое дробно-линейное отображение (2) может быть представлено как результат (произведение) трех последовательных простейших дробно-линейных отображений:

$$z'=z+\frac{d}{c} \text{ (параллельный перенос)}, \tag{7.9-7a}$$

$$z''=\frac{1}{z'} \text{ (инверсия и симметрия)}, \tag{7.9-7b}$$

$$w=\frac{bc-ad}{c^2}z''+\frac{a}{c} \text{ (вращение и растяжение с последующим параллельным переносом)}. \tag{7.9-7c}$$

7.9-3. Отображение $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ *). Отображение

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{7.9-8a}$$

эквивалентно следующим:

$$\frac{w-1}{w+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 \quad \text{или} \quad z=w+\sqrt{w^2-1} \tag{7.9-8b}$$

или

$$u=\frac{1}{2}\left(|z|+\frac{1}{|z|}\right)\cos\varphi, \qquad v=\frac{1}{2}\left(|z|-\frac{1}{|z|}\right)\sin\varphi. \tag{7.9-8c}$$

Преобразование (8) конформно, за исключением критических точек

$$z=1$$

и

$$z=-1.$$

И внешность, и внутренность единичной окружности

$$|z|=1$$

отображаются на всю плоскость w, из которой удален прямолинейный отрезок

$$-1\leqslant u\leqslant 1,$$

соответствующий единичной окружности

$$|z|=1.$$

Некоторые важные свойства преобразования (7.9-8a) приведены в табл. 7.9-1.

7.9-4. Интеграл Шварца — Кристоффеля. *Интеграл Шварца — Кристоффеля*

$$\left.\begin{aligned} &w=A\int_{z_0}^{z}(z-x_1)^{\alpha_1-1}(z-x_2)^{\alpha_2-1}\dots(z-x_n)^{\alpha_n-1}\,dz+B,\\ &\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=n-2\end{aligned}\right\} \tag{7.9-9}$$

отображает верхнюю полуплоскость $y>0$ конформно во внутренность многоугольника в w-плоскости; контур многоугольника соответствует действительной оси, вершины $w_1, w_2, \dots, w_n$ соответствуют различным точкам $x_1, x_2, \dots, x_n$ оси Ox и внутренний угол многоугольника в вершине w_j равен $\alpha_j\pi$ ($j=1, 2, \dots, n$). Для каждого данного многоугольника в w-плоскости три из точек x_j могут быть

*) Это отображение обычно называют *отображением Жуковского*.

Таблица 7.9-1

Свойства отображения $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

(см. также табл. 7.9-2 и 7.9-3)

$z = x + iy = |z| e^{i\varphi}$; $w = u + iv = re^{i\theta}$

Точка, кривая (ые) или область в z-плоскости	Точка кривая (ые), или область в w-плоскости	Замечания
Окружности с центром в 0 $\|z\| = e^{\alpha} = \text{const} \neq 1$	Эллипсы с фокусами ± 1 $\frac{u^2}{\text{ch}^2\,\alpha} + \frac{v^2}{\text{sh}^2\,\alpha} = 1$	Если φ возрастает, то θ возрастает для $\|z\| > 1$ и убывает для $\|z\| < 1$
Прямолинейные лучи, выходящие из начала координат $\varphi = \text{const} \neq 0$	Гиперболы с фокусами ± 1 $\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1$	
Единичная полуокружность $\|z\| = 1,\ y \geqslant 0$	Прямолинейный отрезок $-1 \leqslant u \leqslant 1$	Если φ возрастает, то u убывает
Единичная полуокружность $\|z\| = 1,\ y \leqslant 0$	Прямолинейный отрезок $-1 \leqslant u \leqslant 1$	Если φ возрастает, то u возрастает
Прямолинейные отрезки действительной оси $y = 0$, соответствующие интервалам $-\infty < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $1 < x < \infty$	Прямолинейные отрезки действительной оси $v = 0$ $-\infty < u < -1$, $-1 > u > -\infty$, $\infty > u > 1$, $1 < u < \infty$	
Линии тока для течения, обтекающего единичный круг со скоростью $^1/_2$ в ∞	$v = \text{const}$	
Соответствующие линии постоянного потенциала скоростей	$u = \text{const}$	

выбраны произвольно; остальные точки x_j и параметры A и B определяются единственным образом.

Если одной из вершин многоугольника соответствует бесконечно удаленная точка, например, $x_n = \infty$, то формула (9) приводится к виду

$$w = A' \int_{z_0}^{z} (z - x_1')^{\alpha_1 - 1} (z - x_2')^{\alpha_2 - 1} \ldots (z - x_{n-1}')^{\alpha_{n-1} - 1}\, dz + B', \qquad (7.9\text{-}10)$$

A' и B' — постоянные параметры и x_1', x_2', ..., x_{n-1}' — новые точки оси Ox.

Фактическое определение точек x_j или x_j' весьма сложно, за исключением некоторых вырожденных случаев и когда один или несколько углов $\alpha_j\pi$ обращаются в нуль (см. [7.6]).

Приложения формулы Шварца — Кристоффеля к отображению параллелограммов и прямоугольников в w-плоскости приводят к эллиптическим функциям (п. 21.6.-1).

Отображения 26 — 30 в табл. 7.9-2 суть частные случаи формулы Шварца — Кристоффеля.

7.9-5. Таблица отображений. Табл. 7.9-2 иллюстрирует некоторые отображения, часто встречающиеся в различных приложениях.

Таблица 7.9-2

Примеры конформных отображений

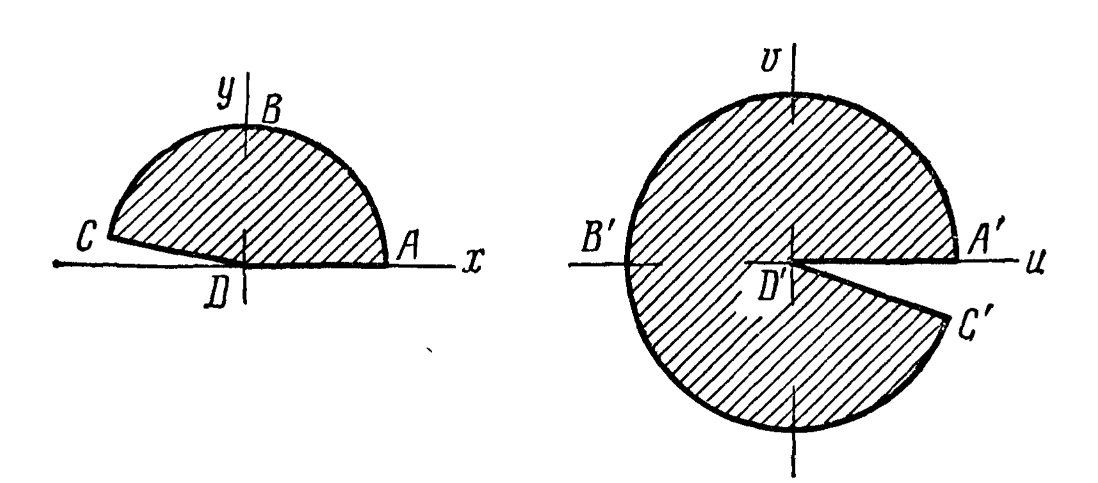


Рис. 1. $w = z^2$.

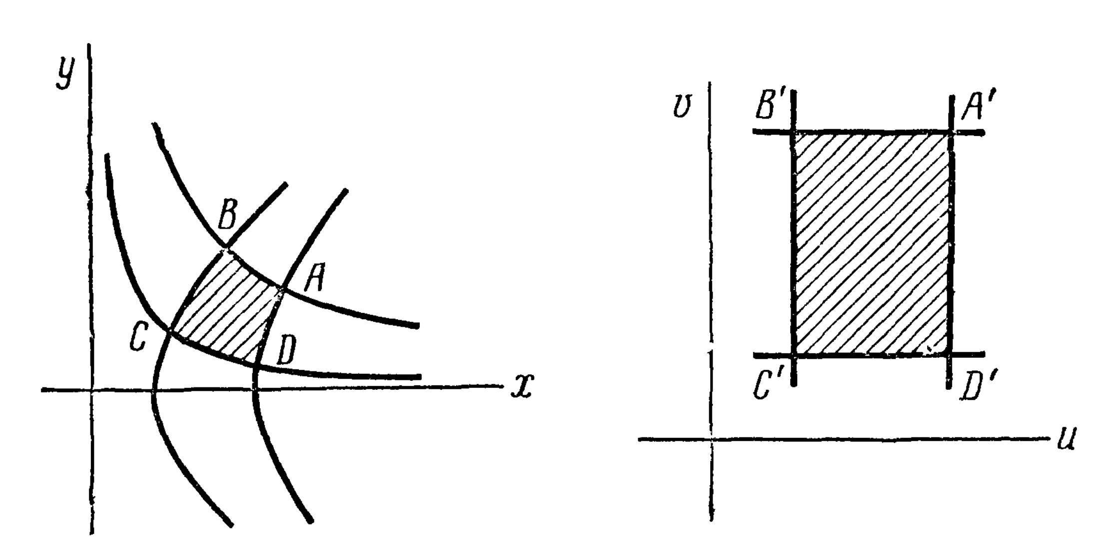


Рис. 2. $w = z^2$.

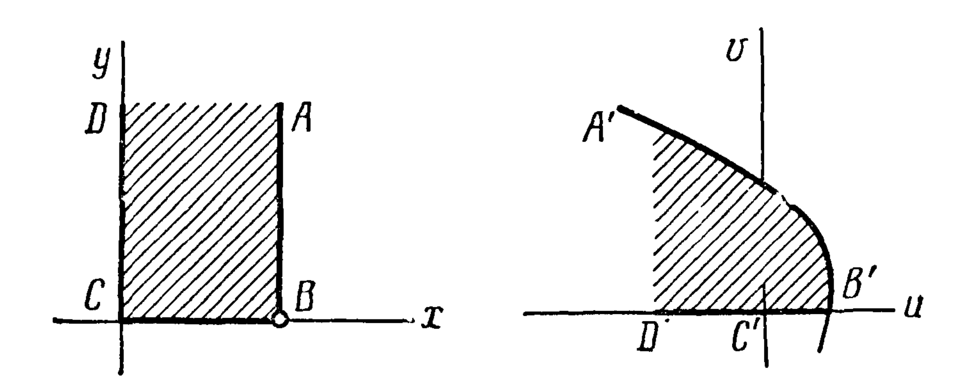


Рис. 3. $w = z^2$.

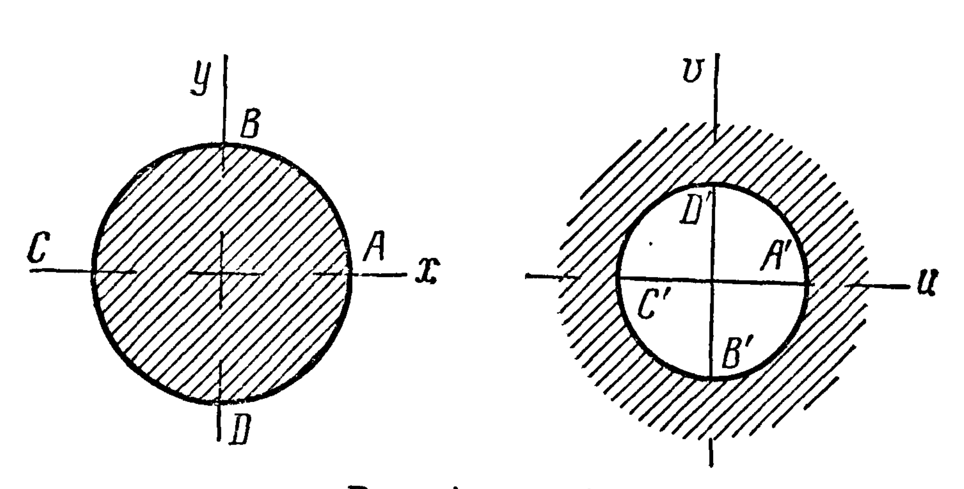


Рис. 4. $w = 1/z$

Таблица 7.9-2 (*продолжение*)

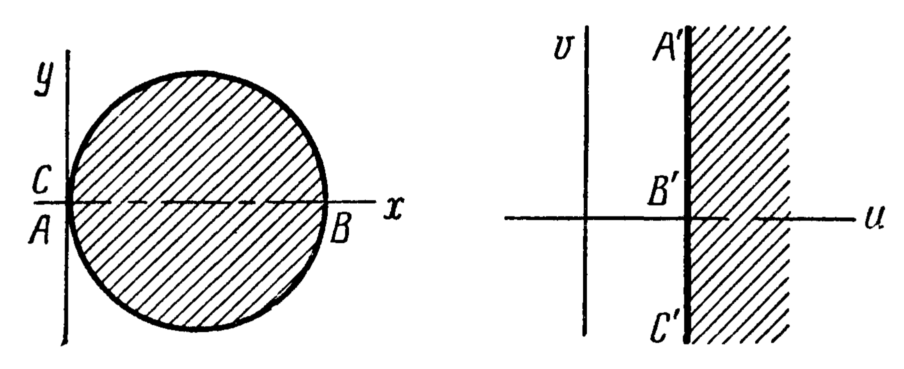


Рис. 5. $w = 1/z$.

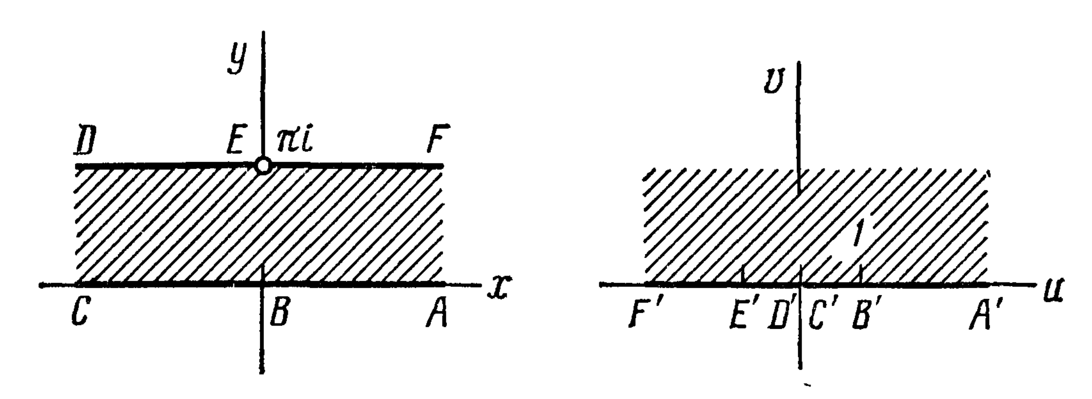


Рис. 6. $w = e^z$.

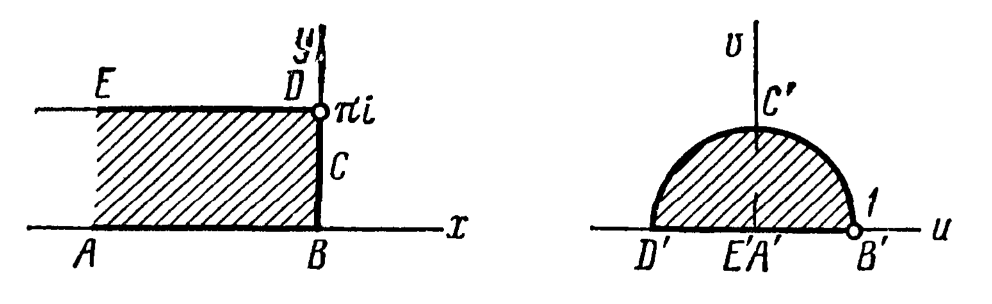


Рис. 7. $w = e^z$.

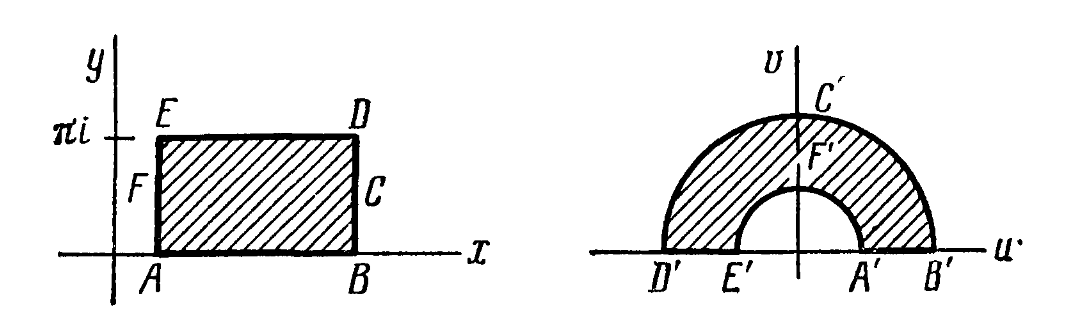


Рис. 8. $w = e^z$.

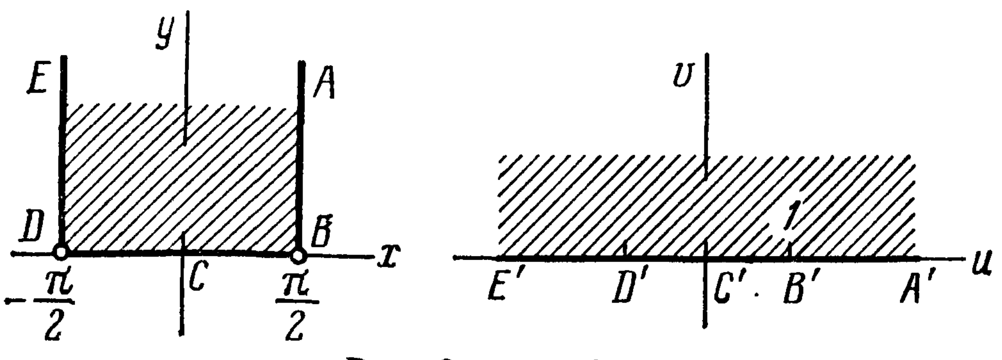


Рис. 9. $w = \sin z$.

Таблица 7.9-2 (*продолжение*)

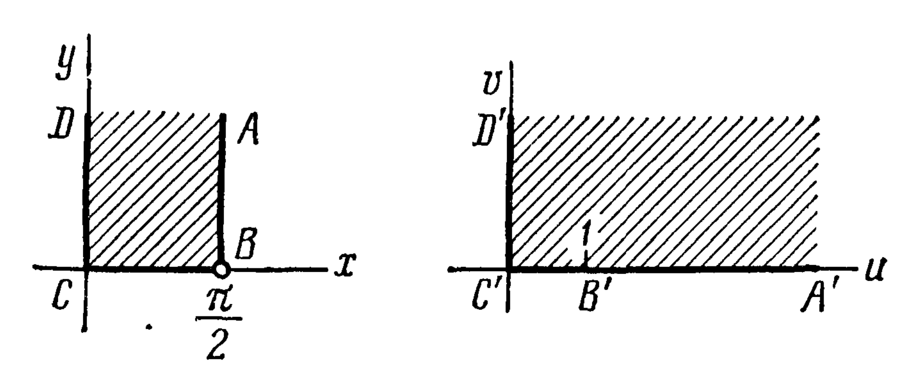


Рис. 10. $w = \sin z$.

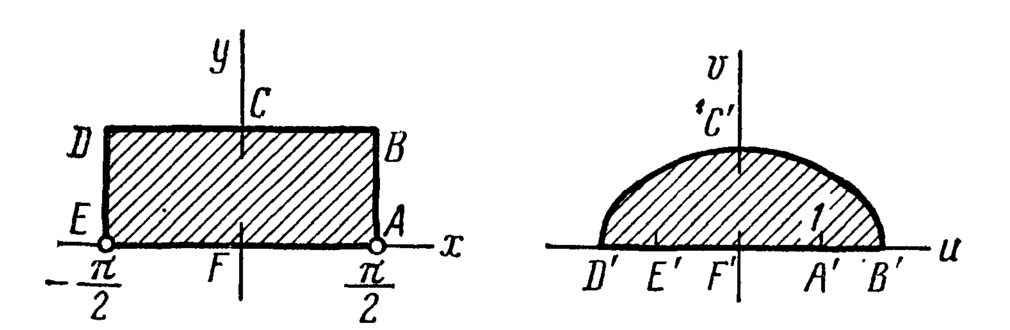


Рис. 11. $w = \sin z$; $BCD : y = k$, $B'C'D'$ есть полуэллипс

$$\left(\frac{u}{\operatorname{ch} k}\right)^2 + \left(\frac{v}{\operatorname{sh} k}\right)^2 = 1.$$

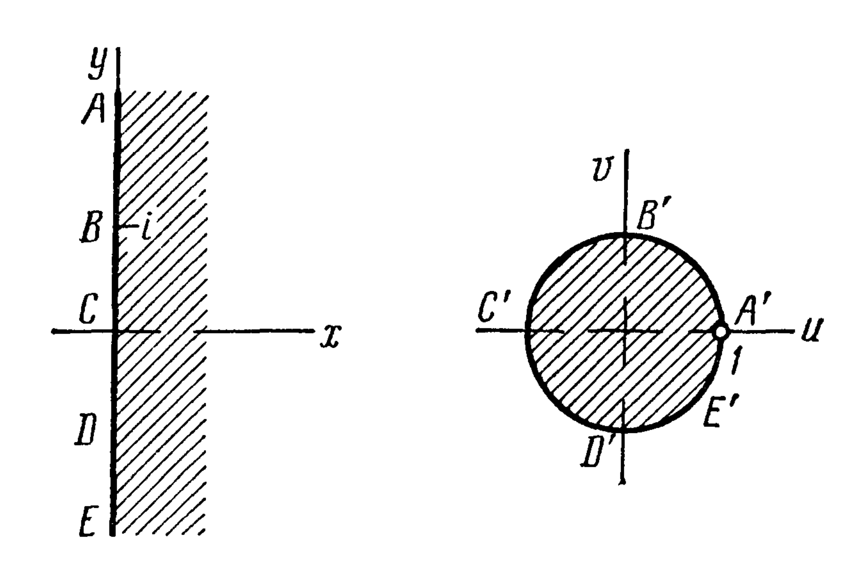


Рис. 12. $w = \dfrac{z-1}{z+1}$.

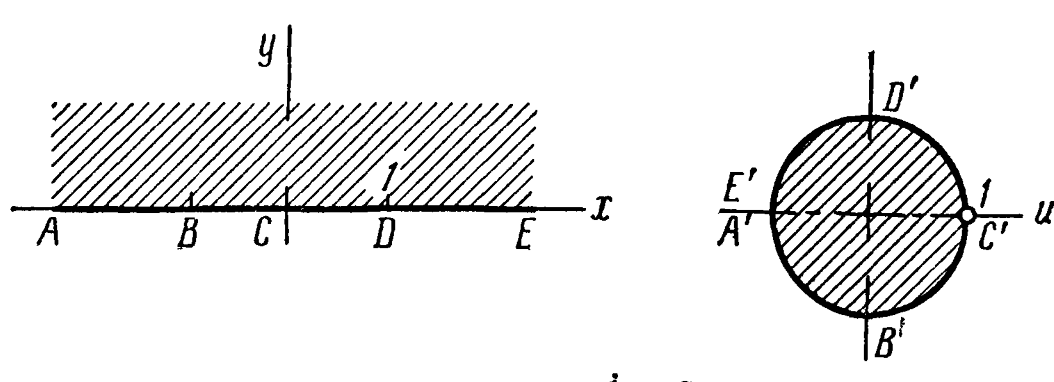


Рис. 13. $w = \dfrac{i-z}{i+z}$.

Таблица 7.9-2 (*продолжение*)

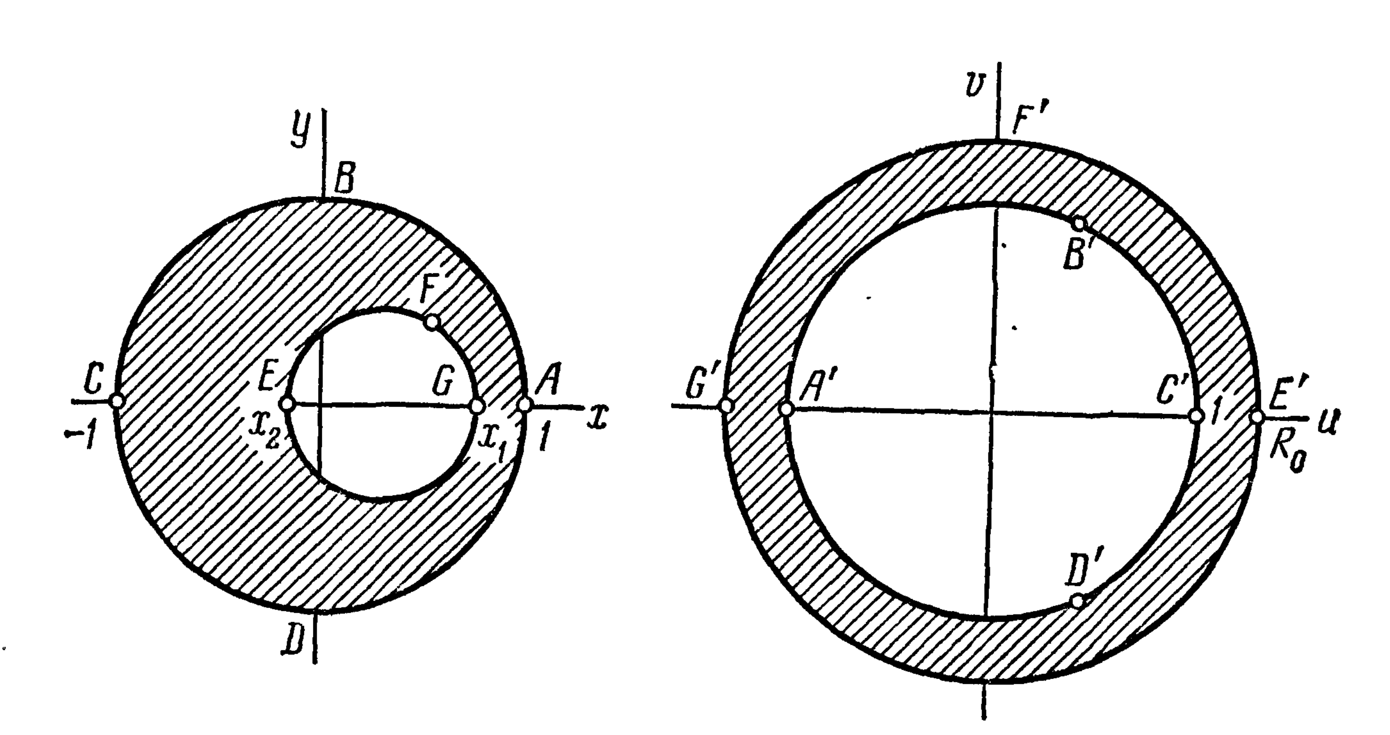


Рис. 14. $w=\frac{z-a}{az-1}$; $a=\frac{1+x_1x_2+\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1+x_2}$;

$$R_0=\frac{1-x_1x_2+\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1-x_2}$$

($a>1$ и $R_0>1$, если $-1<x_2<x_1<1$).

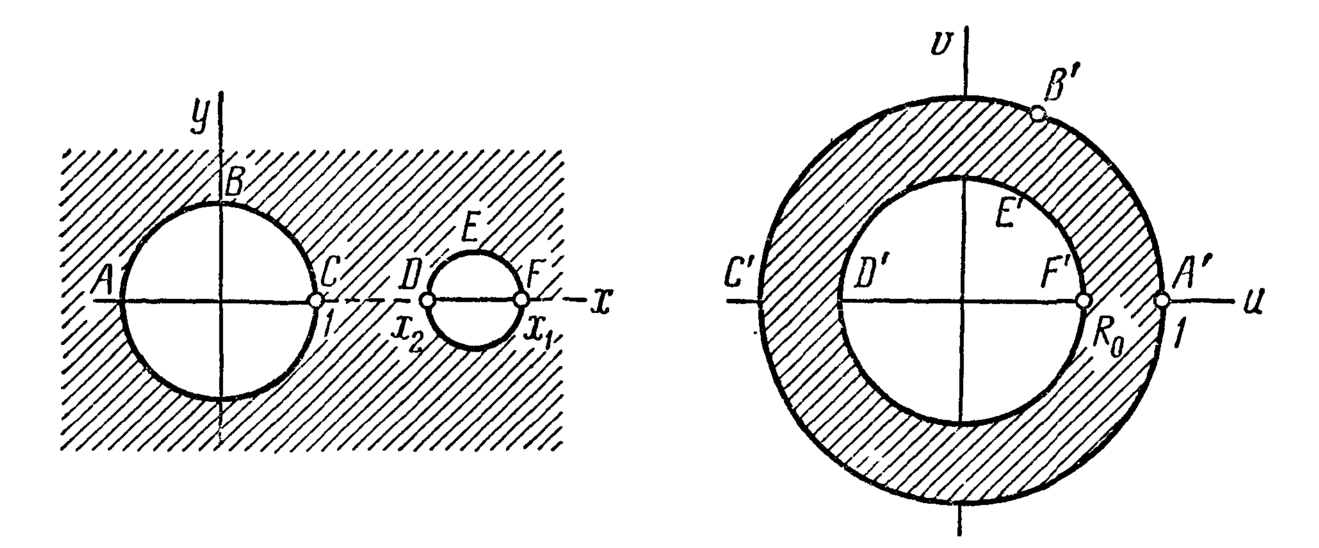


Рис. 15. $w=\frac{z-a}{az-1}$; $a=\frac{1+x_1x_2+\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}}{x_1+x_2}$;

$$R_0=\frac{x_1x_2-1-\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}}{x_1-x_2}$$

($x_2<a<x_1$ и $0<R_0<1$, если $1<x_2<x_1$).

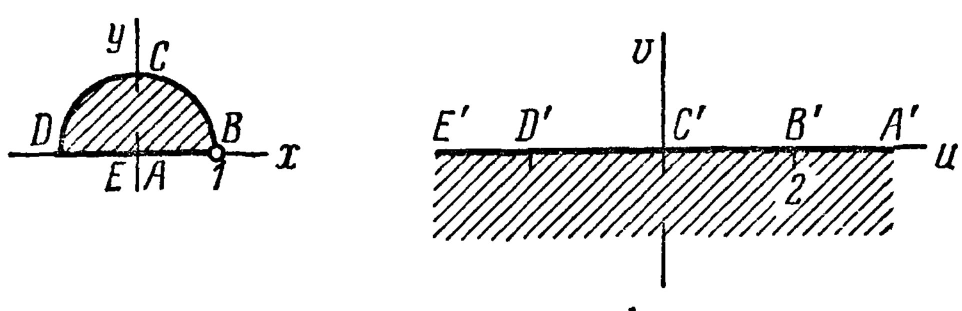


Рис. 16. $w=z+\frac{1}{z}$.

Таблица 7.9-2 (*продолжение*)

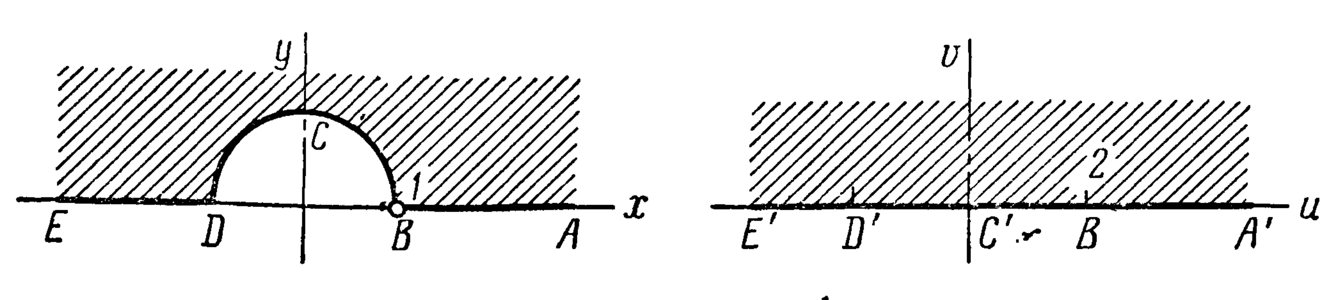
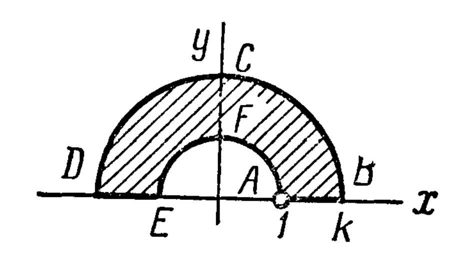


Рис. 17. $w = z + \frac{1}{z}$.



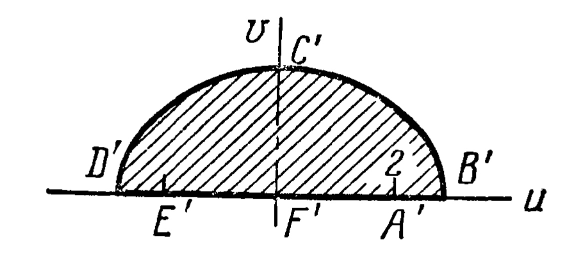
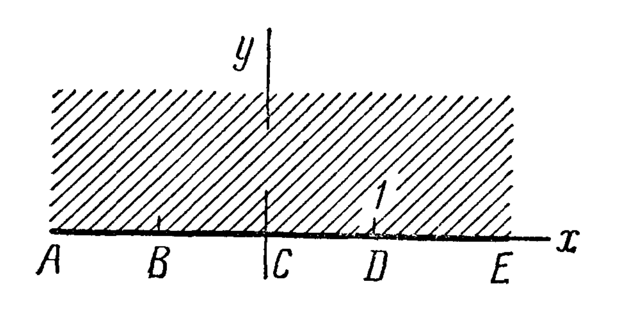


Рис. 18. $w = z + \frac{1}{z}$; $B'C'D'$ есть полуэллипс

$$\left(\frac{ku}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{kv}{k^2-1}\right)^2 = 1.$$



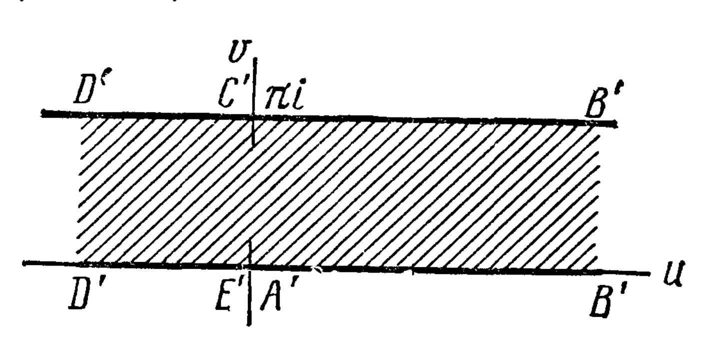
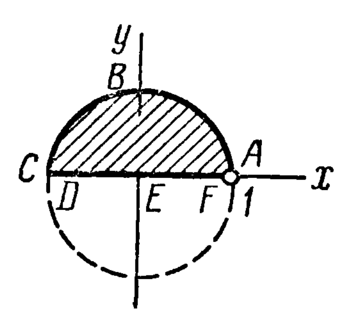


Рис. 19. $w = \ln \frac{z-1}{z+1}$; $z = -\operatorname{cth} \frac{w}{2}$.



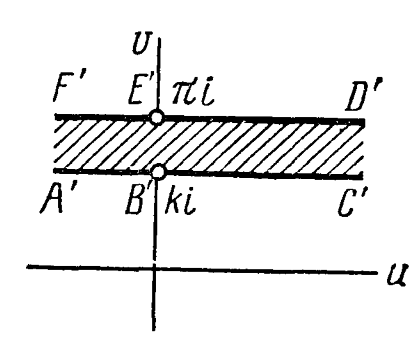
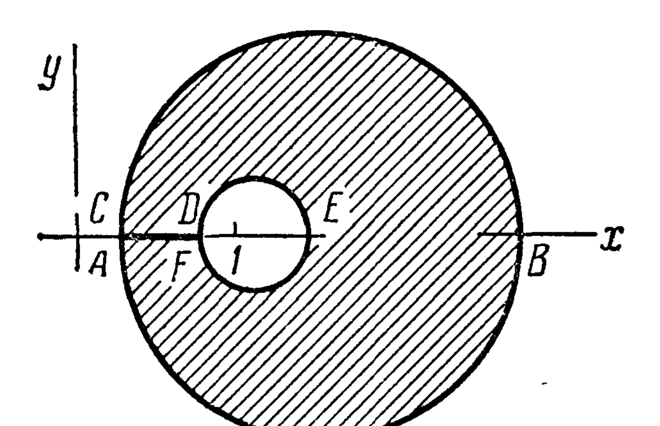


Рис. 20. $w = \ln \frac{z-1}{z+1}$; ABC есть дуга окружности $x^2 + y^2 - 2y \operatorname{ctg} k = 1$.



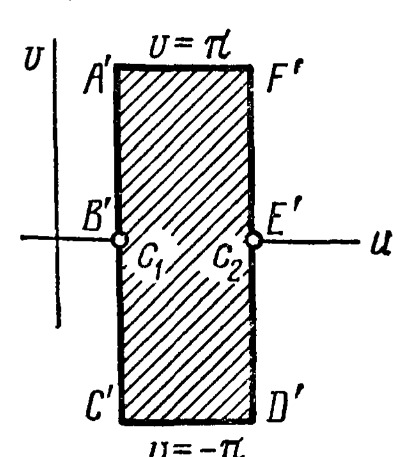


Рис. 21. $w = \ln \frac{z+1}{z-1}$; центры окружностей в точках $z = \operatorname{cth} c_n$, радиусы $\frac{1}{\operatorname{sh} c_n}$ $(n = 1,\ 2)$.

Таблица 7.9-2 (*продолжение*)

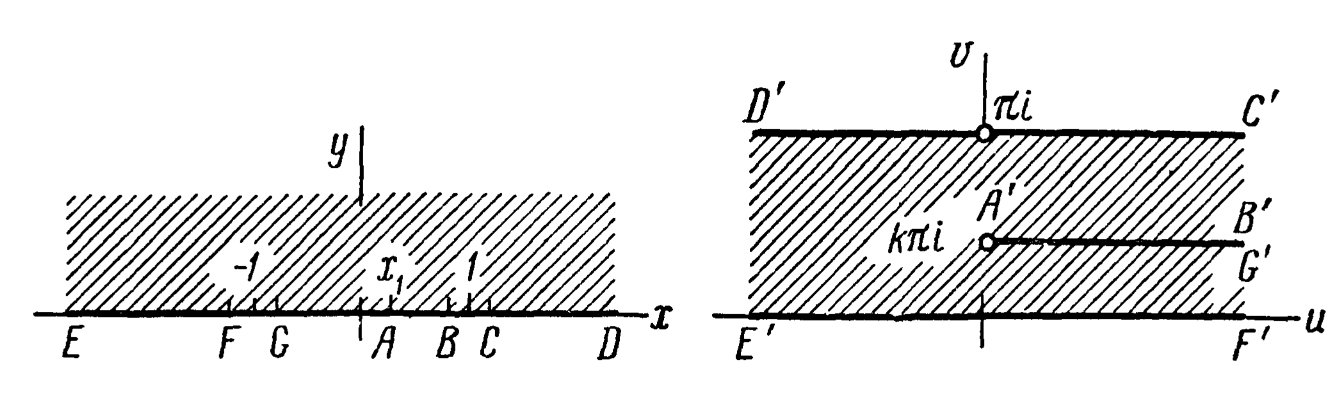


Рис. 22. $w = k \ln \frac{k}{1-k} + \ln 2\,(1-k) + \pi i - k \ln (z+1) - (1-k) \ln (z-1)$; $x_1 = 2k - 1$.

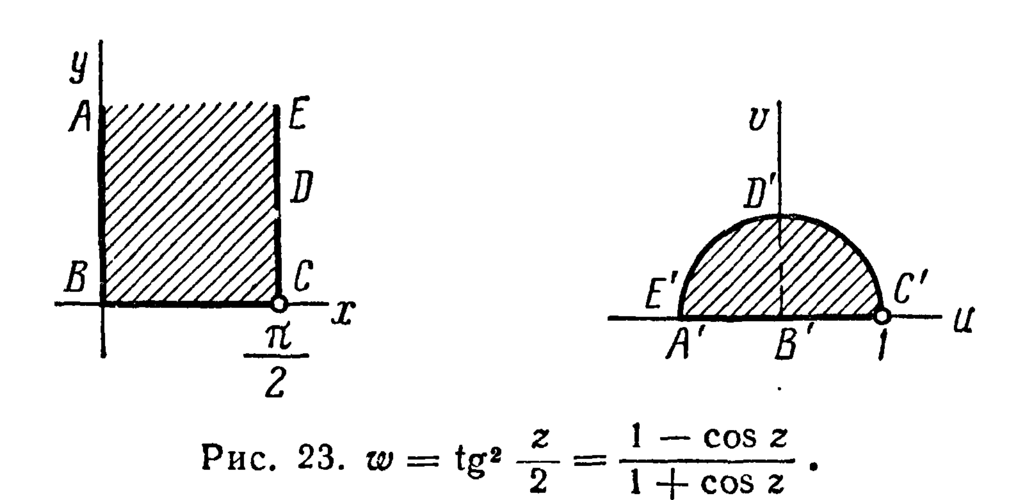


Рис. 23. $w = \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} = \frac{1 - \cos z}{1 + \cos z}$.

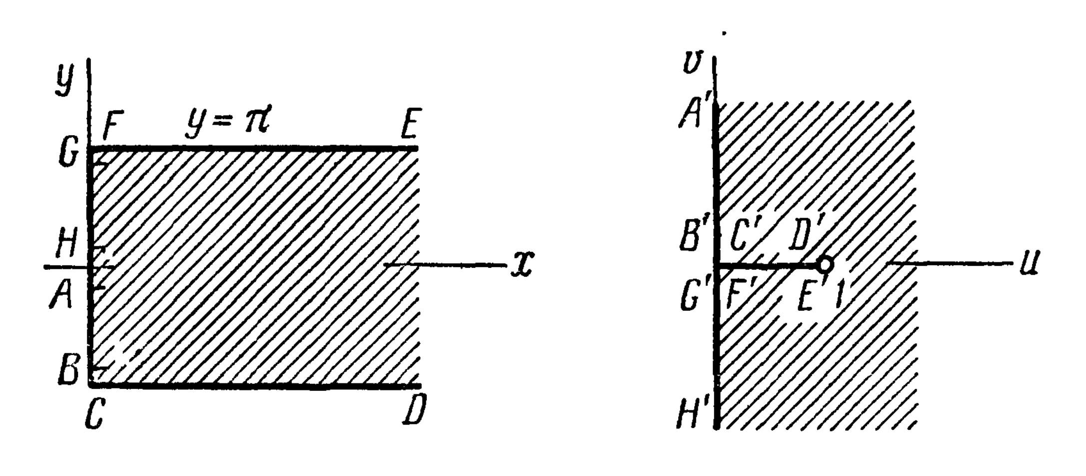


Рис. 24. $w = \operatorname{cth} \frac{z}{2} = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$.

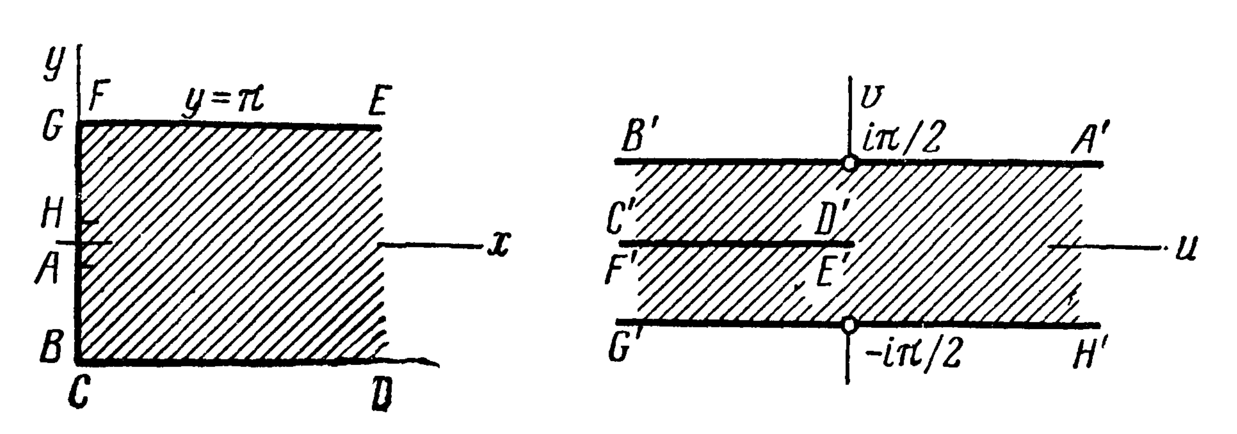


Рис. 25. $w = \ln \operatorname{cth} \frac{z}{2}$.

Таблица 7.9-2 (*продолжение*)

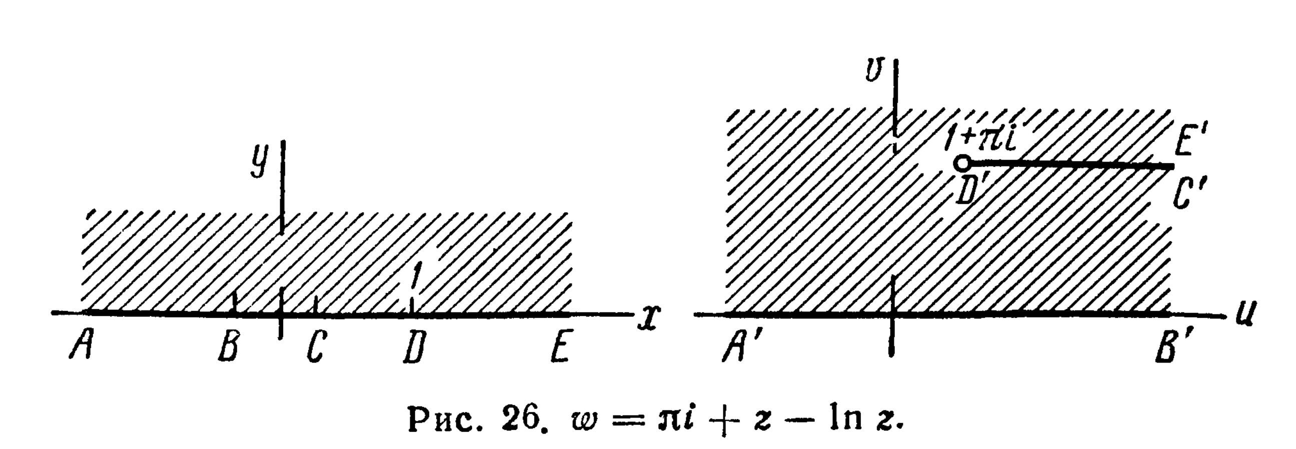


Рис. 26. $w = \pi i + z - \ln z$.

Рис. 27. $w = 2(z+1)^{1/2} + \ln \dfrac{(z+1)^{1/2} - 1}{(z+1)^{1/2} + 1}$.

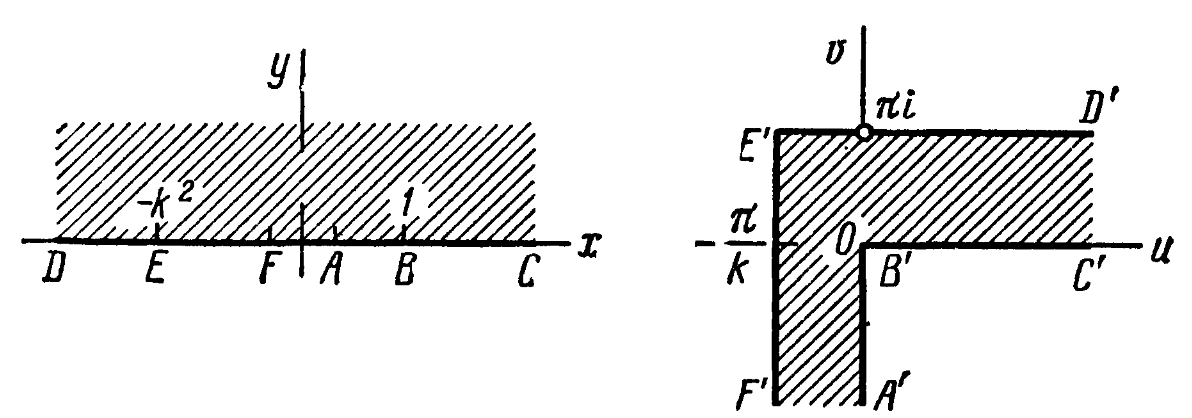


Рис. 28. $w = \dfrac{i}{k} \ln \dfrac{1+ikt}{1-ikt} + \ln \dfrac{1+t}{1-t}$; $t = \left(\dfrac{z-1}{z+k^2}\right)^{1/2}$.

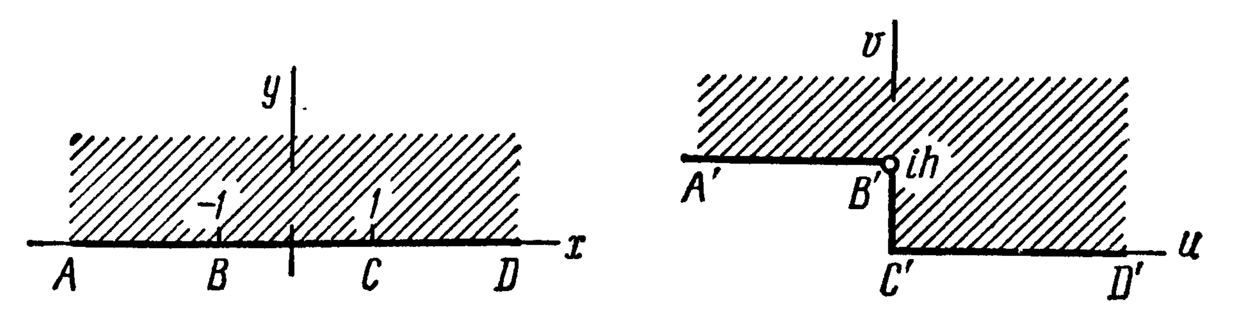


Рис. 29. $w = \dfrac{h}{\pi}\left[(z^2-1)^{1/2} + \operatorname{Arch} z\right]$.

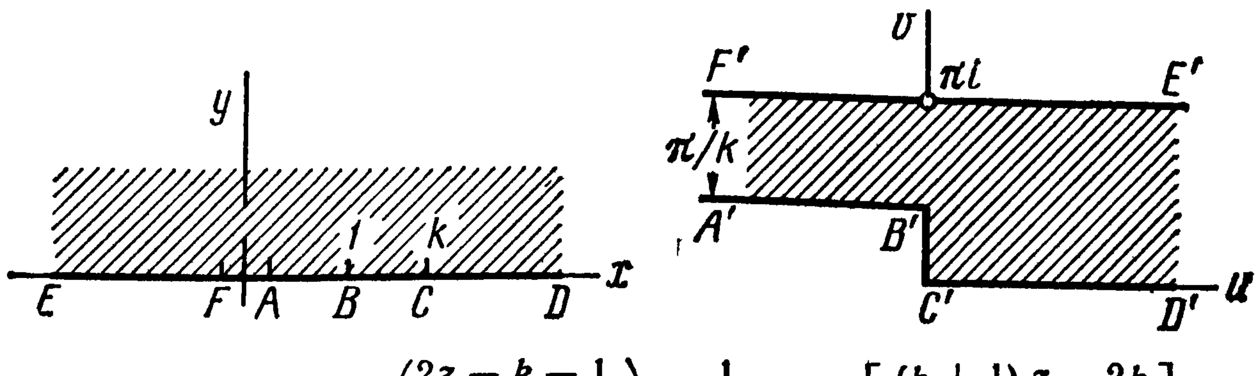


Рис. 30. $w = \operatorname{Arch}\left(\dfrac{2z-k-1}{k-1}\right) - \dfrac{1}{k} \operatorname{Arch}\left[\dfrac{(k+1)z - 2k}{(k-1)z}\right]$.

Таблица 7.9-3

Конформные отображения некоторых областей D на единичный круг ($|w| \leqslant 1$)

$$z = x + iy = |z| e^{i\varphi}, \quad w = u + iv = |w| e^{i\theta}$$

	Область D в z-плоскости	Преобразование	Замечания
1	Верхняя полуплоскость $y \geqslant 0$	$w = e^{i\lambda} \dfrac{z-a}{z-\bar{a}}$ (λ действительно)	$z = a$ преобразуется в точку $w = 0$
2	Правая полуплоскость $x \geqslant 0$	$w = e^{i\lambda} \dfrac{z-a}{z+\bar{a}}$ (λ действительно)	
3	Единичный круг $\|z\| \leqslant 1$	$w = e^{i\lambda} \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ (λ действительно)	$z = a$ преобразуется в точку $w = 0$
4	Полоса шириной π $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $-\infty < y < \infty$	$\dfrac{w-1}{w+1} = ie^{iz}$	Частный случай преобразования Шварца — Кристоффеля (7.9-9)
5	Сектор единичного круга $\|z\| \leqslant 1$ $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\alpha$	$w = \dfrac{(1+z^{1/\alpha})^2 - i(1-z^{1/\alpha})^2}{(1+z^{1/\alpha})^2 + i(1-z^{1/\alpha})^2}$	
6	z-плоскость с разрезом от $z = 0$ до $z = \infty$ вдоль положительной части действительной оси	$w = \dfrac{\sqrt{z}-i}{\sqrt{z}+i}$	
7	Внешность эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$z = \dfrac{1}{2}\left[(a-b)\,w + \dfrac{a+b}{w}\right]$	См. также п. 7.9-3
8	Внешность параболы $\|z\| \cos^2 \dfrac{\varphi}{2} = 1$	$z = \left(\dfrac{2}{w+1}\right)^2$	
9	Внутренность параболы $\|z\| \cos^2 \dfrac{\varphi}{2} = 1$	$w = \mathrm{tg}^2 \left(\dfrac{\pi}{4}\sqrt{z}\right)$	
10	Полукруг $\|z\| \leqslant R$, $x > 0$	$w = i\,\dfrac{z^2 + 2Rz - R^2}{z^2 - 2Rz - R^2}$	
11	Область, ограниченная прямыми линиями (многоугольник)	Комбинация отображения Шварца — Кристоффеля (п. 7.9-4) с отображением 1	

7.9-6. Функции, отображающие специальные области на единичный круг.

(а) Теорема Римана об отображении. *Для каждой односвязной области D в z-плоскости, кроме всей z-плоскости и z-плоскости, из которой удалена одна точка, существует конформное отображение $w = f(z)$, которое устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми точками области D и внутренними точками единичного круга $|w| < 1$. Аналитическая функция $f(z)$ определена единственным образом, если задан образ точки a области D и угол поворота любой кривой, проходящей через эту точку, т. е.*

$$f(a) = w_0 \quad \textit{и} \quad \arg f'(a) = \alpha,$$

где w_0 и α — заданные величины.

Если D ограничена регулярной кривой (п. 3.1-13) C, то функция $f(z)$ непрерывна на C и устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми точками C и точками единичной окружности $|w| = 1$.

Замечания. 1) Отображение задается определенной аналитической функцией $f(z)$; 2) за исключением отмеченных выше тривиальных случаев, каждую область D, ограниченную простым контуром, можно отобразить конформно на другую область D', также ограниченную простым контуром.

Проблема конформного отображения области D на единичный круг тесно связана с решением краевой задачи Дирихле для области D (п. 15.6-9). Часто требуемое конформное отображение может быть получено последовательным применением простых преобразований.

(b) В табл. 7.9-3 приведены некоторые конформные отображения заданных областей D на единичный круг.

ГЛАВА 8

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И ДРУГИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

8.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Преобразование Лапласа (п. 8.2-1) связывает однозначную функцию $F(s)$ комплексной переменной s (*изображение*) с соответствующей функцией $f(t)$ действительной переменной t (*оригинал*). Это соответствие, по существу, взаимно однозначное для большинства практических целей (п. 8.2-8); соответствующие пары $f(t)$ и $F(s)$ часто определяются при помощи таблиц. Преобразование Лапласа характерно тем, что многим соотношениям и операциям над оригиналами $f(t)$ соответствуют более простые соотношения и операции над их изображениями $F(s)$ (пп. 8.3-1 — 8.3-4). Оно применяется, в частности, для решения дифференциальных и интегральных уравнений; метод решения заключается в преобразовании данного уравнения, содержащего оригиналы $f(t)$, в эквивалентное уравнение относительно соответствующих изображений Лапласа $F(s)$. (Операционное исчисление, основанное на преобразовании Лапласа, пп. 9.3-7, 9.4-5 и 10.5-2.)

8.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

8.2-1. Определение. Преобразование Лапласа (одностороннее)

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt \qquad (8.2\text{-}1)$$

ставит в соответствие каждой **однозначной функции (оригиналу)** $f(t)$ (t действительно), для которой несобственный интеграл (1) сходится, единственную **функцию** $F(s)$ **(изображение) комплексной переменной** $s=\sigma+i\omega$.

Интеграл (1) называется **интегралом Лапласа**, а функция $F(s)$ — **преобразованием Лапласа (односторонним)** функции $f(t)$. Часто употребляются записи

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t),\,s] \quad \text{или} \quad F(s)\doteqdot f(t).$$

8.2-2. Абсолютная сходимость. *Если интеграл Лапласа* (1) *абсолютно сходится при* $\sigma=\sigma_0$, *т. е. существует предел*

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b |f(t)|\,e^{-\sigma_0 t}\,dt=\int_0^\infty |f(t)|\,e^{-\sigma_0 t}\,dt, \qquad (8.2\text{-}2)$$

то он сходится абсолютно и равномерно для $\sigma\geqslant\sigma_0$ *и изображение* $F(s)$ — *аналитическая функция* (п. 7.3-3) *при* $\operatorname{Re}s=\sigma\geqslant\sigma_0$. Точная нижняя грань σ_a действительных чисел σ_0, для которых это условие соблюдается, называется **абсциссой абсолютной сходимости** преобразования Лапласа $\mathscr{L}[f(t)]$; в полуплоскости $\operatorname{Re}s>\sigma_a$ изображение $F(s)$ — функция аналитическая.

Хотя некоторые теоремы, относящиеся к преобразованию Лапласа, нуждаются только в существовании преобразования (простой сходимости), существование абсциссы абсолютной сходимости будет предполагаться во всем дальнейшем изложении. Там, где необходимо специально отмечать область абсолютной сходимости, связанную с соотношением, включающим преобразование Лапласа, будем писать $\sigma>\sigma_a$ справа от исследуемого соотношения, как в формуле (3).

8.2-3. Область определения. Область определения аналитической функции

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)] \qquad (\sigma>\sigma_a) \tag{8.2-3}$$

обычно расширяется при помощи аналитического продолжения (пп. 7.8-1 и 7.8-2) до полной s-плоскости, за исключением особых точек (см. п. 7.6-2), расположенных слева от прямой $\sigma=\sigma_a$.

Такое расширение области определения всегда подразумевается.

8.2-4. Достаточные условия существования преобразования Лапласа. *Преобразование Лапласа* $\mathscr{L}[f(t)]$, *определенное формулой* (1), *существует в смысле абсолютной сходимости* (п. 8.2-2; см. также п. 4.9-3):

1) *для* $\sigma\geqslant 0$, *если* $\int\limits_0^\infty |f(t)|\,dt$ *существует*;

2) *для* $\sigma>\sigma_a$, *если интеграл* (возможно, несобственный)

$$I=\int\limits_0^{t_1}|f(t)|\,dt$$

существует для каждого конечного $t_1>0$ *и* $|f(t)|\leqslant Ke^{\sigma_a t}$ *для* $t>t_2\geqslant$ $\geqslant 0$ ($f(t)$ имеет экспоненциальный порядок или $f(t)=O\left(e^{\sigma_a t}\right)$ при $t\to\infty$, п. 4.4-3);

3) *для* $\sigma>0$ *или* $\sigma>\sigma_a$ (какая из границ больше), *если* $\mathscr{L}[f'(t)]$ *существует* (не обязательно в смысле абсолютной сходимости) *для* $\sigma>\sigma_a$.

8.2-5. Обратное преобразование Лапласа. Обратное преобразование Лапласа $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$ функции $F(s)$ комплексной переменной $s=\sigma+i\omega$ есть функция $f(t)$, для которой преобразование Лапласа (1) есть $F(s)$. Не каждая функция $F(s)$ имеет обратное преобразование Лапласа.

8.2-6. Теорема обращения. *Пусть* $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$, $\sigma>\sigma_a$; *тогда в каждом открытом интервале, где* $f(t)$ *ограничена и имеет конечное число точек максимума, минимума и точек разрыва* (или, более общо, $f(t)$ *имеет ограниченную вариацию* (п. 4.4-8, b)),

$$f_I(t)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_1-iR}^{\sigma_1+iR}F(s)\,e^{st}ds=$$
$$=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)] & \text{для } t>0,\\ \frac{1}{2}f(0+0) & \text{для } t=0,\\ 0 & \text{для } t<0\end{array}\right\}(\sigma_1>\sigma_a). \tag{8.2-4a}$$

В частности, для каждого $t>0$, *где* $f(t)$ *непрерывна*,

$$f_I(t)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_1-iR}^{\sigma_1+iR}F(s)\,e^{st}ds=f(t) \qquad (\sigma_1>\sigma_a). \tag{8.2-4b}$$

Путь интегрирования в формулах (4) лежит справа от всех особых точек $F(s)$. **Интеграл приводится к интегралу** $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}F(s)\,e^{st}ds$, **если последний существует; в противном случае** $f_I(t)$ **есть главное значение интеграла по Коши (п. 4.6-2, b).**

8.2-7. Существование обратного преобразования Лапласа. Особо следует обратить внимание на то, что существование предела (4) еще не достаточно для того чтобы $F(s)$ имело обратное преобразование Лапласа $\left(\text{Пример: } F(s) = s^2\right)$. Существование $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ должно быть проверено для каждого применения теоремы обращения. Следующие теоремы дают *достаточные (но не необходимые) условия для существования* $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

1. *Если $F(s)$ аналитична для $\sigma \geqslant \sigma_a$ и имеет порядок* < -1 (п. 4.4-3), *то $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ существует; оно непрерывно для всех t и $f(t) = O\left(e^{\sigma_a t}\right)$ при $t \to \infty$ и соответствующая абсцисса абсолютной сходимости есть σ_a.* Заметим, что *при этих условиях формула (4b) справедлива и*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 0 \quad \text{для} \quad t \leqslant 0.$$

2) *Пусть $F(s) = \varphi[F_1(s), F_2(s), \ldots, F_n(s)]$, так что $\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ аналитична относительно каждого z_k и равна нулю для $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$, и*

$$F_k(s) = \mathcal{L}[f_k(t)] \qquad (\sigma > \sigma_{a_k}; \qquad k = 1, 2, \ldots, n);$$

тогда $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ существует и соответствующее преобразование Лапласа имеет абсциссу абсолютной сходимости

8.2-8. Единственность преобразования Лапласа и его обращения. *Преобразование Лапласа* (1) *единственно для каждой функции $f(t)$, имеющей такое преобразование.* Обратно, *две функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, имеющие одинаковые преобразования Лапласа, совпадают для всех $t > 0$, за исключением, возможно, множества меры нуль* (п. 4.6-14); *$f_1(t) = f_2(t)$ для всех $t > 0$, где обе функции непрерывны* (*теорема Лерха*). $f(t)$ определяется единственным образом по преобразованию Лапласа для почти всех $t > 0$ (п. 4.6-14, b); данная функция $F(s)$ не может иметь более одного обратного преобразования Лапласа, непрерывного для всех $t > 0$.

Различные разрывные функции могут иметь одинаковое преобразование Лапласа. В частности, единичная функция (см. также п. 21.9-1) $f(t) = 0$ для $t < 0$ и $f(t) = 1$ для $t > 0$ имеет преобразование Лапласа $1/s$ независимо от значения, принимаемого $f(t)$ при $t = 0$.

8.3. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ОПЕРАЦИЯМИ НАД ОРИГИНАЛАМИ И ИЗОБРАЖЕНИЯМИ

8.3-1. Таблица соответствия операций. Табл. 8.3-1 содержит некоторые теоремы, устанавливающие соответствие между операциями над оригиналами $f(t)$ и операциями над их изображениями $F(s)$ и обратно. Эти теоремы составляют основу применения преобразования Лапласа (операционного исчисления, основанного на употреблении преобразования Лапласа).

8.3-2. Преобразования Лапласа периодических функций и произведений оригиналов на синус или косинус.

(a) *Если $f(t)$* — **периодическая функция с периодом** T (п. 4.2-2, b) *и $\int_0^T |f(t)|\,dt$ существует, то*

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad (\sigma > 0). \tag{8.3-1}$$

Замечание. Интеграл в правой части равенства есть целая функция (п. 7.6-5), так что $\mathcal{L}[f(t)]$ не имеет особенностей для конечных s, за исключением простых полюсов на мнимой оси.

Таблица 8.3-1

Теоремы соответствия операций над оригиналами и изображениями

Следующие теоремы все справедливы, если преобразование Лапласа существует в смысле абсолютной сходимости (см. также пп. 8.3-2 и 20.4-5)

Номер теоремы	Операция	Оригинал	Изображение
1	**Линейность** (α, β — постоянные)	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	$\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$
2a	**Дифференцирование оригинала** [1]), если $f'(t)$ существует при всех $t > 0$	$f'(t)$	$sF(s) - f(0+0)$
2b	если $f^{(r)}(t)$ существует при всех $t > 0$	$f^{(r)}(t)$ $(r = 1, 2, \ldots)$	$s^r F(s) - s^{r-1} f(0+0) -$ $- s^{r-2} f'(0+0) - \ldots - f^{(r-1)}(0+0)$
2c	если $f(t)$ ограничена при $t > 0$ и $f'(t)$ существует при $t > 0$, исключая точки $t = t_1, t_2, \ldots$, где $f(t)$ имеет односторонние пределы	$f'(t)$	$sF(s) - f(0+0) - \sum e^{-t_i s} \times$ $\times [f(t_i + 0) - f(t_i - 0)]$
3	**Интегрирование оригинала**	$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
4	**Изменение масштаба**	$f(at)$ $(a > 0)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
5	**Сдвиг аргумента у оригинала, если** $f(t) = 0$ **для** $t \leqslant 0$	$f(t - b)$ $(b > 0)$	$e^{-bs} F(s)$

[1]) Абсцисса абсолютной сходимости для $\mathscr{L}[f^{(r)}(t)]$ равна 0 или σ_a в зависимости от того, что больше.

Таблица 8.3-1 (*продолжение*)

Номер теоремы	Операция	Оригинал	Изображение
6	**Свертка оригиналов** [1]	$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau = f_2 * f_1$	$F_1(s) F_2(s)$
7	**Соответствие пределов оригиналов и изображений (теорема непрерывности;** α не зависит от t и s)	$\lim\limits_{\alpha \to a} f(t, \alpha)$	$\lim\limits_{\alpha \to a} F(s, \alpha)$
8	**Дифференцирование и интегрирование по параметру** α, **не зависящему от** t **и** s	a) $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(t, \alpha)$, b) $\int_{a_1}^{a_2} f(t, \alpha)\,d\alpha$	a) $\frac{\partial}{\partial \alpha} F(s, \alpha)$, b) $\int_{a_1}^{a_2} F(s, \alpha)\,d\alpha$
9a 9b	**Дифференцирование изображения**	$-t f(t)$ $(-1)^r t^r f(t)$	$F'(s)$ $F^{(r)}(s)$
10	**Интегрирование изображения**, если $\int_s^\infty F(s)\,ds$ сходится (путь интегрирования расположен справа от абсциссы абсолютной сходимости)	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(s)\,ds$
11	**Сдвиг аргумента у изображения**	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$

[1] Существование $f_1 * f_2$ предполагается; абсолютная сходимость $\mathcal{L}[f_1(t)]$ и $\mathcal{L}[f_2(t)]$ есть достаточное условие для абсолютной сходимости $\mathcal{L}[f_1 * f_2]$. См. также п. 8.3-3.

(b) *Если* $f(t)$ — **антипериодическая функция** (п. 4.2-2, b) **с периодом** T, т. е. $f(t+T/2)=-f(t)$*) *и* $\int_0^{T/2}|f(t)|\,dt$ *существует, то*

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1+e^{-sT/2}}\int_0^{T/2} f(t)\,e^{-st}\,dt \qquad (\sigma>0). \tag{8.3-2}$$

(c) *Если* $f(t)$ — **антипериодическая функция**, *положительная для* $0<t<T/2$, *и функция* $\varphi_1(t)$ *получена в результате ее детектирования, т. е.*

$$\varphi_1(t)=\begin{cases} f(t) & \text{при } f(t)>0,\\ 0 & \text{при } f(t)\leqslant 0,\end{cases}$$

то

$$\mathscr{L}[\varphi_1(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT/2}}\mathscr{L}[f(t)] \qquad (\sigma>0). \tag{8.3-3}$$

(d) *Если* $f(t)$ — **антипериодическая функция**, *положительная для* $0<t<T/2$, *и функция* $\varphi_2(t)$ *получена в результате ее выпрямления, т. е.*

$$\varphi_2(t)=\begin{cases} f(t) & \text{при } f(t)>0,\\ -f(t) & \text{при } f(t)\leqslant 0,\end{cases}$$

то

$$\mathscr{L}[\varphi_2(t)]=\operatorname{cth}\frac{sT}{4}\,\mathscr{L}[f(t)] \qquad (\sigma>0). \tag{8.3-4}$$

(e) Преобразование произведений оригиналов на синус или косинус. *Если* $F(s)$ — *преобразование Лапласа для* $f(t)$, *то*

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}[f(t)\sin\omega t]&=\frac{1}{2i}[F(s-i\omega)-F(s+i\omega)],\\ \mathscr{L}[f(t)\cos\omega t]&=\frac{1}{2}[F(s-i\omega)+F(s+i\omega)]. \end{aligned}\right\} \tag{8.3-5}$$

8.3-3*. Преобразование произведения (теорема о свертке). Пусть

$$F_1(s)=\mathscr{L}[f_1(t)] \quad (\sigma>\sigma_1), \qquad F_2(s)=\mathscr{L}[f_2(t)] \quad (\sigma>\sigma_2).$$

Тогда

$$\mathscr{L}[f_1(t)f_2(t)]=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} F_1(z)F_2(s-z)\,dz & (\lambda>\sigma_1), \quad (8.3\text{-}6)\\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} F_2(z)F_1(s-z)\,dz & (\lambda>\sigma_2). \quad (8.3\text{-}7)\end{cases}$$

В обеих формулах следует считать, что $\operatorname{Re}s>\sigma_1+\sigma_2$; это значит, что изображение произведения $f_1(t)f_2(t)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\sigma=\operatorname{Re}s>\sigma_1+\sigma_2$.

8.3-4. Предельные теоремы. *Если* $F(s)$ — *преобразование Лапласа для* $f(t)$ *и* $\mathscr{L}[f'(t)]$ *существует, то*

$$\lim_{s\to\infty} sF(s)=f(0+0). \tag{8.3-8}$$

Если, кроме того, существует предел $f(t)$ *при* $t\to\infty$, *то*

$$\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{t\to\infty} f(t). \tag{8.3-9}$$

---

*) Такую функцию называют еще «функцией с зеркально сдвинутыми полуволнами».

8.4. ТАБЛИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА И ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА

8.4-1. Таблицы преобразования Лапласа. Таблицы преобразования Лапласа имеются во многих справочниках, например, [8.2] [8.7]. В табл. 8.4-1 и 8.4-2 приведены наиболее часто встречающиеся преобразования.

8.4-2. Вычисление обратных преобразований Лапласа. В пп. 8.4-3—8.4-9 описываются различные приемы отыскания оригинала $f(t)$, соответствующего заданному изображению $F(s)$ (см. также пп. 9.3-7, 9.4-5 и 10.5-2).

Замечание. Если существование $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$ заранее неизвестно, то результаты, полученные применением теоремы обращения (8.2-4), должны быть проверены с помощью формулы (8.2-1).

Особая осторожность рекомендуется при применении разложения в ряды для получения $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$; по-видимому, непосредственное асимптотическое или даже сходящееся разложения могут не привести к правильному результату, если $F(s)$ и $f(t)$ не удовлетворяют специальным ограничительным условиям.

Некоторые достаточные (но не необходимые) условия для справедливости разложения в ряд $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$ приведены в пп. 8.4-6—8.4-9. Во многих случаях, где функция $f(t)$ подозревается как $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$, это может быть проверено подстановкой в исходное дифференциальное уравнение; поэтому эвристический метод отыскания $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$ может оказаться весьма полезным.

8.4-3. Применение контурного интегрирования. Значение контурного интеграла (8.2-4) часто удается получить при помощи теоремы о вычетах (пп. 7.7-1—7.7-3) и леммы Жордана (п. 7.7-3, b).

Если $F(s)$ — многозначная функция, то контуры не должны, конечно, пересекать разрезы для $F(s)$ (п. 7.4-2).

8.4-4. Обратное преобразование Лапласа для рациональных алгебраических функций: разложение Хевисайда.

(a) *Если $F(s)$ — рациональная алгебраическая функция, выраженная отношением двух многочленов*

$$F(s)=\frac{D_1(s)}{D(s)} \tag{8.4-1}$$

причем степень многочлена $D(s)$ выше степени многочлена $D_1(s)$, то $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$ равно сумме вычетов (п. 7.7-1) *функции $F(s)e^{st}$ по всем особым точкам (полюсам) $F(s)$.* Для вычисления обратного преобразования Лапласа $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$ сначала находим корни s_k уравнения $D(s)=0$ (которые определяют полюсы $F(s)$) методами, описанными в пп. 1.8-1—1.8-6 или 20.2-2—20.2-3; тогда:

1. Если $D(s)=a_0(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)$ (все корни уравнения $D(s)=0$ простые), то

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{D_1(s)}{D(s)}\right]=\sum_{k=1}^{n}\frac{D_1(s_k)}{D'(s_k)}e^{s_k t} \qquad (t>0). \tag{8.4-2a}$$

2. Если $D(s)=a_0(s-s_1)^{m_1}(s-s_2)^{m_2}\dots(s-s_n)^{m_n}$, то

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{D_1(s)}{D(s)}\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(m_k-1)!}\left[\frac{(s-s_k)^{m_k}D_1(s)\,e^{st}}{D(s)}\right]_{s=s_k}^{(m_k-1)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k}H_{kj}t^{m_k-j}e^{s_k t} \qquad (t>0), \tag{8.4-2b}$$

где

$$H_{kj}=\frac{1}{(j-1)!\,(m_k-j)!}\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left[\frac{(s-s_k)^{m_k}D_1(s)}{D(s)}\right]_{s=s_k}.$$

Таблица 8.4-1

Таблица преобразований Лапласа

(a, b и c — различные постоянные)

	$F(s)$	$f(t)$ $(t > 0)$
1	$1/s$	1
2	$1/s^2$	t
3	$1/s^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$1/\sqrt{s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$s^{-3/2}$	$2\sqrt{t/\pi}$
6	$s^{-(n+1/2)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{2^n t^{n-1/2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)\sqrt{\pi}}$
7	$\dfrac{\Gamma(k)}{s^k}$ $(k > 0)$	t^{k-1}
8	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
9	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
10	$\dfrac{1}{(s-a)^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
11	$\dfrac{\Gamma(k)}{(s-a)^k}$ $(k > 0)$	$t^{k-1} e^{at}$
12	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\dfrac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$
13	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\dfrac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})$
14	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$-\dfrac{(b-c)e^{at} + (c-a)e^{bt} + (a-b)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
15	$\dfrac{1}{s^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\sin at$
16	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
17	$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{sh} at$
18	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\operatorname{ch} at$
19	$\dfrac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}(1 - \cos at)$
20	$\dfrac{1}{s^2(s^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^3}(at - \sin at)$
21	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$

Таблица 8.4-1 (*продолжение*)

	$F(s)$	$f(t)\ (t>0)$
22	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin at$
23	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin at + at\cos at)$
24	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
25	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\quad (a^2\neq b^2)$	$\frac{\cos at-\cos bt}{b^2-a^2}$
26	$\frac{1}{(s-a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}e^{at}\sin bt$
27	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at}\cos bt$
28	$\frac{3a^2}{s^3+a^3}$	$e^{-at}-e^{at/2}\left(\cos\frac{at\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{at\sqrt{3}}{2}\right)$
29	$\frac{4a^3}{s^4+4a^4}$	$\sin at\,\operatorname{ch} at-\cos at\,\operatorname{sh} at$
30	$\frac{s}{s^4+4a^4}$	$\frac{1}{2a^2}\sin at\,\operatorname{sh} at$
31	$\frac{1}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^3}(\operatorname{sh} at-\sin at)$
32	$\frac{s}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^2}(\operatorname{ch} at-\cos at)$
33	$\frac{8a^3s^2}{(s^2+a^2)^3}$	$(1+a^2t^2)\sin at-at\cos at$
34	$\frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^n$	$\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t})=\frac{1}{n!}L_n(t)$
35	$\frac{s}{(s-a)^{3/2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
36	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$
37	$\frac{1}{\sqrt{s}+a}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-ae^{a^2t}\operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$
38	$\frac{\sqrt{s}}{s-a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}+ae^{a^2t}\operatorname{erf}(a\sqrt{t})$
39	$\frac{\sqrt{s}}{s+a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-\frac{2a}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2t}\int_0^{a\sqrt{t}}e^{\lambda^2}d\lambda$
40	$\frac{1}{\sqrt{s}(s-a^2)}$	$\frac{1}{a}e^{a^2t}\operatorname{erf}(a\sqrt{t})$
41	$\frac{1}{\sqrt{s}(s+a^2)}$	$\frac{2}{a\sqrt{\pi}}e^{-a^2t}\int_0^{a\sqrt{t}}e^{\lambda^2}d\lambda$

Таблица 8.4-1 (*продолжение*)

	$F(s)$	$f(t)\ (t>0)$
42	$\frac{b^2-a^2}{(s-a^2)(b+\sqrt{s})}$	$e^{a^2t}[b-a\operatorname{erf}(a\sqrt{t})]-be^{b^2t}\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})$
43	$\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+a)}$	$e^{a^2t}\operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$
44	$\frac{1}{(s+a)\sqrt{s+b}}$	$\frac{1}{\sqrt{b-a}}e^{-at}\operatorname{erf}(\sqrt{b-a}\sqrt{t})$
45	$\frac{b^2-a^2}{\sqrt{s}(s-a^2)(\sqrt{s}+b)}$	$e^{a^2t}\left[\frac{b}{a}\operatorname{erf}(a\sqrt{t})-1\right]+e^{b^2t}\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})$
46	$\frac{(1-s)^n}{s^{n+1/2}}$	$\frac{n!}{(2n)!\sqrt{\pi t}}H_{2n}(\sqrt{t})$
47	$\frac{(1-s)^n}{s^{n+3/2}}$	$-\frac{n!}{\sqrt{\pi}(2n+1)!}H_{2n+1}(\sqrt{t})$
48	$\frac{\sqrt{s+2a}}{\sqrt{s}}-1$	$ae^{-at}[I_1(at)+I_0(at)]$
49	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{-1/2(a+b)t}I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
50	$\frac{\Gamma(k)}{(s+a)^k(s+b)^k}\quad(k>0)$	$\sqrt{\pi}\left(\frac{t}{a-b}\right)^{k-1/2}e^{-1/2(a+b)t}\times$ $\times I_{k-1/2}\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
51	$\frac{1}{(s+a)^{1/2}(s+b)^{3/2}}$	$te^{-1/2(a+b)t}\left[I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)+I_1\left(\frac{a-b}{2}t\right)\right]$
52	$\frac{\sqrt{s+2a}-\sqrt{s}}{\sqrt{s+2a}+\sqrt{s}}$	$\frac{1}{t}e^{-at}I_1(at)$
53	$\frac{(a-b)^k}{(\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b})^{2k}}\quad(k>0)$	$\frac{k}{t}e^{-1/2(a+b)t}I_k\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
54	$\frac{(\sqrt{s+a}+\sqrt{s})^{-2\nu}}{\sqrt{s}\sqrt{s+a}}\quad(\nu>-1)$	$\frac{1}{a^\nu}e^{-1/2at}I_\nu\left(\frac{1}{2}at\right)$
55	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
56	$\frac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^\nu}{\sqrt{s^2+a^2}}\quad(\nu>-1)$	$a^\nu J_\nu(at)$
57	$\frac{1}{(s^2+a^2)^k}\quad(k>0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-1/2}J_{k-1/2}(at)$
58	$(\sqrt{s^2+a^2}-s)^k\quad(k>0)$	$\frac{ka^k}{t}J_k(at)$
59	$\frac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^\nu}{\sqrt{s^2-a^2}}\quad(\nu>-1)$	$a^\nu I_\nu(at)$

Таблица 8.4-1 (*продолжение*)

	$F(s)$	$f(t)\ (t>0)$
60	$\frac{1}{(s^2-a^2)^k}\quad (k>0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-1/2} I_{k-1/2}(at)$
61	$\frac{e^{-ks}}{s}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0<t<k, \\ 1, & \text{если } t>k \end{cases}$
62	$\frac{e^{-ks}}{s^2}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0<t<k, \\ t-k, & \text{если } t>k \end{cases}$
63	$\frac{e^{-ks}}{s^{\mu}}\quad (\mu>0)$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0<t<k, \\ \frac{(t-k)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}, & \text{если } t>k \end{cases}$
64	$\frac{1-e^{-ks}}{s}$	$\begin{cases} 1, & \text{если } 0<t<k, \\ 0, & \text{если } t>k \end{cases}$
65	$\frac{1}{s(1-e^{-ks})}=\frac{1+\operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}ks\right)}{2s}$	$1+[t/k]=n$, если $(n-1)k<t<nk$ $(n=1, 2, \ldots)$ (рис. 8.4-1, *a*)
66	$\frac{1}{s(e^{ks}-a)}$	$\begin{cases} 0, \text{ если } 0<t<k, \\ 1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}, \\ \text{если } nk<t<(n+1)k\ (n=1, 2, \ldots) \end{cases}$
67	$\frac{1}{s}\operatorname{th} ks$	$M(2k, t)=(-1)^{n-1}$, если $2k(n-1)<t<2kn$ $(n=1, 2, \ldots)$ (рис. 8.4-1, *b*)
68	$\frac{1}{s(1+e^{-ks})}$	$\frac{1}{2}M(k, t)+\frac{1}{2}=\frac{1-(-1)^n}{2}$, если $(n-1)k<t<nk$
69	$\frac{1}{s^2}\operatorname{th} ks$	$H(2k, t)$ (рис. 8.4-1, *c*)
70	$\frac{1}{s\operatorname{sh} ks}$	$F(t)=2(n-1)$, если $(2n-3)k<t<(2n-1)k\ (t>0)$
71	$\frac{1}{s\operatorname{ch} ks}$	$M(2k, t+3k)+1=1+(-1)^n$, если $(2n-3)k<t<(2n-1)k\ (t>0)$
72	$\frac{1}{s}\operatorname{cth} ks$	$F(t)=2n-1$, если $2k(n-1)<t<2kn$
73	$\frac{k}{s^2+k^2}\operatorname{cth}\frac{\pi s}{2k}$	$\lvert\sin kt\rvert$
74	$\frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$	$\begin{cases} \sin t, & \text{если } (2n-2)\pi<t<(2n-1)\pi, \\ 0, & \text{если } (2n-1)\pi<t<2n\pi \end{cases}$
75	$\frac{1}{s}e^{-(k/s)}$	$J_0(2\sqrt{kt})$
76	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-(k/s)}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{kt}$
77	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{k/s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{ch} 2\sqrt{kt}$

Таблица 8.4-1 (*продолжение*)

	$F(s)$	$f(t)\ (t>0)$
78	$\frac{1}{s^{3/2}} e^{-(k/s)}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \sin 2\sqrt{kt}$
79	$\frac{1}{s^{3/2}} e^{k/s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \operatorname{sh} 2\sqrt{kt}$
80	$\frac{1}{s^{\mu}} e^{-(k/s)} \quad (\mu>0)$	$\left(\frac{t}{k}\right)^{(\mu-1)/2} J_{\mu-1}(2\sqrt{kt})$
81	$\frac{1}{s^{\mu}} e^{k/s} \quad (\mu>0)$	$\left(\frac{t}{k}\right)^{(\mu-1)/2} I_{\mu-1}(2\sqrt{kt})$
82	$e^{-k\sqrt{s}} \quad (k>0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)$
83	$\frac{1}{s} e^{-k\sqrt{s}} \quad (k\geqslant 0)$	$\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
84	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-k\sqrt{s}} \quad (k\geqslant 0)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)$
85	$s^{-3/2} e^{-k\sqrt{s}} \quad (k\geqslant 0)$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right) - k \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
86	$\frac{ae^{-k\sqrt{s}}}{s(a+\sqrt{s})} \quad (k\geqslant 0)$	$-e^{ak} e^{a^2t} \operatorname{erfc}\left(a\sqrt{t}+\frac{k}{2\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
87	$\frac{e^{-k\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(a+\sqrt{s})} \quad (k\geqslant 0)$	$e^{ak} e^{a^2t} \operatorname{erfc}\left(a\sqrt{t}+\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
88	$\frac{e^{-k\sqrt{s(s+a)}}}{\sqrt{s(s+a)}}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0<t<k, \\ e^{-1/2\, at} I_0\left(\frac{1}{2} a\sqrt{t^2-k^2}\right), & \text{если } t>k \end{cases}$
89	$\frac{e^{-k\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0<t<k, \\ J_0(a\sqrt{t^2-k^2}), & \text{если } t>k \end{cases}$
90	$\frac{e^{-k\sqrt{s^2-a^2}}}{\sqrt{s^2-a^2}}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0<t<k, \\ I_0(a\sqrt{t^2-k^2}), & \text{если } t>k \end{cases}$
91	$\frac{e^{-k\sqrt{s^2+a^2}-s}}{\sqrt{s^2+a^2}} \quad (k\geqslant 0)$	$J_0(a\sqrt{t^2+2kt})$
92	$e^{-ks} - e^{-k\sqrt{s^2+a^2}}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0<t<k, \\ \frac{ak}{\sqrt{t^2-k^2}} J_1(a\sqrt{t^2-k^2}), & \text{если } t>k \end{cases}$
93	$e^{-k\sqrt{s^2-a^2}} e^{-ks}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0<t<k, \\ \frac{ak}{\sqrt{t^2-k^2}} I_1(a\sqrt{t^2-k^2}), & \text{если } t>k \end{cases}$

Таблица 8.4-1 (*продолжение*)

	$F(s)$	$f(t)\ (t>0)$
94	$\dfrac{a^{\nu}e^{-k\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}\left(\sqrt{s^2+a^2}+s\right)^{\nu}}\quad (\nu>-1)$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0<t<k, \\ \left(\dfrac{t-k}{t+k}\right)^{1/2\nu} J_{\nu}\left(a\sqrt{t^2-k^2}\right), & \text{если } t>k \end{cases}$
95	$\dfrac{1}{s}\ln s$	$\Gamma'(1)-\ln t\quad [\Gamma'(1)=-0{,}5772]$
96	$\dfrac{1}{s^k}\ln s\quad (k>0)$	$t^{k-1}\left\{\dfrac{\Gamma'(k)}{[\Gamma(k)]^2}-\dfrac{\ln t}{\Gamma(k)}\right\}$
97	$\dfrac{\ln s}{s-a}\quad (a>0)$	$e^{at}\,[\ln a-\mathrm{Ei}\,(-at)]$
98	$\dfrac{\ln s}{s^2+1}$	$\cos t\,\mathrm{Si}\,t-\sin t\,\mathrm{Ci}\,t$
99	$\dfrac{s\ln s}{s^2+1}$	$-\sin t\,\mathrm{Si}\,t-\cos t\,\mathrm{Ci}\,t$
100	$\dfrac{1}{s}\ln(1+ks)\ (k>0)$	$-\mathrm{Ei}\left(-\dfrac{t}{k}\right)$
101	$\ln\dfrac{s-a}{s-b}$	$\dfrac{1}{t}\left(e^{bt}-e^{at}\right)$
102	$\dfrac{1}{s}\ln(1+k^2s^2)$	$-2\,\mathrm{Ci}\left(\dfrac{t}{k}\right)$
103	$\dfrac{1}{s}\ln(s^2+a^2)\quad (a>0)$	$2\ln a-2\,\mathrm{Ci}\,(at)$
104	$\dfrac{1}{s^2}\ln(s^2+a^2)\quad (a>0)$	$\dfrac{2}{a}\,[at\ln a+\sin at-at\,\mathrm{Ci}\,(at)]$
105	$\ln\dfrac{s^2+a^2}{s^2}$	$\dfrac{2}{t}\,(1-\cos at)$
106	$\ln\dfrac{s^2-a^2}{s^2}$	$\dfrac{2}{t}\,(1-\mathrm{ch}\,at)$
107	$\mathrm{arctg}\,\dfrac{k}{s}$	$\dfrac{1}{t}\sin kt$
108	$\dfrac{1}{s}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{k}{s}$	$\mathrm{Si}\,(kt)$
109	$e^{k^2s^2}\,\mathrm{erfc}\,(ks)\ (k>0)$	$\dfrac{1}{k\sqrt{\pi}}\exp\left(-\dfrac{t^2}{4k^2}\right)$
110	$\dfrac{1}{s}\,e^{k^2s^2}\,\mathrm{erfc}\,(ks)\ (k>0)$	$\mathrm{erf}\left(\dfrac{t}{2k}\right)$
111	$e^{ks}\,\mathrm{erfc}\,\sqrt{ks}\ (k>0)$	$\dfrac{\sqrt{k}}{\pi\sqrt{t}\,(t+k)}$
112	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{ks}\right)$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0<t<k \\ (\pi t)^{-1/2}, & \text{если } t>k \end{cases}$
113	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}\,e^{ks}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{ks}\right)\quad (k>0)$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi\,(t+k)}}$
114	$\mathrm{erf}\left(\dfrac{k}{\sqrt{s}}\right)$	$\dfrac{1}{\pi t}\sin\left(2k\sqrt{t}\right)$

Таблица 8.4-1 (*продолжение*)

	$F(s)$	$f(t)\ (t>0)$
115	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{k^2/s} \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{\sqrt{s}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-2k\sqrt{t}}$
116	$K_0(ks)$	$\begin{cases} 0, & \text{если } 0<t<k, \\ (t^2-k^2)^{-1/2}, & \text{если } t>k \end{cases}$
117	$K_0(k\sqrt{s})$	$\frac{1}{2t}\exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)$
118	$\frac{1}{s} e^{ks} K_1(ks)$	$\frac{1}{k}\sqrt{t(t+2k)}$
119	$\frac{1}{\sqrt{s}} K_1(k\sqrt{s})$	$\frac{1}{k}\exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)$
120	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{k/s} K_0\left(\frac{k}{s}\right)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi t}} K_0(2\sqrt{2kt})$
121	$\pi e^{-ks} I_0(ks)$	$\begin{cases} [t(2k-t)]^{-1/2}, & \text{если } 0<t<2k, \\ 0, & \text{если } t>2k \end{cases}$
122	$\pi e^{-ks} I_1(ks)$	$\begin{cases} \frac{k-t}{k\sqrt{t(2k-t)}}, & \text{если } 0<t<2k, \\ 0, & \text{если } t>2k \end{cases}$
123	$-e^{as}\operatorname{Ei}(-as)$	$\frac{1}{t+a}\quad (a>0)$
124	$\frac{1}{a}+se^{as}\operatorname{Ei}(-as)$	$\frac{1}{(t+a)^2}\quad (a>0)$
125	$\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Si} s\right)\cos s+\operatorname{Ci} s\sin s$	$\frac{1}{t^2+1}$

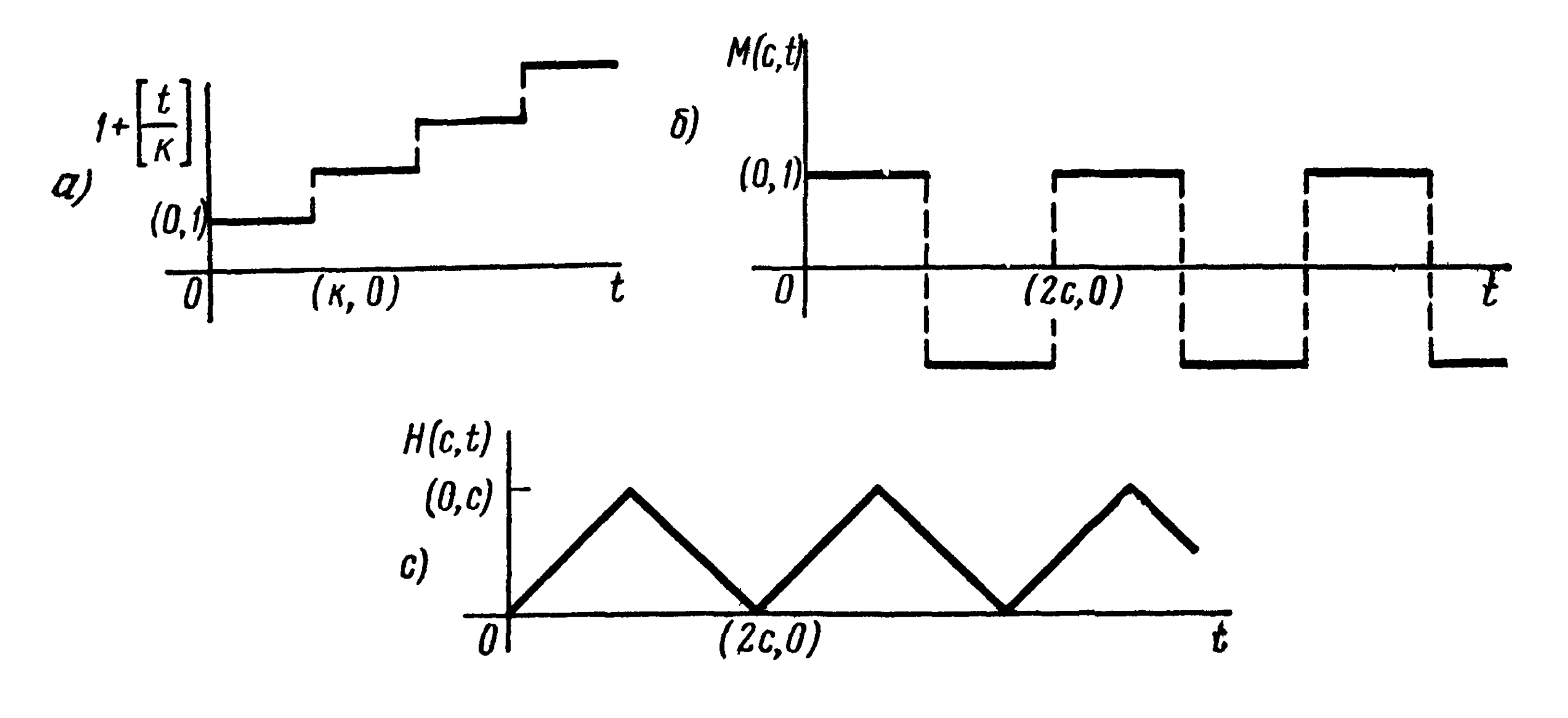


Рис. 8.4-1. Графики оригиналов к изображениям 65, 67 — 69, 71.

Таблица 8.4-2

Таблица преобразований Лапласа для рациональных изображений $F(s) = \dfrac{D_1(s)}{D(s)}$

Каждая формула справедлива для многочленов $D_1(s)$ и $D(s)$ как с комплексными, так и с действительными коэффициентами. Наибольший практический интерес представляет последний случай; при этом корни многочленов действительны и/или комплексно сопряженные, а функции $f(t)$ — действительные.

Заметим, что

$$(s-a)^2+\omega^2 = [s-(a+i\omega)][s-(a-i\omega)] \quad \text{и} \quad K_1 \sin \omega t + K_2 \cos \omega t = \sqrt{K_1^2+K_2^2} \sin(\omega t+\alpha), \quad \text{где} \quad \alpha = \operatorname{arctg}(K_2/K_1)$$

№	$F(s)$	$f(t)\ (t>0)$	
1.1	$\dfrac{1}{s}$	1	
1.2	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}	
1.3	$\dfrac{1}{s(s-a)}$	$Ae^{at}+K$	$A=\dfrac{1}{a}, \quad K=-\dfrac{1}{a}$
1.4	$\dfrac{s+d}{s(s-a)}$		$A=\left(1+\dfrac{d}{a}\right), \quad K=-\dfrac{d}{a}$
1.5	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at}+Be^{bt}$	$A=\dfrac{1}{a-b}, \quad B=\dfrac{1}{b-a}$
1.6	$\dfrac{s+d}{(s-a)(s-b)}$		$A=\dfrac{a+d}{a-b}, \quad B=\dfrac{b+d}{b-a}$
1.7	$\dfrac{1}{s(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at}+Be^{bt}+K$	$A=\dfrac{1}{a(a-b)}, \quad B=\dfrac{1}{b(b-a)}, \quad K=\dfrac{1}{ab}$
1.8	$\dfrac{s+d}{s(s-a)(s-b)}$		$A=\dfrac{a+d}{a(a-b)}, \quad B=\dfrac{b+d}{b(b-a)}, \quad K=\dfrac{d}{ab}$

1.9	$\dfrac{s^2+gs+d}{s(s-a)(s-b)}$		$A=\dfrac{a^2+ga+d}{a(a-b)},\quad B=\dfrac{b^2+gb+d}{b(b-a)},\quad K=\dfrac{d}{ab}$
1.10	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$		$A=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)},\quad B=\dfrac{1}{(b-a)(b-c)},\quad C=\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$
1.11	$\dfrac{s+d}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$Ae^{at}+Be^{bt}+Ce^{ct}$	$A=\dfrac{a+d}{(a-b)(a-c)},\quad B=\dfrac{b+d}{(b-a)(b-c)},\quad C=\dfrac{c+d}{(c-a)(c-b)}$
1.12	$\dfrac{s^2+gs+d}{(s-a)(s-b)(s-c)}$		$A=\dfrac{a^2+ag+d}{(a-b)(a-c)},\quad B=\dfrac{b^2+bg+d}{(b-a)(b-c)},\quad C=\dfrac{c^2+cg+d}{(c-a)(c-b)}$
2.1	$\dfrac{1}{(s-a)^2+\omega^2}$	$Ae^{at}\sin(\omega t+\alpha)$	$A=\dfrac{1}{\omega},\quad \alpha=0$
2.2	$\dfrac{s+d}{(s-a)^2+\omega^2}$		$A=\dfrac{1}{\omega}[(a+d)^2+\omega^2]^{1/2},\quad \alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{a+d}$
2.3	$\dfrac{1}{s[(s-a)^2+\omega^2]}$		$A=\dfrac{1}{\omega}\dfrac{1}{(a^2+\omega^2)^{1/2}},\quad K=\dfrac{1}{a^2+\omega^2},\quad \alpha=-\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{a}$
2.4	$\dfrac{s+d}{s[(s-a)^2+\omega^2]}$	$Ae^{at}\sin(\omega t+\alpha)+K$	$A=\dfrac{1}{\omega}\left[\dfrac{(a+d)^2+\omega^2}{a^2+\omega^2}\right]^{1/2},\quad K=\dfrac{d}{a^2+\omega^2},\quad \alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{a+d}-\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{a}$
2.5	$\dfrac{s^2+gs+d}{s[(s-a)^2+\omega^2]}$		$A=\dfrac{1}{\omega}\left[\dfrac{(a^2-\omega^2+ag+d)^2+\omega^2(2a+g)^2}{a^2+\omega^2}\right]^{1/2},\quad K=\dfrac{d}{a^2+\omega^2},\quad \alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega(2a+g)}{a^2-\omega^2+ag+d}-\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{a}$

№	$F(s)$	$f(t)\ (t>0)$	
2.6	$\frac{1}{(s-b)\,[(s-a)^2+\omega^2]}$		$A=\frac{1}{\omega}\,\frac{1}{[(a-b)^2+\omega^2]^{1/2}}$, $B=\frac{1}{(a-b)^2+\omega^2}$, $\alpha=-\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a-b}$
2.7	$\frac{s+d}{(s-b)\,[(s-a)^2+\omega^2]}$	$Ae^{at}\sin(\omega t+\alpha)+Be^{bt}$	$A=\frac{1}{\omega}\left[\frac{(a+d)^2+\omega^2}{(a-b)^2+\omega^2}\right]^{1/2}$, $B=\frac{b+d}{(a-b)^2+\omega^2}$, $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a+d}-\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a-b}$
2.8	$\frac{s^2+gs+d}{(s-b)\,[(s-a)^2+\omega^2]}$		$A=\frac{1}{\omega}\left[\frac{(a^2-\omega^2+ag+d)^2+\omega^2\,(2a+g)^2}{(a-b)^2+\omega^2}\right]^{1/2}$, $B=\frac{b^2+bg+d}{(a-b)^2+\omega^2}$, $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\omega\,(2a+g)}{a^2-\omega^2+ag+d}-\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a-b}$
2.9	$\frac{1}{s\,(s-b)\,[(s-a)^2+\omega^2]}$		$A=\frac{1}{\omega}\,\frac{1}{(a^2+\omega^2)^{1/2}\,[(a-b)^2+\omega^2]^{1/2}}$, $B=\frac{1}{b\,[(b-a)^2+\omega^2]}$, $K=-\frac{1}{b\,(a^2+\omega^2)}$, $\alpha=-\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a-b}-\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a}$
2.10	$\frac{s+d}{s\,(s-b)\,[(s-a)^2+\omega^2]}$	$Ae^{at}\sin(\omega t+\alpha)+Be^{bt}+K$	$A=\frac{1}{\omega\,(a^2+\omega^2)^{1/2}}\left[\frac{(d+a)^2+\omega^2}{(a-b)^2+\omega^2}\right]^{1/2}$, $B=\frac{b+d}{b\,[(b-a)^2+\omega^2]}$, $K=-\frac{d}{b\,(a^2+\omega^2)}$, $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a+d}\quad\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a-b}-\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a}$

2.11	$\dfrac{s^2+gs+d}{s(s-b)[(s-a)^2+\omega^2]}$		$A=\dfrac{1}{\omega}\left\{\dfrac{(a^2-\omega^2+ag+d)^2+\omega^2(2a+g)^2}{(a^2+\omega^2)[(a-b)^2+\omega^2]}\right\}^{1/2}$, $B=\dfrac{b^2+bg+d}{b[(b-a)^2+\omega^2]}$, $K=-\dfrac{d}{b(a^2+\omega^2)}$, $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega(2a+g)}{a^2-\omega^2+ag+d}-\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{a-b}-\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{a}$
2.12	$\dfrac{1}{[(s-a^2)+\omega_1^2](s^2+\omega_2^2)}$	$Ae^{at}\sin(\omega_1 t+\alpha)+$ $+B\sin(\omega_2 t+\beta)$	$A=\dfrac{1}{\omega_1}\dfrac{1}{[(a^2+\omega_1^2-\omega_2^2)^2+4a^2\omega_2^2]^{1/2}}$, $\alpha=-\operatorname{arctg}\dfrac{2a\omega_1}{\alpha^2-\omega_1^2+\omega_2^2}$, $B=\dfrac{1}{\omega_2}\dfrac{1}{[(a^2+\omega_1^2-\omega_2^2)^2+4a^2\omega_2^2]^{1/2}}$, $\beta=\operatorname{arctg}\dfrac{2a\omega_2}{a^2+\omega_1^2-\omega_2^2}$
2.13	$\dfrac{s+d}{[(s-a)^2+\omega_1^2](s^2+\omega_2^2)}$		$A=\dfrac{1}{\omega_1}\left[\dfrac{(a+d)^2+\omega_1^2}{(a^2+\omega_1^2-\omega_2^2)^2+4a^2\omega_2^2}\right]^{1/2}$, $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega_1}{a+d}-\operatorname{arctg}\dfrac{2a\omega_1}{a^2-\omega_1^2+\omega_2^2}$, $B=\dfrac{1}{\omega_2}\left[\dfrac{d^2+\omega_2^2}{(a^2+\omega_1^2-\omega_2^2)^2+4a^2\omega_2^2}\right]^{1/2}$, $\beta=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega_2}{d}+\operatorname{arctg}\dfrac{2a\omega_2}{a^2+\omega_1^2-\omega_2^2}$

Таблица 8.4-2 (*продолжение*)

№	$F(s)$	$f(t)\ (t>0)$	
2.14	$\frac{s^2+gs+d}{[(s-a)^2+\omega_1^2](s^2+\omega_2^2)}$	$Ae^{at}\sin(\omega_1 t+\alpha)+$ $+B\sin(\omega_2 t+\beta)$	$A=\frac{1}{\omega_1}\left[\frac{(a^2-\omega_1^2+ag+d)^2+\omega_1^2(2a+g)^2}{(a^2+\omega_1^2-\omega_2^2)^2+4a^2\omega_2^2}\right]^{1/2}$, $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\omega_1(2a+g)}{a^2-\omega_1^2+ag+d}-$ $-\operatorname{arctg}\frac{2a\omega_1}{a^2-\omega_1^2+\omega_2^2}$, $B=\frac{1}{\omega_2}\left[\frac{(d-\omega_2^2)^2+g^2\omega_2^2}{(a^2+\omega_1^2-\omega_2^2)^2+4a^2\omega_2^2}\right]^{1/2}$, $\beta=\operatorname{arctg}\frac{g\omega_2}{d-\omega_2^2}+\operatorname{arctg}\frac{2a\omega_2}{a^2+\omega_1^2-\omega_2^2}$
3.1	$\frac{1}{s^2}$	t	
3.2	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$(A+A_1 t)e^{at}$	$A=0,\quad A_1=1$
3.3	$\frac{s+d}{(s-a)^2}$		$A=1,\quad A_1=a+d$
3.4	$\frac{1}{s^2(s-a)}$	$Ae^{at}+K+K_1 t$	$A=\frac{1}{a^2},\quad K=-A,\quad K_1=-\frac{1}{a}$
3.5	$\frac{s+d}{s^2(s-a)}$		$A=\frac{a+d}{a^2},\quad K=-A,\quad K_1=-\frac{d}{a}$
3.6	$\frac{s^2+gs+d}{s^2(s-a)}$		$A=\frac{a^2+ag+d}{a^2},\quad K=1-A,\quad K_1=\frac{d}{a}$

3.7	$\dfrac{1}{s(s-a)^2}$	$(A+A_1t)e^{at}+K$	$A=-\dfrac{1}{a^2},\quad A_1=\dfrac{1}{a},\quad K=-A$
3.8	$\dfrac{s+d}{s(s-a)^2}$		$A=-\dfrac{d}{a^2},\quad A_1=\dfrac{a+d}{a},\quad K=-A$
3.9	$\dfrac{s^2+gs+d}{s(s-a)^2}$		$A=\dfrac{a^2-d}{a^2},\quad A_1=\dfrac{a^2+ag+d}{a},\quad K=1-A$
3.10	$\dfrac{1}{(s-a)^2(s-b)}$	$(A+A_1t)e^{at}+Be^{bt}$	$A=-\dfrac{1}{(a-b)^2},\quad A_1=\dfrac{1}{a-b},\quad B=-A$
3.11	$\dfrac{s+d}{(s-a)^2(s-b)}$		$A=-\dfrac{b+d}{(a-b)^2},\quad A_1=\dfrac{a+d}{a-b},\quad B=-A$
3.12	$\dfrac{s^2+gs+d}{(s-a)^2(s-b)}$		$A=\dfrac{a^2-2ab-bg-d}{(a-b)^2},\quad A_1=\dfrac{a^2+ag+d}{a-b},$ $B=\dfrac{b^2+bg+d}{(a-b)^2}$
3.13	$\dfrac{1}{s^2(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at}+Be^{bt}+K+K_1t$	$A=\dfrac{1}{a^2(a-b)},\quad B=\dfrac{1}{b^2(b-a)},$ $K=\dfrac{a+b}{a^2b^2},\quad K_1=\dfrac{1}{ab}$
3.14	$\dfrac{s+d}{s^2(s-a)(s-b)}$		$A=\dfrac{a+d}{a^2(a-b)},\quad B=\dfrac{b+d}{b^2(b-a)},$ $K=\dfrac{ab+d(a+b)}{a^2b^2},\quad K_1=\dfrac{d}{ab}$
3.15	$\dfrac{s^2+gs+d}{s^2(s-a)(s-b)}$		$A=\dfrac{a^2+ag+d}{a^2(a-b)},\quad B=\dfrac{b^2+bg+d}{b^2(b-a)},$ $K=\dfrac{abg+d(a+b)}{a^2b^2},\quad K_1=\dfrac{d}{ab}$

Таблица 8.4.2 (*продолжение*)

№	$F(s)$	$f(t)\ \ (t > 0)$	
3.16	$\frac{1}{s(s-a)^2(s-b)}$		$A = \frac{b-2a}{a^2(a-b)^2}$, $A_1 = \frac{1}{a(a-b)}$, $B = \frac{1}{b(a-b)^2}$, $K = -\frac{1}{a^2 b}$
3.17	$\frac{s+d}{s(s-a)^2(s-b)}$	$(A + A_1 t)\, e^{at} + Be^{bt} + K$	$A = -\frac{a^2+2ad-bd}{a^2(a-b)^2}$, $A_1 = \frac{a+d}{a(a-b)}$, $B = \frac{b+d}{b(a-b)^2}$, $K = -\frac{d}{a^2 b}$
3.18	$\frac{s^2+gs+d}{s(s-a)^2(s-b)}$		$A = -\frac{a^2(b+g)+d(2a-b)}{a^2(a-b)^2}$, $A_1 = \frac{a^2+ag+d}{a(a-b)}$, $B = \frac{b^2+bg+d}{b(a-b)^2}$, $K = -\frac{d}{a^2 b}$
3.19	$\frac{1}{(s-a)^2(s-b)(s-c)}$	$(A + A_1 t)\, e^{at} + Be^{bt} + Ce^{ct}$	$A = \frac{(b+c)-2a}{(a-b)^2(a-c)^2}$, $A_1 = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$, $B = \frac{1}{(b-a)^2(b-c)}$, $C = \frac{1}{(c-a)^2(c-b)}$
3.20	$\frac{s+d}{(s-a)^2(s-b)(s-c)}$		$A = -\frac{a^2+2ad-d(b+c)-bc}{(a-b)^2(a-c)^2}$, $A_1 = \frac{a+d}{(a-b)(a-c)}$, $B = \frac{b+d}{(b-a)^2(b-c)}$, $C = \frac{c+d}{(c-a)^2(c-b)}$
3.21	$\frac{1}{s^2(s-a)^2}$		$A = -\frac{2}{a^3}$, $A_1 = \frac{1}{a^2}$, $K = -A$, $K_1 = \frac{1}{a^2}$

3.22	$\dfrac{s+d}{s^2(s-a)^2}$	$(A+A_1t)e^{at}+K+K_1t$	$A=-\dfrac{a+2d}{a^3}$, $A_1=\dfrac{a+d}{a^2}$, $K=-A$, $K_1=\dfrac{d}{a^2}$
3.23	$\dfrac{s^2+gs+d}{s^2(s-a)^2}$		$A=-\dfrac{ag+2d}{a^3}$, $A_1=\dfrac{a^2+ag+d}{a^2}$, $K=-A$, $K_1=\dfrac{d}{a^2}$
3.24	$\dfrac{1}{(s-a)^2(s-b)^2}$	$(A+A_1t)e^{at}+(B+B_1t)e^{bt}$	$A=-\dfrac{2}{(a-b)^3}$, $A_1=\dfrac{1}{(a-b)^2}$, $B=-A$, $B_1=\dfrac{1}{(a-b)^2}$
3.25	$\dfrac{s+d}{(s-a)^2(s-b)^2}$		$A=-\dfrac{a+b+2d}{(a-b)^3}$, $A_1=\dfrac{a+d}{(a-b)^2}$, $B=-A$, $B_1=\dfrac{b+d}{(a-b)^2}$
3.26	$\dfrac{s^2+gs+d}{(s-a)^2(s-b)^2}$		$A=-\dfrac{(a+b)g+2(ab+d)}{(a-b)^3}$, $A_1=\dfrac{a^2+ag+d}{(a-b)^2}$, $B=-A$, $B_1=\dfrac{b^2+bg+d}{(a-b)^2}$
3.27	$\dfrac{1}{(s-a)^3(s-b)}$	$(A+A_1t+A_2t^2)e^{at}+Be^{bt}$	$A=\dfrac{1}{(a-b)^3}$, $A_1=-\dfrac{1}{(a-b)^2}$, $A_2=\dfrac{1}{2(a-b)}$, $B=-A$
3.28	$\dfrac{s+d}{(s-a)^3(s-b)}$		$A=\dfrac{b+d}{(a-b)^3}$, $A_1=-\dfrac{b+d}{(a-b)^2}$, $A_2=\dfrac{a+d}{2(a-b)}$, $B=-A$

Таблица 8.4-2 (*продолжение*)

№	$F(s)$	$f(t)\ (t>0)$	
3.29	$\frac{s^2+gs+d}{s^2(s-a)^3}$	$(A+A_1t+A_2t^2)e^{at}+$ $+K+K_1t$	$A=\frac{ag+3d}{a^4},\quad A_1=-\frac{ag+2d}{a^3},$ $A_2=\frac{a^2+ag+d}{2a^2},\quad K=-A,\quad K_1=-\frac{d}{a^3}$
4.1	$\frac{1}{s^2[(s-a)^2+\omega^2]}$		$A=\frac{1}{\omega(a^2+\omega^2)},\qquad \alpha=-2\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a},$ $K=\frac{2a}{(a^2+\omega^2)^2},\quad K_1=\frac{1}{a^2+\omega^2}$
4.2	$\frac{s+d}{s^2[(s-a)^2+\omega^2]}$	$Ae^{at}\sin(\omega t+\alpha)+K+K_1t$	$A=\frac{[(a+d)^2+\omega^2]^{1/2}}{\omega(a^2+\omega^2)},$ $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a+d}-2\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a},$ $K=\frac{a^2+\omega^2+2ad}{(a^2+\omega^2)^2},\quad K_1=\frac{d}{a^2+\omega^2}$
4.3	$\frac{s^2+gs+d}{s^2[(s-a)^2+\omega^2]}$		$A=\frac{[(a^2-\omega^2+ag+d)^2+\omega^2(2a+g)^2]^{1/2}}{\omega(a^2+\omega^2)},$ $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\omega(2a+g)}{a^2-\omega^2+ag+d}-2\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a},$ $K=\frac{(a^2+\omega^2)g+2ad}{(a^2+\omega^2)^2},\quad K_1=\frac{d}{a^2+\omega^2}$
4.4	$\frac{1}{(s-b)^2[(s-a)^2+\omega^2]}$		$A=\frac{1}{\omega[(a-b)^2+\omega^2]},\ \alpha=-2\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a-b},$ $B=\frac{2(a-b)}{[(a-b)^2+\omega^2]^2},\quad B_1=\frac{1}{(a-b)^2+\omega^2}$

4.5	$\dfrac{s+d}{(s-b)^2\,[(s-a)^2+\omega^2]}$	$Ae^{at}\sin(\omega t+\alpha)+$ $+(B+B_1 t)\,e^{bt}$	$A=\dfrac{[(a+d)^2+\omega^2]^{1/2}}{\omega\,[(a-b)^2+\omega^2]}$, $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{a+d}-2\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{a-b}$, $B=\dfrac{(a-b)^2+\omega^2+2\,(a-b)\,(b+d)}{[(a-b)^2+\omega^2]^2}$, $B_1=\dfrac{b+d}{(a-b)^2+\omega^2}$
4.6	$\dfrac{s^2+gs+d}{(s-b)^2\,[(s-a)^2+\omega^2]}$		$A=\dfrac{[(a^2-\omega^2+ag+d)^2+\omega^2\,(2a+g)^2]^{1/2}}{\omega\,[(a-b)^2+\omega^2]}$, $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega\,(2a+g)}{a^2-\omega^2+ag+d}-2\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{a-b}$, $B=\dfrac{[(a-b)^2+\omega^2]\,(2b+g)+2\,(a-b)\,(b^2+bg+d)}{[(a-b)^2+\omega^2]^2}$, $B_1=\dfrac{b^2+bg+d}{(a-b)^2+\omega^2}$
4.7	$\dfrac{1}{[(s-a)^2+\omega^2]^2}$	$\dfrac{1}{2\omega^3}\,e^{at}\,(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$	
4.8	$\dfrac{s-a}{[(s-a)^2+\omega^2]^2}$	$\dfrac{1}{2\omega}\,te^{at}\sin\omega t$	
4.9	$\dfrac{(s-a)^2-\omega^2}{[(s-a)^2+\omega^2]^2}$	$te^{at}\cos\omega t$	

(b) Иногда удобно получать обратное преобразование Лапласа в случае кратных корней уравнения $D(s)=0$ прямо предельным переходом, ведущим к совпадению различных простых корней (см. также табл. 8.3-1, 7). Пример:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2}\right]=\lim_{h\to 0}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a-h)(s-a)}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[e^{(a+h)t}-e^{at}\right]=te^{at}\qquad (t>0)$$

и, более общий случай:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^m}\right]=\frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{at}\qquad (t>0).$$

(c) Комплексные корни. В формулах (2) пары членов, соответствующих комплексно сопряженным корням $s=a\pm i\omega$, можно преобразовать следующим образом (см. также п. 8.4-5):

$$\left.\begin{aligned}(A+iB)\,t^re^{(a+i\omega)t}+(A-iB)\,t^re^{(a-i\omega)t}&=2At^re^{at}\cos\omega t-2Bt^re^{at}\sin\omega t=\\&=Rt^re^{at}\sin(\omega t+\alpha)=Rt^re^{at}\cos(\omega t+\alpha'),\\R=2\sqrt{A^2+B^2},\quad \alpha=-\operatorname{arctg}\frac{A}{B},\quad &\alpha'=\operatorname{arctg}\frac{B}{A};\end{aligned}\right\}\qquad (8.4\text{-}3)$$

A, B, R, α и α' все действительны, если коэффициенты многочленов $D_1(s)$ и $D(s)$ действительны; $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$ есть тогда действительная функция от t.

(d) Если один из корней s_k уравнения $D(s)=0$ будет также корнем уравнения $D_1(s)=0$, то один или несколько членов разложения (2) исчезают. Вообще же в случае общих корней многочлены $D(s)$ и $D_1(s)$ имеют общие множители, на которые их следует сократить.

8.4-5. Обратное преобразование Лапласа для рациональных алгебраических функций: разложение на простейшие дроби. Вместо применения формул разложения Хевисайда (2) можно воспользоваться разложением $F(s)=D_1(s)/D(s)$ на сумму простейших дробей методом, описанным в п. 1.7-4.

Если $D(s)$ и $D_1(s)$ не имеют совпадающих корней, то каждому действительному корню $s_k=a$ уравнения $D(s)=0$ отвечает m_k простых дробей вида

$$\frac{b_1}{s-a},\quad \frac{b_2}{(s-a)^2},\ \ldots,\ \frac{b_{m_k}}{(s-a)^{m_k}},$$

где m_k — кратность корня $s_k=a$. Каждой паре комплексно сопряженных корней $s_k=a\pm i\omega$ отвечает m_k простых дробей вида

$$c_1\frac{s+d_1}{(s-a)^2+\omega^2},\quad c_2\frac{s+d_2}{[(s-a)^2+\omega^2]^2},\ \ldots,\ c_{m_k}\frac{s+d_{m_k}}{[(s-a)^2+\omega^2]^{m_k}},$$

где m_k — кратность корней $s_k=a\pm i\omega$, $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$ находится как сумма обратных преобразований Лапласа таких слагаемых (табл. 8.4-2).

8.4-6. Разложения в ряды. Если функция $F(s)$ сложная или если $F(s)$ задана неявно, например, как решение дифференциального уравнения (п. 9.4-5), то иногда возможно находить $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$, раскладывая $F(s)$ в сходящиеся ряды и беря обратное преобразование Лапласа последовательных членов ряда. Этот процесс можно также применять для аппроксимации $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$. Часто метод разложения в ряды опирается на следующую теорему.

Пусть функцию $F(s)$ можно представить в полуплоскости $\operatorname{Re}s\geqslant\sigma$ в виде ряда

$$F(s)=\sum_{k=0}^{\infty}F_k(s),$$

где

$$F_k(s)=\mathscr{L}[f_k(t)]\qquad (\sigma>\sigma_a;\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Пусть далее все интегралы $\int_0^\infty |f_k(t)|\, e^{-\sigma_a t}\, dt$ *существуют и сходится ряд* $\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^\infty |f_k(t)|\, e^{-\sigma_a t}\, dt$. *Тогда ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ *сходится абсолютно к функции* $f(t)$ *почти для всех* t (п. 4.6-14, b) *и*

$$\mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathscr{L}[f_k(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(s) = F(s) \quad (\sigma > \sigma_a). \tag{8.4-4}$$

8.4-7. Разложения по степеням t. Если изображение $F(s)$ может быть разложено в ряд по отрицательным степеням s

$$F(s) = \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \ldots, \tag{8.4-5}$$

сходящийся при $|s| > r > 0$, то при всех $t > 0$

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = b_1 + b_2 t + \frac{b_3}{2!}t^2 + \ldots + \frac{b_k}{(k-1)!}t^{k-1} + \ldots \tag{8.4-6}$$

(Ряд справа сходится при всех значениях t.)

Разложение (8.4-5) часто можно получать как разложение Лорана (п. 7.5-3) в окрестности точки $s = \infty$ или, в случае рациональных алгебраических функций типа рассмотренного в п. 8.4-4, простым делением.

Если $F(s)$ при $|s| > r$ представляется сходящимся рядом

$$F(s) = \frac{1}{s^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{s^k} \quad (\operatorname{Re}\alpha > 0), \tag{8.4-7}$$

то

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = t^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\Gamma(k+\alpha)}t^k \quad (t \geqslant 0). \tag{8.4-8}$$

В частности, если ряд слева сходится, то

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{1/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{s^k}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\left[c_0 + \frac{c_1}{1}(2t) + \frac{c_2}{1\cdot 3}(2t)^2 + \frac{c_3}{1\cdot 3\cdot 5}(2t)^3 + \ldots\right] \quad (t \geqslant 0). \tag{8.4-9}$$

8.4-8. Разложения по многочленам Лагерра. Каждая функция

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] \quad (\sigma > \sigma_a),$$

аналитическая в точке $s = \infty$, может быть разложена в абсолютно сходящийся ряд по степеням

$$z = \frac{s - \sigma_a - 1/2}{s - \sigma_a + 1/2} \tag{8.4-10}$$

для $\sigma > \sigma_a$; соответствующий ряд Тейлора сходится для $|z| < 1$. В частности, для $\sigma_a = 0$ изображение $F(s)$ можно представить в виде

$$F(s) = (1 - z)\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \frac{1}{s + 1/2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(\frac{s - 1/2}{s + 1/2}\right)^k \quad (\sigma > \sigma_a). \tag{8.4-11}$$

где

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{1}{j!} F^{(j)}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (k=0, 1, 2, \ldots).$$

Если условия п. 8.4-6 *выполняются, то для почти всех* $t \geqslant 0$

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = e^{-t/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k L_k(t)}{k!}, \tag{8.4-12}$$

где $L_k(t)$ — полиномы Лагерра, определенные в п. 21.7-1.

8.4-9. Разложения в асимптотические ряды. Аппроксимацию $\mathscr{L}[f(t)]$ и $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$ иногда удается получить при помощи асимптотических рядов (п. 4.8-6, b).

* (a) Асимптотическое разложение изображения. *Пусть* $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ *и оригинал* $f(t)$ *может быть разложен в окрестности точки* $t=0$ *в абсолютно сходящийся ряд вида*

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{\lambda_j} \qquad (-1 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots \to \infty). \tag{8.4-13}$$

Тогда $F(s)$ *имеет при* $s \to \infty$ *асимптотическое разложение*

$$F(s) \sim \sum_{j=0}^{\infty} c_j \frac{\Gamma(\lambda_j + 1)}{s^{\lambda_j + 1}}. \tag{8.4-14}$$

Ряд справа формально получается почленным переходом из ряда (13) путем преобразования Лапласа.

(b) Асимптотическое разложение оригинала. *Пусть*

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] \quad (\sigma > \sigma_a)$$

и выполняются следующие условия

1) $F(s)$ *имеет лишь изолированные особые точки — полюсы и алгебраические точки разветвления,*

2) $F(s)$ *в полуплоскости* $\operatorname{Re} s < 0$ *стремится к нулю при* $|s| \to \infty$,

3) *число особых точек* $s = s_k$ *с наибольшей действительной частью конечно* ($k = 1, 2, \ldots, l$) *и разложение* $F(s)$ *в окрестности каждой такой точки дается рядом*

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(k)} (s - s_k)^{\lambda_j^{(k)}} \qquad (-N_k < \lambda_0^{(k)} < \lambda_1^{(k)} < \ldots \to \infty). \tag{8.4-15}$$

Тогда оригинал $f(t)$ *имеет при* $t \to \infty$ *асимптотическое представление*

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{l} e^{s_k t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j^{(k)}}{\Gamma\left(-\lambda_j^{(k)}\right) t^{\lambda_j^{(k)}+1}}, \tag{8.4-16}$$

где $\dfrac{1}{\Gamma\left(-\lambda_j^{(k)}\right)} = 0$, *если* $\lambda_j^{(k)} = 0, 1, 2, \ldots$ *

Следующий частный тип асимптотического разложения важен в связи с решением некоторых дифференциальных уравнений с частными производными (п. 10.5-2).

Если функцию $F(s)$ в окрестности точки $s=0$ можно разложить в сходящийся ряд вида

$$F(s)=\frac{1}{s}(a_0+a_1 s^{1/2}+a_2 s+a_3 s^{3/2}+\ldots)=\frac{1}{s}\sum_{j=0}^{\infty} a_j s^{j/2}, \qquad (8.4\text{-}17)$$

а все остальные особые точки $F(s)$ (если они имеются) расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} s<0$, то оригинал $f(t)$ имеет при $t\to\infty$ асимптотическое представление

$$f(t)\sim a_0+\frac{1}{\pi\sqrt{t}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_{2j+1}\frac{\Gamma(j+1/2)}{t^j}. \qquad (8.4\text{-}18)$$

(При переходе от формулы (16) к формуле (18) учтено, что

$$\frac{1}{\Gamma(1/2-j)}=\frac{(-1)^j}{\pi}\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right).\Bigg)$$

Более тонкие достаточные условия для справедливости асимптотических разложений приведены в [8.3].

8.5. ФОРМАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ИМПУЛЬСНЫХ ФУНКЦИЙ

(a) Заметим, что в формуле (8.4-13) и в аналогичных разложениях в ряды обратное преобразование Лапласа отдельных слагаемых, равных a, $as^{1/2}$, as, $as^{3/2}$, ..., строго говоря, не существует, так как эти функции не стремятся к нулю при $s\to\infty$. Во многих приложениях члены такого вида могут появляться под знаком суммы или интеграла, несмотря на то, что сама сумма или интеграл имеют обратное преобразование Лапласа.

(b) Если применить преобразование Лапласа (8.2-1) к определениям импульсных функций $\delta(t)$ и $\delta_+(t)$ [1]) и их «производных» (пп. 9-4-3 и 21.9), то получим *формальные* результаты:

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}[\delta(t)]=1/2,\quad \mathscr{L}[\delta_+(t)]=1,\quad \mathscr{L}[\delta'_+(t)]=s,\quad \mathscr{L}[\delta''_+(t)]=s^2,\ \ldots,\\&\mathscr{L}[\delta(t-a)]=\mathscr{L}[\delta_+(t-a)]=e^{-as}\quad (a>0),\\&\mathscr{L}[\delta^{(k)}(t-a)]=\mathscr{L}[\delta_+^{(k)}(t-a)]=e^{-as}s^k\quad (a>0,\ k=1,\ 2,\ \ldots)\end{aligned}\right\}\qquad (8.5\text{-}1)$$

и, если $f(t)$ непрерывна для $t=a\geqslant 0$,

$$\mathscr{L}[\delta_+(t-a)f(t)]=e^{-as}f(a). \qquad (8.5\text{-}2)$$

Равенства (1) и (2) употребляются во многих приложениях, хотя нельзя забывать, что эти соотношения не имеют строгого математического смысла. Новые результаты, полученные применением равенств (1) и (2), должны всегда проверяться с точки зрения законности математических действий *) (см. также п. 8.2-7 и 21.9-2, а).

---

[1]) Односторонняя импульсная функция $\delta_+(t)$ более подходит для употребления в связи с односторонним преобразованием Лапласа, чем симметрическая импульсная функция $\delta(t)$.

*) В настоящее время большое развитие получила теория «обобщенных» функций, включающая в себя затронутые здесь вопросы (см. [8.6], [13.6], [21.6]).

8.6. НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

8.6-1. Вводные замечания. Преобразование Лапласа (8.2-1) есть *функциональное преобразование*, связывающее «точки» $F(s)$ в пространстве изображений с «точками» $f(t)$ в пространстве оригиналов (см. также пп. 12.1-4 и 15.2-7). Табл. 8.6-1 и пп. 8.6-2—8.6-4 знакомят с некоторыми другими функциональными преобразованиями (см. также п. 4.11-5).

8.6-2. Двустороннее преобразование Лапласа.

(a) Двустороннее преобразование Лапласа

$$\mathscr{L}_B[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = \mathscr{L}[f(t);\ s] + \mathscr{L}[f(-t);\ -s], \qquad (8.6\text{-}1)$$

есть заманчивое обобщение преобразования Лапласа, применимое, подобно преобразованию Фурье (пп. 4.11-3—4.11-7), к задачам, где участвуют значения $f(t)$ для $t<0$. *$\mathscr{L}_B[f(t);\ s]$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда оба интеграла $\mathscr{L}[f(t);\ s]$ и $\mathscr{L}[f(-t);\ -s]$ абсолютно сходятся,* так что область абсолютной сходимости, если она существует, есть *полоса* в s-плоскости, определенная двумя абсциссами абсолютной сходимости. *Многие свойства двустороннего преобразования Лапласа просто получаются из соответствующих свойств одностороннего преобразования Лапласа.* В частности,

$$\mathscr{L}_B[f(t)] = \mathscr{L}[f(t)], \qquad \text{если } f(t)=0 \text{ для } t\leqslant 0, \qquad (8.6\text{-}2)$$

$$\mathscr{L}_B[f(t)] = \mathscr{L}[f(t)] - \frac{c}{s}, \quad \text{если } f(t)=c \text{ для } t\leqslant 0. \qquad (8.6\text{-}3)$$

(b) Значения обратного преобразования $\mathscr{L}_B^{-1}[F(s)]$ не обязательно равны нулю для $t<0$, так что $\mathscr{L}_B^{-1}[F(s)]$ существует для более широкого класса функций $F(s)$, чем $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

Если дано изображение

$$F(s) = \mathscr{L}_B[f(t)] \qquad (\sigma_{a_1} < \sigma < \sigma_{a_2}),$$

то для каждого значения t, имеющего окрестность, в которой $f(t)$ — функция ограниченной вариации,

$$f_I(t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_1-iR}^{\sigma_1+iR} F(s)\, e^{st}\, ds = \frac{1}{2}\,[f(t-0)+f(t+0)] \qquad (8.6\text{-}4)$$

(*теорема обращения*).

Теорема обращения для одностороннего преобразования Лапласа (п. 8.2-6) может рассматриваться как частный случай формулы (4).

Двустороннее преобразование Лапласа и его приложения детально рассматриваются в [8.3].

8.6-3. Преобразование Лапласа в форме интеграла Стилтьеса. Преобразование Лапласа в форме интеграла Стилтьеса

$$\mathscr{L}_S[\varphi(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st}\, d\varphi(t) \qquad (8.6\text{-}5)$$

дает возможность сформулировать в более общем виде многие теоремы обыкновенного преобразования Лапласа (см. также п. 4.6-17).

Другие функциональные преобразования, приведенные в табл. 8.6-1, также могут быть записаны в форме интегралов Стилтьеса.

Заметим, что $F(s) = se^{-bs}$ можно представить в форме (5), не употребляя импульсных функций (п. 8.5-1). Преобразование Лапласа — Карсона (табл. 8.6-1, 1) иногда употребляется для подобных целей.

Таблица 8.6-1

Некоторые линейные интегральные преобразования, связанные с преобразованием Лапласа

(см. также пп. 4.11-3 — 4.11-5, 8.6-1 — 8.6-5, 10.5-1, 15.2-7, 15.3-1, 18.3-8 и 20.4-5)

	Преобразование	Определение	Формула обращения	Связь с односторонним преобразованием Лапласа [1])	Примечание
1	**Преобразование Лапласа — Карсона**	$s\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt$	$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{1}{s} F(s)\, e^{st}\, ds$	$s\mathscr{L}[f(t);\ s]$	
2	**Двустороннее преобразование Лапласа**	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt$	$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$	$\mathscr{L}_B[f(t);\ s] = \mathscr{L}[f(t);\ s] + \mathscr{L}[f(-t);\ -s]$	п. 8.6-2
3	**Преобразование Фурье**	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi i \nu t} dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\, e^{2\pi i \nu t}\, d\nu$	$\mathscr{L}_B[f(t);\ 2\pi i\nu]$	пп. 4.11-3 — 4.11-5
4	**Преобразование Меллина**	$\int_0^{\infty} f(t)\, t^{s-1} dt$	$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} F(s)\, t^{-s}\, ds\ (t>0)$	$\mathscr{L}_B[f(e^t);\ -s]$	п. 20.4-5
5	**Преобразование Гильберта** (употребляется главное значение интеграла)	$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{s-t}\, dt$	$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(s)}{t-s}\, ds$	$\frac{1}{\pi}\mathscr{L}\{\mathscr{L}[f(-t);\ s'];\ s\} - \frac{1}{\pi}\mathscr{L}\{\mathscr{L}[f(t);\ s'];\ -s\}$	$f(t)$ и $F(s)$ таковы, что если $f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t]\, d\omega$, то $F(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [b(\omega)\cos\omega s - a(\omega)\sin\omega s]\, d\omega$

[1]) Предполагается, что преобразование существует.

8.6-4. Преобразования Ганкеля и Фурье — Бесселя.

(a) Определение и теоремы обращения. Интегральное преобразование

$$\bar{f}(s) = \mathscr{K}_m[f(t)] = \mathscr{K}_m[f(t);\ s] = \int_0^\infty f(t)\, t\, J_m(st)\, dt \qquad (8.6\text{-}6a)$$

(*преобразование Ганкеля порядка* m),

где $f(t)$ — действительная функция и $J_m(z)$ — функция Бесселя порядка m (п. 21.8-1), существует в смысле абсолютной сходимости, когда $\int_0^\infty |f(t)|\, dt$ существует. *Если, кроме того, $f(t)$ — функция ограниченной вариации в окрестности точки t, то имеет место формула обращения*

$$f_I(t) = \int_0^\infty \bar{f}(s)\, s\, J_m(st)\, ds = \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)] \qquad (8.6\text{-}6b)$$

($m \geqslant -1/2$) (*теорема обращения Ганкеля*),

которая определяет обратное преобразование единственным образом в точке непрерывности.

(b) Свойства преобразований Ганкеля. Отметим следующие соотношения

$$\mathscr{K}_m[f(at);\ s] = \frac{1}{a^2}\mathscr{K}_m\left[f(t);\ \frac{s}{a}\right], \qquad (8.6\text{-}7)$$

$$\mathscr{K}_m\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \frac{s}{2m}\{\mathscr{K}_{m-1}[f(t)] + \mathscr{K}_{m+1}[f(t)]\}, \qquad (8.6\text{-}8)$$

$$\mathscr{K}_m[f'(t)] = \frac{s}{2m}\{(m-1)\mathscr{K}_{m+1}[f(t)] - (m+1)\mathscr{K}_{m-1}[f(t)]\}, \qquad (8.6\text{-}9)$$

$$\mathscr{K}_m\left[f''(t) + \frac{1}{t}f'(t) - \frac{m^2}{t^2}f(t)\right] = -s^2\mathscr{K}_m[f(t)], \qquad (8.6\text{-}10)$$

$$\int_0^\infty s\,\mathscr{K}_m[f(t)]\,\mathscr{K}_m[g(t)]\, ds = \int_0^\infty t\, f(t)\, g(t)\, dt \qquad (m \geqslant -1/2) \qquad (8.6\text{-}11)$$

(*теорема Парсеваля для преобразования Ганкеля*).

Примеры преобразований Ганкеля см. в табл. 8.6-2.

(c) Преобразования Фурье — Бесселя (см. также пп. 21.8-1 и 21.8-2). Следующие парные интегральные преобразования связаны с интегральным преобразованием Ганкеля (6):

$$\left.\begin{aligned} \bar{f}(s) &= \int_0^\infty f(t)\, t J_m(st)\, dt, \\ f_I(t) &= \int_0^\infty \bar{f}(s)\, s J_m(st)\, ds = \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)] \end{aligned}\right\} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (8.6\text{-}12)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{f}(s) &= \int_0^\infty f(t)\, \frac{1}{\sqrt{st}} J_{m+1/2}(st)\, t^2\, dt, \\ f_I(t) &= \int_0^\infty \bar{f}(s)\, \frac{1}{\sqrt{st}} J_{m+1/2}(st)\, s^2\, ds = \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)] \end{aligned}\right\} \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (8.6\text{-}13)$$

Оба интегральных преобразования относятся к парным преобразованиям Фурье — Бесселя; для $m = 0$ формулы (13) сводятся к синус-преобразованию Фурье.

Таблица 8.6-2

Преобразования Ганкеля

$$f(t) = \int_0^\infty s \bar{f}(s) J_m(st)\, ds, \qquad \bar{f}(s) = \int_0^\infty t f(t) J_m(st)\, dt$$

$f(t)$	m	$\bar{f}(s)$
t^m, $0 < t < a$; 0, $t > a$	> -1	$\frac{a^{m+1}}{s} J_{m+1}(sa)$
1, $0 < t < a$; 0, $t > a$	0	$\frac{a}{s} J_1(as)$
$(a^2 - t^2)$, $0 < t < a$; 0, $t > a$	0	$\frac{4a}{s^3} J_1(sa) - \frac{2a^2}{s^2} J_0(sa)$
$t^{\mu-2} e^{-pt^2}$	> -1	$\frac{s^{\nu}\,\Gamma(m/2+\mu/2)}{2^{m+1} p^{\mu/2+m/2}\,\Gamma(1+m)}\ {}_1F_1\left(\frac{m}{2}+\frac{\mu}{2},\ m+1,\ -\frac{s^2}{4p}\right)$
$t^m e^{-pt^2}$	> -1	$\frac{s}{(2p)^{m+1}} e^{-\frac{s^2}{4p}}$
$t^{\mu-1} e^{-pt}$	> -1	$\frac{2^{\mu} s^m\,\Gamma(\mu/2+m/2+{}^1/_2)\,\Gamma(1+\mu/2+m/2)}{(s^2+p^2)^{\mu/2+m/2+{}^1/_2}\,\Gamma(m+1)\,\Gamma({}^1/_2)} \times$ $\times\ {}_2F_1\left(\frac{\mu}{2}+\frac{m}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{m}{2}-\frac{\mu}{2},\ 1+m,\ \frac{s^2}{s^2+p^2}\right)$
$t^{\mu-1}$	> -1	$\frac{2^{\mu}\,\Gamma({}^1/_2+\mu/2+m/2)}{s^{\mu+1}\,\Gamma({}^1/_2-\mu/2+m/2)}$
$\frac{e^{-pt}}{t}$	0	$(s^2+p^2)^{-1/2}$
e^{-pt}	0	$p(s^2+p^2)^{-3/2}$
$\frac{e^{-pt}}{t^2}$	1	$\frac{(s^2+p^2)^{1/2}-p}{s}$
$\frac{e^{-pt}}{t}$	1	$\frac{1}{s} - \frac{p}{s(s^2+p^2)^{1/2}}$
e^{-pt}	1	$s(s^2+p^2)^{-3/2}$

Таблица 8.6-2 (*продолжение*)

$f(t)$	m	$\bar{f}(s)$
$\frac{a}{(a^2+t^2)^{3/2}}$	0	e^{-as}
$\frac{\sin at}{t}$	0	$(a^2-s^2)^{-1/2}, \quad 0<s<a$ $0, \quad s>a$
$\frac{\sin at}{t}$	1	$0, \quad s<a$ $\frac{a}{s(s^2-a^2)^{1/2}}, \quad s>a$
$\frac{\sin t}{t^2}$	0	$\pi/2, \quad s<1$ $\arcsin\frac{1}{s}, \quad s>1$

8.7. КОНЕЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ И z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

8.7-1. Ряды как функциональные преобразования. Конечные преобразования Фурье и Ганкеля. Конечная сумма или сходящийся ряд

$$\Phi(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \Psi(x, k) \tag{8.7-1}$$

представляет функциональное преобразование функции (последовательности) $f_k \equiv f(k)$, определенной на дискретном множестве значений $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Заметим, что для некоторых f_k и $\Psi(x, k)$ этот ряд можно записать как интегральное преобразование в форме интеграла Стилтьеса (п. 4.6-17)

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, k)\, d\varphi(k).$$

Ряды (1) и формулы типа (4.10-5), (4.11-6), (7.5-4) и (7.5-7), определяющие коэффициенты f_k по функции $\Phi(x)$, составляют соответствующие взаимно обратные функциональные преобразования. В табл. 8.7-1 приведены соотношения для коэффициентов рядов Фурье и рядов Фурье — Бесселя, рассматриваемых как интегральные преобразования с *конечным* интервалом интегрирования (**конечные интегральные преобразования**). В каждом случае приведено преобразование подходящего линейного дифференциального оператора второго порядка в связи с применением метода интегральных преобразований для решения краевых задач (см. пп. 10.4-9, 10.5-3, 15.2-4, 21.8-4, d и [8.5]).

8.7-2. Производящие функции. Если функциональное преобразование (1) имеет вид сходящегося *степенного ряда*

$$\gamma(s)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k, \tag{8.7-2}$$

Таблица 8.7-1

Некоторые конечные интегральные преобразования

x — действительное переменное, $a > 0$

(а) Конечные преобразования, полезные для краевых условий типа $\Phi = 0$ или $\Phi' = 0$

	f_k	$\Phi(x)$ или $^1/_2\,[\Phi(x-0)+\Phi(x+0)]$	λ_k — положительные корни уравнения	Преобразование дифференциального оператора
Конечное косинус-преобразование (ряд Фурье по косинусам, п. 4.11-2, е)	$\int\limits_0^a \Phi(x)\cos\lambda_k x\,dx$	$\frac{f_0}{a}+\frac{2}{a}\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\cos\lambda_k x$	$\operatorname{tg} a\lambda = 0$ $\lambda_k=\frac{k\pi}{a}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$	$\int\limits_0^a \Phi''(x)\cos\lambda_k x\,dx = -\lambda_k^2 f_k - \Phi'(0) + (-1)^k\,\Phi'(a)$
Конечное синус-преобразование (ряд Фурье по синусам, п. 4.11-2, е)	$\int\limits_0^a \Phi(x)\sin\lambda_k x\,dx$	$\frac{2}{a}\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\sin\lambda_k x$		$\int\limits_0^a \Phi''(x)\sin\lambda_k x\,dx = -\lambda_k^2 f_k + \lambda_k\,[\Phi(0) + (-1)^{k+1}\Phi(a)]$
Конечное преобразование Ганкеля (ряд Фурье — Бесселя, п. 21.8-4, d)	$\int\limits_0^a \Phi(x)\,x\,J_m(\lambda_k x)\,dx$	$\frac{2}{a^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\frac{J_m(\lambda_k x)}{[J_m'(\lambda_k a)]^2}$	$J_m(a\lambda)=0$	$\int\limits_0^a\left[\Phi''+\frac{\Phi'}{x}-\frac{m^2\Phi}{x^2}\right]x\,J_m(\lambda_k x)\,dx = -\lambda_k^2 f_k - a\lambda_k J_m'(a\lambda_k)\,\Phi(a)$
Конечное кольцевое преобразование Ганкеля $a' > a > 0$, $B_m(\lambda x) = J_m(\lambda x)\,N_m(a\lambda) - N_m(\lambda x)\,J_m(a\lambda)$	$\int\limits_a^{a'} \Phi(x)\,x\,B_m(\lambda_k x)\,dx$	$\frac{\pi^2}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\frac{\lambda_k^2 J_m^2(a'\lambda_k)\,B_m(\lambda_k x)}{J_m^2(a\lambda_k)-J_m^2(a'\lambda_k)}$	$B_m(a'\lambda)=0$	$\int\limits_a^{a'}\left[\Phi''+\frac{\Phi'}{x}-\frac{m^2\Phi}{x^2}\right]xB_m(\lambda_k x)\,dx = -\lambda_k^2 f_k + \frac{2}{\pi}\left[\frac{J_m(a\lambda_k)}{J_m(a'\lambda_k)}\,\Phi(a') - \Phi(a)\right]$

Таблица 8.7-1 (*продолжение*)

(b) Конечные преобразования, полезные для краевых условий типа

$$\Phi(a) + b\,\Phi'(a) = 0 \qquad (b > 0)$$

	f_k	$\Phi(x)$ или $^1/_2\,[\Phi(x-0) + \Phi(x+0)]$	λ_k — положительные корни уравнения	Преобразование дифференциального оператора
Конечное косинус-преобразование	$\int_0^a \Phi(x)\cos\lambda_k x\,dx$	$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_k^2 + b^2)\,f_k \cos\lambda_k x}{b + a(\lambda_k^2 + b^2)}$	$\lambda\,\mathrm{tg}\,a\lambda = b$	$\int_0^a \Phi''(x)\cos\lambda_k x\,dx = -\lambda_k^2 f_k - \Phi'(0) + [\Phi'(a) + b\,\Phi(a)]\cos a\lambda_k$
Конечное синус-преобразование	$\int_0^a \Phi(x)\sin\lambda_k x\,dx$	$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_k^2 + b^2)\,f_k \sin\lambda_k x}{b + a(\lambda_k^2 + b^2)}$	$\lambda\,\mathrm{ctg}\,a\lambda = -b$	$\int_0^a \Phi''(x)\sin\lambda_k x\,dx = -\lambda_k^2 f_k + \lambda_k\,\Phi(0) + [\Phi'(a) + b\,\Phi(a)]\sin a\lambda_k$
Конечное преобразование Ганкеля	$\int_0^a \Phi(x)\,x\,J_m(\lambda_k x)\,dx$	$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 f_k J_m(\lambda_k x)}{[(\lambda_k^2 + b^2)\,a^2 - m^2]\,J_m^2(a\lambda_k)}$	$\lambda J_m'(a\lambda) + b\,J_m \times (a\lambda) = 0$	$\int_0^a \left[\Phi'' + \frac{\Phi'}{x} - \frac{m^2}{x^2}\Phi\right] \times x\,J_m(\lambda_k x)\,dx = -\lambda_k^2 f_k + [\Phi'(a) + b\,\Phi(a)]\,a\,J_m(a\lambda_k)$
Заметим, что $J_0'(\lambda_k a) = -J_1(\lambda_k a)$.				

то $\gamma(s)$ называется **производящей функцией** для последовательности коэффициентов $f_k \equiv f(k)$. Функция

$$\gamma_E(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{k!} s^k \tag{8.7-3}$$

называется **экспоненциальной производящей функцией**. Применения и свойства производящих функций см. в пп 18.3-8 и 18.7-2.

Пример. Числа Фибоначчи определяются рекуррентными соотношениями

$$f_0 = f_1 = 1, \quad f_k = f_{k-1} + f_{k-2} \qquad (k = 2, 3, \ldots). \tag{8.7-4}$$

Для них производящая функция

$$\gamma(s) = \frac{1}{1 - s - s^2} = 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + 8s^5 + \ldots \tag{8.7-5}$$

8.7-3. z-преобразование. Определение и формула обращения. **z-преобразованием** последовательности f_k называется функция комплексного переменного $Z[f_k;\ z] = F_Z(z)$, определенная рядом

$$Z[f_k;\ z] = F_Z(z) = f_0 + \frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{z^2} + \ldots \qquad (|z| > r_a), \tag{8.7-6}$$

сходящимся (абсолютно и равномерно) вне некоторого круга радиуса r_a, зависящего от данной последовательности.

Так, если $|f_k| \leqslant Me^{\alpha k}$, то ряд (6) сходится при $|z| > e^{\alpha}$.

Подразумевается, что область $|z| > r_a$ определения функции $F_Z(z)$ расширена с помощью аналитического продолжения, как и в п. 8.2-3.

Соответствующая формула обращения имеет вид

$$f_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C F_Z(z)\, z^{k-1}\, dz \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{8.7-7}$$

где C — любой замкнутый контур, окружающий все особые точки функции $F_Z(z)$, в частности, любая окружность $|z| > r_a$.

Значение интеграла (7) часто удается получить с помощью теоремы о вычетах (пп. 7.7-1—7.7-3). Если $F_Z(z)$ — рациональная функция, то можно пользоваться разложением на простейшие дроби (как в п. 8.4-5). Обращение особенно просто, если $F_Z(z)$ может быть разложено по степеням $1/z$.

В табл. 8.7-2 собраны важнейшие свойства z-преобразования. Их приложения к решению разностных уравнений и к анализу систем управления по выборочным данным приведены в п. 20.4-6; там же обсуждается связь между z-преобразованием и преобразованием Лапласа ступенчатых функций. В табл. 20.4-1 приведены некоторые z-преобразования.

z-преобразования связаны с преобразованием Меллина из табл. 8.6-1. Заметим, что связь между степенными рядами и преобразованием Меллина аналогична связи между *рядами Дирихле* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-ks}$ и преобразованием Лапласа.

*Замена переменной $z = e^q$ приводит к **дискретному преобразованию Лапласа**

$$F^*(q) = F_Z(e^q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-nq}. *$$

Таблица 8.7-2

Соответствие операций при z-преобразовании

Следующие теоремы справедливы в области абсолютной сходимости преобразований; все пределы предполагаются существующими (см. также табл. 8.3-1) и $f_{-1} = f_{-2} = \ldots = g_{-1} = g_{-2} = \ldots = 0$.

Номер теоремы	Операция	Последовательность (оригинал)	z-преобразование (изображение)
1	**Линейность** (α, β — постоянные)	$\alpha f_k + \beta g_k$	$\alpha F_Z(z) + \beta G_Z(z)$
2	**Опережение** (см. п. 20.4-2)	$f_{k+1} \equiv \mathrm{E} f_k$, $f_{k+r} \equiv \mathrm{E}^r f_k$ $(r = 1, 2, \ldots)$	$z F_Z(z) - f_0 z$, $z^r F_Z(z) - \sum_{i=0}^{r-1} f_i z^{r-i}$
3	**Запаздывание**	$f_{k-r} \equiv \mathrm{E}^{-r} f_k$ $(r = 1, 2, \ldots)$	$z^{-r} F_Z(z)$
	Конечные разности (см. п. 20.4-1)		
4a	Нисходящие (правые) разности	$f_{k+1} - f_k \equiv \Delta f_k$,	$(z-1) F_Z(z) - f_0 z$,
4b	Восходящие разности	$f_k - f_{k-1} \equiv \nabla f_k$	$\frac{z-1}{z} F_Z(z)$
5	**Суммирование последовательности**	$\sum_{i=0}^{k} f_i$	$\frac{z}{z-1} F_Z(z)$
6	**Свертка последовательностей**	$\sum_{i=0}^{\infty} f_i g_{k-i}$	$F_Z(z) G_Z(z)$
7	**Непрерывность** (α не зависит от k и z)	$\lim_{\alpha \to a} f_k(\alpha)$	$\lim_{\alpha \to a} F_Z(z, \alpha)$
8	**Дифференцирование и интегрирование по параметру α, не зависящему от k и z**	$\frac{\partial}{\partial \alpha} f_k(\alpha)$, $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f_k(\alpha)\, d\alpha$	$\frac{\partial}{\partial \alpha} F_Z(z, \alpha)$, $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F_Z(z, \alpha)\, d\alpha$
9	**Предельные теоремы**	f_0, $\lim_{k \to \infty} f_k$	$\lim_{z \to \infty} F_Z(z)$, $\lim_{z \to 1} (z-1) F_Z(z)$
10	**Дифференцирование изображения**	$k f_k$, $k^r f_k$ $(r = 1, 2, \ldots)$	$-z \frac{d}{dz} F_Z(z)$, $-z \frac{d}{dz} Z\left[k^{r-1} f_k;\ z\right]$

ГЛАВА 9
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

9.1. ВВЕДЕНИЕ

9.1-1. Вводные замечания. Дифференциальные уравнения позволяют выразить соотношения между изменениями физических величин, и потому они имеют большое значение в приложениях. В §§ 9.1, 9.2 и 9.3 дано классическое введение в теорию. В § 9.4 рассматриваются линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, причем упор делается на решение их методом преобразования Лапласа. В § 9.5 речь идет о нелинейных уравнениях второго порядка. В § 9.6 приведены дифференциальные уравнения Пфаффа, хотя они и не являются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Некоторые вопросы, относящиеся к дифференциальным уравнениям, рассматриваются в других главах: преобразование Лапласа — в гл. 8, краевые задачи и задачи о собственных значениях — в гл. 15, дифференциальные уравнения, определяющие специальные функции, — в гл. 21.

Применяемые далее обозначения выбраны так, чтобы облегчить ссылки на общие учебники. Поэтому действительные переменные обозначаются через x, $y=y(x)$; комплексные переменные, встречающиеся в общей теории линейных дифференциальных уравнений, обозначаются через z, $w=w(z)$. Независимое переменное в §§ 9.4 и 9.5, обычно представляющее время, обозначено через t.

9.1-2. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Обыкновенным дифференциальным уравнением порядка r называется уравнение

$$F[x,\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(r)}(x)]=0, \tag{9.1-1}$$

которое связывает независимое переменное x, искомую функцию $y=y(x)$ и ее производные $y'(x)$, ..., $y^{(r)}(x)$. **Решение (интегрирование)** дифференциального уравнения (1) заключается в отыскании функций **(решений, интегралов)** $y(x)$, которые удовлетворяют этому уравнению для всех значений x в определенном конечном или бесконечном интервале $(a,\ b)$. Заметим, что *решения могут быть проверены подстановкой в уравнение.*

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения порядка r имеет вид

$$y=y(x;\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_r), \tag{9.1-2}$$

где C_1, C_2, ..., C_r — *произвольные постоянные* **(постоянные интегрирования,** см. также п. 4.6-4). Каждый частный выбор этих постоянных дает **частное решение. В задаче Коши (начальной задаче)** требуется найти частное решение, удовлетворяющее r **начальным условиям**

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(r-1)}(x_0)=y_0^{(r-1)}, \tag{9.1-3}$$

по которым определяются r постоянных C_1, C_2, ..., C_r. **В краевой задаче** на $y(x)$ и ее производные накладываются r **краевых условий** в точках $x=a$ и $x=b$ (см. также п. 9.3-4) [1]).

---

[1]) Строго говоря, начальные и краевые условия относятся к односторонним производным (п. 4.5-1).

График каждого частного решения называется **интегральной кривой**; совокупность всех таких графиков образует r-параметрическое *семейство интегральных кривых.*

Обратно, если дано r-параметрическое семейство достаточное число раз дифференцируемых функций (2), то, исключая постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_r$ из $r+1$ уравнений

$$y^{(j)} = y^{(j)}(x;\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_r) \qquad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

получим дифференциальное уравнение r-го порядка, описывающее это семейство.

Некоторые дифференциальные уравнения имеют еще дополнительные решения — **особые интегралы**, которые не включаются в общее решение (2) (см. также п. 9.2-2,b).

9.1-3. Системы дифференциальных уравнений (см. также пп. 13.6-1—13.6-7). Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots;\ y_1',\ y_2',\ \ldots) = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{9.1-4}$$

связывает одно независимое переменное x и несколько искомых функций $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ... и их производных. **Порядком** r_i каждого уравнения (4) называется наивысший порядок входящей в него производной. Вообще говоря, требуется n уравнений (4) для отыскания n искомых функций $y_k(x)$; общее решение

$$y_1 = y_1(x), \qquad y_2 = y_2(x),\ \ldots$$

должно содержать $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$ произвольных постоянных.

Интегрирование системы (4) часто можно свести к интегрированию одного обыкновенного дифференциального уравнения порядка r путем исключения $n-1$ переменных y_k и их производных. Гораздо важнее, что *каждую систему* (4) *можно свести к равносильной ей системе r уравнений первого порядка* путем замены высших производных вспомогательными неизвестными функциями.

9.1-4. Существование решений. Для корректности постановки начальной или краевой задачи требуется **доказательство существования** решения, указывающее иногда и путь его построения. Существование физического явления, описываемого данным дифференциальным уравнением, может лишь подсказать, но *не* доказать существование решения; доказательство существования проверяет *состоятельность математической модели* (см. также пп. 4.2-1,b и 12.1-1; примеры теорем существования см. в пп. 9.2-1 и 9.3-5).

Правильно построенная математическая модель должна допускать решения в виде непрерывных функций от параметров, начальных значений и т. п.

9.1-5. Общие указания.

(a) Подстановка ряда Тейлора (п. 4.10-4) или других рядов для $y(x)$ в данное дифференциальное уравнение может дать уравнения для неизвестных коэффициентов (см. также пп. 9.2-5,b и 9.3-5). Некоторые дифференциальные уравнения могут быть упрощены заменой переменных (пп. 9.1-5,b, 9.2-3, 9.3-8,c). Каждое дифференциальное уравнение или система таких уравнений могут быть сведены к системе уравнений первого порядка, к которым применимы методы п. 9.2-5.

(b) *Следующие типы неполных дифференциальных уравнений легко сводятся к уравнениям низших порядков* (см. также пп. 9.2-3, 9.5-6):

$$F(x,\ y^{(n)},\ y^{(n+1)},\ \ldots,\ y^{(n+m)}) = 0 \quad (\text{подстановка } \bar{y} = y^{(n)}),$$

$$F(y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(r)}) = 0$$

$$\left(\text{подстановка } \bar{x} = y,\ \bar{y} = y';\ \text{тогда } y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}\bar{y} \text{ и т. д.}\right).$$

Если дифференциальное уравнение $F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(r)}) = 0$ *однородно по аргументам* $y,\ y',\ \ldots,\ y^{(r)}$ в смысле п. 4.5-5, то вводят $\bar{y} = y'/y$.

9.2. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

9.2-1. Существование и единственность решений.

(a) *Дифференциальное уравнение первого порядка вида*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y) \tag{9.2-1}$$

имеет решение $y=y(x)$, *удовлетворяющее условию* $y(x_0)=y_0$, *если* $f(x, y)$ *непрерывна в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0). Более определенно, *если* $f(x, y)$ *непрерывна в открытой области* D *и удовлетворяет в этой области условию Липшица*

$$|f(x, y)-f(x, \eta)| \leqslant M\,|y-\eta|, \tag{9.2-2}$$

где M — *некоторая положительная постоянная, то дифференциальное уравнение* (1) *при любом начальном условии* $y(x_0)=y_0$, *где точка* (x_0, y_0) *принадлежит области* D, *имеет единственное решение* $y=y(x)$. Каждое решение может быть продолжено до границы области D.

Геометрическая формулировка теоремы такова: *через каждую точку области* D *проходит единственная интегральная кривая.*

Условие Липшица (2) удовлетворяется, в частности, если $f(x, y)$ имеет в D ограниченную производную $\partial f/\partial y$.

(b) (см. также п. 9.1-3). Аналогичная теорема существования справедлива и для *систем дифференциальных уравнений первого порядка в нормальном виде*:

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x;\, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{9.2-3}$$

если условие Липшица (2) заменить на

$$|f_i(x;\, y_1, \ldots, y_n)-f_i(x;\, \eta_1, \ldots, \eta_n)| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} |y_k-\eta_k|. \tag{9.2-4}$$

Условие (4) соблюдается, в частности, если все $\partial f_i/\partial y_j$ ограничены.

9.2-2. Геометрическое толкование. Особые интегралы (см. также пп. с 17.1-1 по 17.1-7).

(a) Если x, y — декартовы прямоугольные координаты точки, то дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, y, p)=0 \qquad \left(p\equiv\frac{dy}{dx}\right) \tag{9.2-5}$$

описывает **поле направлений или поле линейных элементов** (x, y, p), проходящих через точку (x, y) с угловым коэффициентом $p=dy/dx=f(x, y)$. Каждый линейный элемент касателен к некоторой *интегральной кривой* однопараметрического семейства решений

$$y=y(x, \lambda) \quad \text{или} \quad \varphi(x, y, \lambda)=0. \tag{9.2-6}$$

Поле направлений позволяет приближенно графически построить интегральные кривые; общий характер семейства интегральных кривых может быть исследован методом п. 9.5-2. При построении интегральных кривых могут оказаться полезными **изоклины** $F(x, y, p_1)=0$ или $f(x, y)=p_1$, на которых интегральные кривые имеют фиксированный угловой коэффициент p_1. Кривая $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}f=0$ дает *геометрическое место точек возможного перегиба.*

(b) Особые интегралы (см. также п. 9.1-2). Пусть $F(x, y, p)$ непрерывно дифференцируема. Исключение p из уравнений

$$F(x, y, p)=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial p}=0 \tag{9.2-7}$$

дает **дискриминантную кривую** данного дифференциального уравнения (геометрическое место особых линейных элементов). Кривая, определяемая уравнениями (7), есть особая интегральная кривая, если на этой кривой $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}p=0$, причем обе производные $\partial F/\partial x$ и $\partial F/\partial y$ не обращаются в нуль одновременно. *Огибающая семейства интегральных кривых* (6) всегда является особой интегральной кривой; она может быть найдена по общему интегралу методом п. 17.1-7.

9.2-3. *Преобразование переменных (примеры см. в п. 9.2-4).

(a) Замена переменных (**точечное преобразование**)

$$\left.\begin{aligned} &x=X(\bar{x},\ \bar{y}),\qquad y=Y(\bar{x},\ \bar{y})\ \left[\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(\bar{x},\ \bar{y})}\neq 0\right],\\ &p\equiv\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{\partial Y}{\partial\bar{x}}+\dfrac{\partial Y}{\partial\bar{y}}\bar{p}}{\dfrac{\partial X}{\partial\bar{x}}+\dfrac{\partial X}{\partial\bar{y}}\bar{p}}\qquad\left(\bar{p}\equiv\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}\right)\end{aligned}\right\}\tag{9.2-8}$$

преобразует данное уравнение (1) или (5) в новое дифференциальное уравнение относительно $\bar{x}$ и $\bar{y}$, которое может оказаться проще исходного. Найдя решение $\bar{y}=\bar{y}(\bar{x})$, мы получаем искомое решение в параметрическом виде: $x=X(\bar{x},\ \bar{y}(\bar{x}))$, $y=Y(\bar{x},\ \bar{y}(\bar{x}))$. Если решение преобразованного уравнения получено в неявном виде $u(\bar{x},\ \bar{y})=0$, то искомая связь между y и x может быть найдена исключением $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из трех уравнений:

$$x=X(\bar{x},\ \bar{y}),\quad y=Y(\bar{x},\ \bar{y})\ \text{и}\ u(\bar{x},\ \bar{y})=0.$$

(b) Контактные преобразования (см. также пп. 10.2-5, 10.2-6 и 11.6-8). Замена переменных

$$\bar{x}=\bar{x}(x,\ y,\ p),\qquad \bar{y}=\bar{y}(x,\ y,\ p)\qquad \left(p=\frac{dy}{dx}\right)\tag{9.2-9a}$$

при условии

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial p}\left(\frac{\partial\bar{y}}{\partial x}+p\frac{\partial\bar{y}}{\partial y}\right)=\frac{\partial\bar{y}}{\partial p}\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}+p\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}\right)\tag{9.2-9b}$$

определяет **контактное преобразование**, сопоставляющее линейные элементы $x,\ y,\ p$ и

$$\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{p}=\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=\frac{\dfrac{\partial\bar{y}}{\partial x}+\dfrac{\partial\bar{y}}{\partial y}p}{\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial x}+\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial y}p}=\frac{\dfrac{d\bar{y}}{dp}}{\dfrac{d\bar{x}}{dp}}$$

таким образом, что линейные элементы, образующие гладкую дугу, отображаются на гладкую дугу и касание дуг сохраняется.

Контактное преобразование может быть задано формулами

$$\bar{x}=\bar{x}\ x,\ y,\ p),\qquad \bar{y}=\bar{y}(x,\ y,\ p),\qquad \bar{p}=\bar{p}(x,\ y,\ p)\ \left[\frac{\partial(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{p})}{\partial(x,\ y,\ p)}\neq 0\right],\tag{9.2-9c}$$

при условии

$$d\bar{y}-\bar{p}\,d\bar{x}\equiv g(x,\ y,\ p)(dy-p\,dx)\qquad [g(x,\ y,\ p)\neq 0].\tag{9.2-9d}$$

При этом формулы $p=dy/dx$ и $\bar{p}=d\bar{y}/d\bar{x}$ эквивалентны.

В частности, $g(x,\ y,\ p)\equiv -1$ дает легко обратимое контактное *преобразование Лежандра*

$$\bar{x}=p,\qquad \bar{y}=px-y,\qquad \bar{p}=x,\tag{9.2-10}$$

которое преобразует данное дифференциальное уравнение (5) в

$$F(\bar{p},\ \bar{p}\bar{x}-\bar{y},\ \bar{x})=0.\tag{9.2-11}$$

Уравнение (11) может оказаться более простым, чем исходное. Если его решение будет найдено, то решение исходного уравнения получится обращением формул (10).

9.2-4. Решение специальных типов уравнений первого порядка.

(a) Следующие уравнения интегрируются в квадратурах:

1. **Уравнение с разделяющимися переменными** $y'=f_1(x)/f_2(y)$. Общий интеграл $\int f_2(y)\,dy=\int f_1(x)\,dx+C$.

2. **«Однородное» уравнение первого порядка:** $y'=f(y/x)$. Замена $\bar{y}=y/x$ приводит уравнение к типу 1: $\bar{y}'=\dfrac{f(\bar{y})-\bar{y}}{x}$.

3. Уравнение в полных дифференциалах есть уравнение вида

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{9.2-12}$$

где левая часть представляет собой полный дифференциал $d\varphi$; это значит, что выполнено условие $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ (п. 5.7-1). Общий интеграл

$$\varphi(x, y) \equiv \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy = C. \tag{9.2-13}$$

Если левая часть уравнения (12) не является полным дифференциалом $\left(\frac{\partial P}{\partial y} \not\equiv \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$, то можно найти **интегрирующий множитель** $\mu = \mu(x, y)$ такой, что произведение $\mu(P\,dx + Q\,dy)$ будет полным дифференциалом. Интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}. \tag{9.2-14}$$

4. Линейное уравнение первого порядка $y' + a(x)\,y = f(x)$ (см. также пп. 9.3-1 и 9.3-3) допускает интегрирующий множитель

$$\mu = \mu(x) = e^{\int a(x)\,dx}.$$

Общее решение

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int f(x)\,\mu(x)\,dx + C\right]. \tag{9.2-15}$$

Некоторые уравнения первого порядка можно привести к одному из указанных типов заменой переменных (п. 9.2-3). В частности, уравнение $y' = f(\alpha x + \beta y)$ приводится к типу 1 заменой $\bar{y} = \alpha x + \beta y$. Уравнение $y' = f\left(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}\right)$ при $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$ приводится к типу 2 заменой $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$ (параллельный перенос осей координат), где x_0, y_0 — точка пересечения прямых $\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$ и $\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$. Если же $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$, то это уравнение приводится к типу 1 заменой $\bar{y} = \alpha_1 x + \beta_1 y$.

Уравнение $y' = f_1(x)\,y + f_2(x)\,y^n$ (*уравнение Бернулли*) приводится к типу 4 заменой $\bar{y} = y^{1-n}$ $(n \neq 1)$.

(b) ⚹ Если уравнение первого порядка дано в виде

$$y = h(x, y'), \tag{9.2-16}$$

то иногда оказывается удобным продифференцировать обе его части по x и получить дифференциальное уравнение относительно $y'(x)$:

$$y' = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}. \tag{9.2-17}$$

Если последнее уравнение удается решить и найти $y' = y'(x)$, то подстановка этого результата в данное уравнение (16) позволяет найти искомую функцию $y(x)$. Если решение уравнения (17) получается в виде $u(x, y') = 0$, то соотношение между x и y дается в параметрической форме через параметр $p = y'$:

$$u(x, p) = 0, \quad y = h(x, p).$$

Аналогично уравнение $x = h(y, y')$ дифференцированием по y приводится к уравнению $\frac{1}{y'} = \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y'}\frac{dy'}{dy}$ с независимой переменной y и искомой функцией $y'(y)$.

Примеры. *Дифференциальное уравнение Клеро* $y = y'x + f(y')$ имеет общее решение $y = Cx + f(C)$ и особый интеграл (в параметрической форме) $x = -f'(p)$, $y = -pf'(p) + f(p)$.

Дифференциальное уравнение Лагранжа $y = xf(y') + g(y')$ приводится к уравнению $y' = f(y') + [xf'(y') + g'(y')]\frac{dy'}{dx}$; записав последнее в виде $[f(y') - y']\frac{dx}{dy'} + f'(y')\,x + g'(y') = 0$, получаем линейное дифференциальное уравнение относительно $x(y')$.

(c) **Уравнение Риккати**. *Общее уравнение Риккати*

$$y' = a(x)\,y^2 + b(x)\,y + c(x) \tag{9.2-18}$$

иногда упрощается подстановкой $y = 1/\bar{y}$. Замена

$$x = \bar{x}, \quad y = -\frac{\bar{y}'}{a(x)\,\bar{y}}$$

приводит к однородному линейному уравнению второго порядка относительно $\bar{y} = \bar{y}(x)$:

$$\bar{y}'' - \left[\frac{a'(x)}{a(x)} + b(x)\right]\bar{y}' + a(x)\,c(x)\,\bar{y} = 0. \tag{9.2-19}$$

Если известно одно частное решение $y_1(x)$ уравнения (18), то подстановка

$$y = y_1(x) + \frac{1}{\bar{y}}$$

приводит к линейному дифференциальному уравнению. Если известны два частных решения y_1, y_2 или три частных решения y_1, y_2, y_3, то имеем соответственно

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{1 + C\exp\int a(x)\,(y_2 - y_1)\,dx}, \quad y = \frac{y_1(y_2 - y_3) + Cy_2(y_1 - y_3)}{(y_2 - y_3) + C(y_1 - y_3)}. \tag{9.2-20}$$

Для любых четырех частных решений y_1, y_2, y_3, y_4 двойное (ангармоническое) отношение $\frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} : \frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_3}$ постоянно.

Специальное уравнение Риккати

$$y' + ay^2 = bx^m \tag{9.2-21}$$

при $m = 0$ относится к типу 1, а при $m = \frac{4k}{1-2k}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ приводится к этому типу путем k-кратного повторения одной из указанных ниже подстановок. При $k > 0$ подстановка

$$x = \bar{x}^{\frac{1}{m+3}}, \quad y = \frac{1}{x^2\bar{y}} + \frac{1}{ax}$$

дает

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} + \bar{a}\,\bar{y}^2 = \bar{b}\,\bar{x}^{\bar{m}}, \tag{9.2-22a}$$

где

$$\bar{a} = \frac{b}{m+3}; \quad \bar{b} = \frac{a}{m+3}; \quad \bar{m} = -\frac{m+4}{m+3}. \tag{9.2.22b}$$

При $k < 0$ подстановка

$$x = \bar{x}^{-\frac{1}{m+1}}, \quad y = \frac{b}{\bar{x}\,(b\,\bar{x}\,\bar{y} + m + 1)}$$

дает уравнение (22a) с

$$\bar{a} = -\frac{b}{m+1}, \quad \bar{b} = -\frac{a}{m+1}, \quad \bar{m} = -\frac{3m+4}{m+1}. \tag{9.2-22c}$$

⚹ Наконец, при $m = -2$ уравнение (21) приводится к типу 2 подстановкой $y = 1/\bar{y}$. Многочисленные примеры специальных типов дифференциальных уравнений приведены в [9.4]. ⚹

9.2-5. Общие методы интегрирования.

(а) Метод последовательных приближений Пикара. Для интегрирования дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ при данном начальном условии $y(x_0) = y_0$ выбирают некоторую начальную функцию $y^{[0]}(x)$ и вычисляют последовательные приближения искомого решения:

$$y^{[j+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left[x, y^{[j]}(x)\right]dx \quad (j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{9.2-23}$$

Этот процесс сходится при выполнении условий п. 9.2-1. Метод Пикара особенно удобен, если интегралы в формуле (23) могут быть вычислены в замкнутой форме, хотя в принципе можно применять и численное интегрирование.

Вполне аналогичный метод применяется к системам (3) дифференциальных уравнений первого порядка.

(b) Разложение решения в ряд Тейлора (см. также п. 4.10-4). Если данная функция $f(x, y)$ дифференцируема достаточное число раз, то коэффициенты $y^{(m)}(x_0)/m!$ ряда Тейлора

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} y''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots \tag{9.2-24}$$

можно получить последовательным дифференцированием данного дифференциального уравнения:

$$y'(x) = f(x, y),$$
$$y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и последующей подстановкой $x = x_0$, $y = y(x_0) = y_0$.

Аналогичный метод применяется к системам дифференциальных уравнений первого порядка.

9.3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

9.3-1 Линейные дифференциальные уравнения. Принцип наложения (см. также пп. 10.4-2, 14.3-1 и 15.4-2). Обыкновенное **линейное** дифференциальное уравнение порядка r, связывающее действительные или комплексные переменные z и $w = w(z)$, имеет вид

$$\mathsf{L}w \equiv a_0(z) \frac{d^r w}{dz^r} + a_1(z) \frac{d^{r-1} w}{dz^{r-1}} + \ldots + a_r(z) w = f(z). \tag{9.3-1}$$

Общее решение уравнения (1) *есть сумма какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного линейного дифференциального уравнения*

$$\mathsf{L}w \equiv a_0(z) \frac{d^r w}{dz^r} + a_1(z) \frac{d^{r-1} w}{dz^{r-1}} + \ldots + a_r(z) w = 0. \tag{9.3-2}$$

По отношению к неоднородному уравнению (1) уравнение (2) называется **приведенным**.

Если $w_1(z)$ *и* $w_2(z)$ *— частные решения линейного дифференциального уравнения* (1) *для правых частей* $f(z) \equiv f_1(z)$ *и* $f(z) \equiv f_2(z)$ *соответственно, то* $\alpha w_1(z) + \beta w_2(z)$ *будет частным решением уравнения* (1) *для правой части* $f(z) \equiv \alpha f_1(z) + \beta f_2(z)$ (*принцип наложения, суперпозиции*). В частности, *каждая линейная комбинация решений однородного линейного дифференциального уравнения* (2) *также является его решением.*

✶ Очевидное решение $w \equiv 0$ уравнения (2) называется *нулевым* или *тривиальным*.

В дальнейшем предполагается, что все функции $a_0(z)$, $a_1(z)$, ..., $a_r(z)$ и $f(z)$ непрерывны в некоторой области D изменения независимого переменного, причем в точках этой области коэффициент $a_0(z)$ не равен нулю. Точки, в которых $a_0(z) = 0$, являются **особыми** для уравнения (1). ✶

9.3-2. Линейная независимость и фундаментальные системы решений (см. также пп. 1.9-3, 14.2-3 и 15.2-1).

(a) Пусть $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_r(z)$ суть $r - 1$ раз непрерывно дифференцируемые решения линейного однородного дифференциального уравнения (2). r решений $w_k(z)$ называются *линейно независимыми* в D, если $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k w_k(z) \equiv 0$

в D только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$ (п. 1.9-3). *Это имеет место тогда и только тогда, когда* **определитель Вронского (вронскиан)**

$$W[w_1, w_2, \ldots, w_r] \equiv \begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z) & \ldots & w_r(z) \\ w'_1(z) & w'_2(z) & \ldots & w'_r(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_1^{(r-1)} & w_2^{(r-1)}(z) & \ldots & w_r^{(r-1)}(z) \end{vmatrix} \qquad (9.3\text{-}3)$$

отличен от нуля всюду в D. Равенство $W = 0$ в какой-либо точке z из D влечет за собой тождество $W \equiv 0$ для всех z из D [1]).

(b) *Однородное линейное дифференциальное уравнение* (2) *порядка r имеет не больше r линейно независимых решений.* Любые r линейно независимых решений $w_1(z)$, $w_2(z), \ldots, w_r(z)$ составляют **фундаментальную систему** решений, линейные комбинации которых $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k w_k(z)$ дают все частные решения уравнения (2).

(c) ✱ Использование известных частных решений для понижения порядка. Если известно одно нетривиальное решение w_1 однородного уравнения (2), то преобразование $w = w_1 \int v\,dz$ приводит это уравнение к однородному линейному дифференциальному уравнению порядка $r-1$, т. е. понижает его порядок на единицу. Указанное преобразование эквивалентно двум последовательным преобразованиям $w = w_1 u$ и $u' = v$.

Если известно m линейно независимых решений $w_1, w_2, \ldots, w_m$ уравнения (2), то можно понизить его порядок до $r-m$ последовательным применением следующего процесса. Преобразование $w = w_m \int v\,dz$ приводит к уравнению порядка $r-1$ с известными линейно независимыми решениями

$$v_1 = \left(\frac{w_1}{w_m}\right)', \quad v_2 = \left(\frac{w_2}{w_m}\right)', \ldots, \quad v_{m-1} = \left(\frac{w_{m-1}}{w_m}\right)'.$$

Повторяя этот процесс m раз, придем к линейному однородному уравнению порядка $r-m$. ✱

9.3-3. Решение методом вариации постоянных. Функции Грина.

(а) Если функции $w_1(z), w_2(z), \ldots, w_r(z)$ представляют r линейно независимых решений однородного линейного дифференциального уравнения (2), то общее решение неоднородного уравнения (1) есть

$$w = C_1(z)\,w_1(z) + C_2(z)\,w_2(z) + \ldots + C_r(z)\,w_r(z), \qquad (9.3\text{-}4)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{r} C'_k(z)\,w_k^{(j)}(z) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, r-2), \\ &\sum_{k=1}^{r} C'_k(z)\,w_k^{(r-1)}(z) = \frac{f(z)}{a_0(z)}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.3\text{-}5)$$

Решив систему r уравнений (5) относительно неизвестных производных $C'_k(z)$, простым интегрированием находим затем

$$C_k(z) = \int C'_k(z)\,dz + K_k.$$

В принципе *этот метод сводит решение любого линейного дифференциального уравнения к решению однородного линейного дифференциального уравнения.*

---

[1]) Заметим, что эта теорема *неприменима* к любому множеству $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $w_k(z)$; они должны быть решениями подходящего дифференциального уравнения (2), коэффициенты которого удовлетворяют условиям, сформулированным в п. 9.3-1.

(b) В случае действительных переменных $z \equiv x$ и $w \equiv w(x)$ частное решение неоднородного уравнения (1) часто бывает удобнее представить в виде

$$w = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi \qquad (a < x < b), \tag{9.3-6}$$

где $G(x, \xi)$ есть **функция Грина** (п. 9.4-3), дающая «фундаментальное» решение. При этом общее решение уравнения (1) есть

$$w = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + \sum_{k=1}^{r} A_k w_k(x), \tag{9.3-7}$$

где $w_k(x)$ — линейно независимые решения уравнения (2), а A_k — произвольные постоянные, определяемые по начальным или краевым условиям.

Функцию Грина $G(x, \xi)$ можно выразить через любые r линейно независимых решений $w_k(x)$ однородного уравнения (2):

$$G(x, \xi) = \frac{1}{f(\xi)} \sum_{k=1}^{r} C'_k(\xi)\, w_k(x)\, U(x - \xi), \tag{9.3-8}$$

где $C'_k(x)$ получаются из уравнений (5), а $U(t)$ — единичная функция, определенная в п. 21.9-1 $\left(U(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & \text{если } t > 0. \end{cases}\right)$

Для линейных дифференциальных уравнений порядка $r = 2$ общее решение дается формулой (4) *или* (7), *где*

$$\left.\begin{aligned} C'_1(x) &= -\frac{f(x)}{a_0(x)} \frac{w_2(x)}{w_1(x) w'_2(x) - w_2(x) w'_1(x)}, \\ C'_2(x) &= \frac{f(x)}{a_0(x)} \frac{w_1(x)}{w_1(x) w'_2(x) - w_2(x) w'_1(x)}, \\ G(x, \xi) &= -\frac{1}{a_0(\xi)} \frac{w_1(x) w_2(\xi) - w_2(x) w_1(\xi)}{w_1(\xi) w'_2(\xi) - w_2(\xi) w'_1(\xi)} U(x - \xi). \end{aligned}\right\} \tag{9.3-9}$$

(c) ✻ В то время как общее решение (7), получающееся с помощью функции Грина (8), есть только другой способ записи формулы (4), *часто оказывается возможным построить функцию Грина $G(x, \xi)$ так, чтобы частное решение* (6) *удовлетворяло определенным начальным или краевым условиям.* Если краевые условия линейны и однородны относительно $w(x)$ и ее производных, то искомая функция Грина $G(x, \xi)$ должна удовлетворять следующим условиям:

1. $G(x, \xi)$ при фиксированном значении ξ является непрерывной функцией от x и удовлетворяет заданным однородным краевым условиям.

2. Производные до r-го порядка включительно от $G(x, \xi)$ по x непрерывны для $x \in [a, b]$, за исключением точки $x = \xi$; в этой точке непрерывны производные до $(r-2)$-го порядка, а $(r-1)$-я производная имеет разрыв первого рода со скачком

$$\left.\frac{\partial^{r-1} G}{\partial x^{r-1}}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^{r-1} G}{\partial x^{r-1}}\right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{a_0(\xi)} \qquad (a < \xi < b). \tag{9.3-10}$$

3. $G(x, \xi)$ как функция от x всюду в $[a, b]$, за исключением точки $x = \xi$, удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{L}\, G(x, \xi) = 0 \qquad (x \neq \xi). \tag{9.3-11}$$

Функцию Грина $G(x, \xi)$ можно определить условием $\mathrm{L}G(x, \xi) = \delta(x - \xi)$, где $\delta(t)$ — функция Дирака, определенная в п. 21.9-2.

Отсюда следует, что

$$\mathsf{L}G(x, \xi) = 0 \quad (x \neq \xi) \quad \text{и} \int_a^b \mathsf{L}G(x, \xi)\, d\xi = 1. \qquad (9.3\text{-}11a)$$

Существование и свойства таких функций Грина рассматриваются с более общей точки зрения в п. 15.5-1; см. также п. 9.4-3. В табл. 9.3-1 приведены функции Грина для некоторых краевых задач.

Таблица 9.3-1

Функции Грина для линейных краевых задач

Каждая приведенная ниже краевая задача имеет решение $w(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$.

Формула (9.3-7) позволяет получить решение при других начальных или краевых условиях (см. также пп. 9.3-3, 9.4-3, 10.4-2, 15.4-8, 15.5-1). Решения для других интервалов (a, b) получаются из табличных с помощью линейного преобразования координат.

№ п/п	Дифференциальное уравнение	Интервал (a, b)	Краевые условия	$G(x, \xi)$ $(x \leqslant \xi)$ $G(\xi, x)$ $(x \geqslant \xi)$
1a	$\frac{d^2w}{dx^2} = f(x)$	$a = 0$ $b = 1$	$w(0) = w(1) = 0$	$-(1 - \xi)x$
1b			$w(0) = 0$ $w'(1) = 0$	$-x$
1c			$w(0) = -w(1)$ $w'(0) = -w'(1)$	$-\frac{1}{2}(x - \xi) - \frac{1}{4}$
1d		$a = -1$ $b = 1$	$w(-1) = w(1) = 0$	$-\frac{1}{2}(x - \xi - x\xi + 1)$
1e			$w(-1) = w(1)$ $w'(-1) = w'(1)$	$-\frac{1}{4}(x - \xi)^2 - \frac{1}{2}(x - \xi) - \frac{1}{6}$ [1])
2	$\frac{d^2w}{dx^2} - w = f(x)$	$a = -\infty$ $b = \infty$	w конечна в $(-\infty, \infty)$	$-\frac{1}{2} e^{x-\xi}$
3a	$\frac{d^2w}{dx^2} + k^2w = f(x)$	$a = 0$ $b = 1$	$w(0) = w(1) = 0$	$-\frac{\sin kx \sin k(1 - \xi)}{k \sin k}$
3b		$a = -1$ $b = 1$	$w(-1) = w(1)$ $w'(-1) = w'(1)$	$\frac{\cos k(x - \xi + 1)}{2k \sin k}$
4a	$\frac{d^2w}{dx^2} - k^2w = f(x)$	$a = 0$ $b = 1$	$w(0 = w(1) = 0$	$-\frac{\operatorname{sh} kx \operatorname{sh} k(1 - \xi)}{k \operatorname{sh} k}$
4b		$a = -1$ $b = 1$	$w(-1) = w(1)$ $w'(-1) = w'(1)$	$-\frac{\operatorname{ch} k(x - \xi + 1)}{2k \operatorname{sh} k}$

[1]) Это есть *обобщенная функция Грина* в смысле п. 15.5-1,b; она *не* удовлетворяет уравнению (9.3-10).

Таблица 9.3-1 (*продолжение*)

№ п/п	Дифференциальное уравнение	Интервал (a, b)	Краевые условия	$G(x, \xi)$ $(x \leq \xi)$ $G(\xi, x)$ $(x \geq \xi)$
5	$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dw}{dx}\right) - \frac{m^2}{x}w = f(x)$ (*неоднородное уравнение Бесселя*)	$a = 0$ $b = 1$	$w(0)$ конечно $w(1) = 0$	$\ln \xi$ $(m = 0)$ $-\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{x}{\xi}\right)^m - (x\xi)^m\right]$ $(m = 1, 2, \ldots)$
6	$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dw}{dx}\right] - \frac{m^2}{1 - x^2}w = f(x)$ (*неоднородное уравнение Лежандра*)	$a = -1$ $b = 1$	$w(-1)$, $w(1)$ конечны	$\frac{1}{2}\ln(1 - x)(1 + \xi) - \ln 2 + \frac{1}{2}$ $(m = 0)$ [1]) $-\frac{1}{2m}\left(\frac{1 + x}{1 - x}\cdot\frac{1 - \xi}{1 + \xi}\right)^{m/2}$ $(m = 1, 2, \ldots)$
7	$\frac{d^4 w}{dx^4} = f(x)$	$a = 0$ $b = 1$	$w(0) = w'(0) = w(1) = w'(1) = 0$	$-\frac{x^2(\xi - 1)^2}{6}(2x\xi + x - 3\xi)$

9.3-4. Приведение двухточечных краевых задач к задачам Коши. Общая теория краевых задач и задач о собственных значениях, включающая и обыкновенные дифференциальные уравнения, рассмотрена в пп. с 15.4-1 по 15.5-2 (см. также п. 9.3-3). В связи с методами численного решения часто бывает полезен следующий прием.

Если дано линейное дифференциальное уравнение r-го порядка $Lw = f(z)$ с r краевыми условиями, наложенными на $w(z)$ и ее производные в двух точках $z = a$, $z = b$, то решение задачи записывается в виде

$$w = w_0(z) + \sum_{k=1}^{r} \alpha_k w_k(z), \tag{9.3-12a}$$

где функции $w_k(z)$ находятся из $(r + 1)$-й *задачи Коши*:

$$\left.\begin{aligned} &Lw_0(z) = f(x) \text{ при } w_0^{(j)}(a) = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, r - 1), \\ &Lw_k(z) = 0 \text{ при } w_k^{(j)}(a) = \begin{cases} 0 & (j \neq k - 1) \\ 1 & (j = k - 1) \end{cases} \;\Bigg|\; \begin{matrix} (j = 0, 1, \ldots, r - 1; \\ k = 1, 2, \ldots, r). \end{matrix} \end{aligned}\right\} \tag{9.3-12b}$$

Подставляя заданные краевые условия в общее решение (12a), получают систему r уравнений с r неизвестными коэффициентами α_k.

Примечание. Если краевая задача *не линейна*, например,

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = f(z, w, w') \quad \text{при} \quad w(a) = w_a, \quad w(b) = w_b, \tag{9.3-13}$$

то часто можно вычислить значения $w(b)$ для двух или трех выбранных значений неизвестного начального условия $w'(a)$ и затем исправить значение $w'(a)$ с помощью интерполяции.

9.3-5. Линейные дифференциальные уравнения в комплексной области. Тейлоровские разложения решения и влияние особенностей.

(а) *Линейное дифференциальное уравнение*

$$\frac{d^r w}{dz^r} + a_1(z)\frac{d^{r-1} w}{dz^{r-1}} + \ldots + a_r(z)\, w = f(z)$$

имеет аналитическое решение $w = w(z)$ *в каждой* **регулярной** *точке* z, *где функции* $a_k(z)$ *и* $f(z)$ *аналитичны. Если эти функции однозначны и если*

область D односвязна и состоит только из регулярных точек, то заданные начальные значения $w(z_0)$, $w'(z_0)$, ..., $w^{(r-1)}(z_0)$ в любой точке $z_0 \in D$ определяют единственное решение $w(z)$ в D.

Чтобы получить это решение в виде ряда Тейлора (см. также п. 4.10-4), надо подставить

$$w(z)=w(z_0)+w'(z_0)(z-z_0)+\frac{1}{2!}w''(z_0)(z-z_0)^2+\ldots \qquad (9.3\text{-}14)$$

и

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{1}{2!}f''(z_0)(z-z_0)^2+\ldots,$$

$$a_k(z)=a_k(z_0)+a_k'(z_0)(z-z_0)+\frac{1}{2!}a_k''(z_0)(z-z_0)^2+\ldots \quad (k=1, \ldots, r)$$

в данное дифференциальное уравнение; сравнение коэффициентов получающихся степенных рядов даст *рекуррентные соотношения* для неизвестных коэффициентов $\frac{1}{k!}w^{(k)}(z_0)$ $(k=r, r+1, \ldots)$. (Значения производных $w^{(k)}(z_0)$ для $k=0, 1, \ldots, r-1$ заданы в виде начальных условий.) Ряды (14) сходятся абсолютно и равномерно в каждом круге $|z-z_0|<R$, лежащем в D.

(b) Аналитическое продолжение любого решения $w(z)$ линейного дифференциального уравнения вокруг особых точек одного или нескольких коэффициентов $a_k(z)$ даст, вообще говоря, различные ветви некоторого многозначного решения (см. также пп. 7.4-2, 7.6-2, 7.8-1).

В частности, полный обход вокруг особой точки преобразует фундаментальную систему решений $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_r(z)$ однородного линейного дифференциального уравнения в новую фундаментальную систему $\overline{w}_1(z)$, $\overline{w}_2(z)$, ..., $\overline{w}_r(z)$. Эти две фундаментальные системы обязательно связаны невырожденным линейным преобразованием

$$\overline{w}_i(z)=\sum_{k=1}^{r} a_{ik}w_k(z) \qquad (i=1,2, \ldots, r).$$

Собственные значения матрицы $[a_{ik}]$ (п. 13.4-2) не зависят от частного выбора фундаментальной системы $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_r(z)$.

9.3-6.* Решение однородных уравнений путем разложения в ряд в окрестности правильной особой точки.

(a) Особая точка $z=z_1$ одного или нескольких коэффициентов $a_k(z)$ называется **изолированной особой точкой** однородного линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^rw}{dz^r}+a_1(z)\frac{d^{r-1}w}{dz^{r-1}}+\ldots+a_r(z)w=0, \qquad (9.3\text{-}15)$$

если в некоторой ее окрестности нет других особых точек. Изолированная особая точка $z=z_1$ называется **правильной** (*слабо особой*), если, все коэффициенты $a_k(z)$ имеют в этой точке полюсы порядка не выше k, т. е. $a_k(z)=\frac{p_k(z)}{(z-z_1)^k}$, где все $p_k(z)$ аналитичны в некоторой окрестности D_1 точки z_1 [1]). В этом случае уравнение (15) можно записать в виде

$$(z-z_1)^r\frac{d^rw}{dz^r}+(z-z_1)^{r-1}p_1(z)\frac{d^{r-1}w}{dz^{r-1}}+\ldots$$
$$\ldots+(z-z_1)p_{r-1}(z)\frac{dw}{dz}+p_r(z)w=0. \qquad (9.3\text{-}16)$$

[1]) Если некоторые $p_k(z)$ имеют нули в точке z_1, то соответствующие коэффициенты $a_k(z)$ будут иметь полюсы порядка меньшего чем k; они могут даже быть регулярными функциями в окрестности точки z_1.

Остальные изолированные особые точки называются **существенно особыми.** *Если $z=z_1$ есть правильная особая точка (или регулярная точка), то однородное линейное дифференциальное уравнение* (15) *допускает решение вида*

$$w=(z-z_1)^{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_1)^k. \tag{9.3-17}$$

Если μ — не целое число, то $(z-z_1)^{\mu}$ означает какую-либо однозначную ветвь многозначной функции, регулярную в комплексной плоскости с разрезом вдоль некоторого луча, выходящего из точки z_1 (см. п. 7.4-2). Показатель μ должен удовлетворять алгебраическому уравнению степени r — *определяющему уравнению*

$$\mu(\mu-1)\ldots(\mu-r+1)+\mu(\mu-1)\ldots(\mu-r+2)p_1(z_1)+\ldots$$
$$\ldots+\mu p_{r-1}(z_1)+p_r(z_1)=0. \tag{9.3-18}$$

Коэффициент $a_0\neq 0$ может быть выбран произвольно, остальные коэффициенты a_k определяются последовательно из рекуррентных соотношений, получающихся при подстановке ряда (17) в уравнение (15) или (16). Ряды в (17) сходятся абсолютно и равномерно в каждом круге $|z-z_1|<R$, лежащем в D_1.

Различные корни $\mu=\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ определяющего уравнения (18) дают линейно независимые решения (17) данного дифференциального уравнения, за исключением тех случаев, когда некоторые из них отличаются на целое число. В таких случаях, а также в случае равных корней определяющего уравнения можно использовать известные решения для понижения порядка данного дифференциального уравнения (п. 9.3-2, c) или отыскивать решения по методу Фробениуса (см. также п. 9.3-8, a).

Показатели μ_k связаны с собственными значениями λ_k матрицы преобразования (a_{ik}) п. 9.3-5,b для одного обхода правильной особой точки z_1 соотношением $\lambda_k=e^{2\pi\mu_k i}$.

(b) Правильные особые точки на бесконечности (см. также пп. 7.2-1 и 7.6-3). $z=\infty$ называется *правильной особой точкой* уравнения (15), если преобразование

$$\left.\begin{aligned}&z=\frac{1}{\bar z}, && w(z)=w\left(\frac{1}{\bar z}\right)=\bar w(\bar z),\\ &\frac{dw}{dz}=-\bar z^2\frac{d\bar w}{d\bar z}, && \frac{d^2w}{dz^2}=\bar z^4\frac{d^2\bar w}{d\bar z^2}+2\bar z^3\frac{d\bar w}{d\bar z}, \ldots\end{aligned}\right\} \tag{9.3-19}$$

приводит к дифференциальному уравнению с правильной особой точкой $\bar z=0$. В этом случае решение преобразованного уравнения можно получить, как показано выше.

(c) Обобщение. Если $z=z_1$ не является правильной особой точкой, причем функции $p_k(z)$ имеют полюсы в $z=z_1$, то все же можно искать решение в виде, аналогичном (17), заменяя степенной ряд рядом Лорана (п. 7.5-3) по положительным и отрицательным степеням $(z-z_1)$.

9.3-7. Методы интегральных преобразований. Если в линейном дифференциальном уравнении (1) коэффициентами служат *многочлены* $a_k(z)=\sum_h a_{hk}z^h$, то его интегрирование при начальных условиях $w^{(j)}(0)=w_0^{(j)}$ часто упрощается применением преобразования Лапласа, как в п. 9.4-5. Применяя формулу

$$\mathscr{L}[z^h w^{(k)}(z);\,s]=(-1)^h\frac{d^h}{ds^h}\left\{s^k\mathscr{L}[w(z);\,s]-\sum_{j=0}^{k-1}s^{k-j-1}w^{(j)}(0+0)\right\}, \tag{9.3-20}$$

можно получить новое и, может быть, более простое дифференциальное уравнение для изображения $\mathscr{L}[w(z);\ s]$ решения.

Более общие интегральные преобразования (табл. 8.6-1) могут быть подобным образом применены в различных специальных случаях (см также п. 10.5-1 и [10.4]).

9.3-8. Линейные уравнения второго порядка (см также пп. 15.4-3,c и 15.5-4).

(a) Результаты общей теории применимы, в частности, к линейным уравнениям второго порядка. Главный интерес представляет здесь однородное уравнение

$$\mathrm{L}w \equiv \frac{d^2w}{dz^2} + a_1(z)\frac{dw}{dz} + a_2(z)\,w = 0. \tag{9.3-21}$$

Уравнение (21) равносильно уравнению

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dz}\left[p(z)\frac{dw}{dz}\right] + q(z)\,w = 0,\\ &p(z) = \exp\int a_1(z)\,dz, \qquad q(z) = a_2(z)\,p(z). \end{aligned}\right\} \tag{9.3-22}$$

Если известно одно решение $w_1(z)$ уравнения (21) или (22), то общее решение есть

$$w(z) = w_1(z)\left[C_1 + C_2\int\frac{dz}{w_1^2(z)\,p(z)}\right]. \tag{9.3-23}$$

(b) Разложение решения в ряд (см. также пп. 9.3-5, 9.3-6, 9.3-9 и 9.3-10). В важном частном случае уравнения второго порядка, представимого в виде

$$(z-z_1)^2\frac{d^2w}{dz^2} + (z-z_1)\,p_1(z)\frac{dw}{dz} + p_2(z)\,w = 0, \tag{9.3-24}$$

где $p_1(z)$ и $p_2(z)$ аналитичны в $z = z_1$, определяющее уравнение (18) сводится к

$$\mu^2 + \mu\,[p_1(z_1) - 1] + p_2(z_1) = 0. \tag{9.3-25}$$

Это уравнение имеет два корня. Корень $\mu = \mu_1$ с большей действительной частью приводит к решению вида

$$w = w_1(z) \equiv (z-z_1)^{\mu_1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_1)^k. \tag{9.3-26}$$

Второй корень μ_2 приводит к линейно независимому от $w_1(z)$ решению подобного вида, если μ_2 не совпадает с μ_1 или не отличается от него на целое число. В противном случае линейно независимое от $w_1(z)$ решение может быть записано в виде

$$w = A\,w_1(z)\ln(z-z_1) + (z-z_1)^{\mu_2}\sum_{k=0}^{\infty} b_k\,(z-z_1)^k. \tag{9.3-27}$$

Подставляя каждое из решений (26) или (27) в данное дифференциальное уравнение (24), получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов.

(c) Преобразование переменных. Следующие преобразования могут иногда упростить данное дифференциальное уравнение (21) или привести его к дифференциальному уравнению с известным решением.

1. Подстановка $w = \bar{w}\exp\int\varphi(z)\,dz$ дает

$$\frac{d^2\bar{w}}{dz^2} + [a_1(z) + 2\varphi(z)]\frac{d\bar{w}}{dz} + [a_2(z) + a_1(z)\,\varphi(z) + \varphi'(z) + \varphi^2(z)]\,\bar{w} = 0. \tag{9.3-28}$$

Надо попробовать выбрать $\varphi(z)$ так, чтобы получить более простое новое дифференциальное уравнение; в частности, *выбор* $\varphi(z) =$

$=-\frac{1}{2}a_1(z)$ *исключает коэффициент при* $\frac{d\bar{w}}{dz}$. Подходящая подстановка $z=z(\bar{z})$ также может дать некоторое упрощение дифференциального уравнения.

2. Подстановка

$$w=Ae^{\int \bar{w}(z)\,dz};\qquad \bar{w}=\frac{w'}{w} \tag{9.3-29}$$

преобразует уравнение (21) в дифференциальное уравнение первого порядка типа Риккати (п. 9.2-4, c).

(d) Существование решения и его нули при действительном аргументе. Пусть x — действительное переменное. *Однородное линейное дифференциальное уравнение*

$$\mathsf{L}w\equiv\frac{d^2w}{dx^2}+a_1(x)\frac{dw}{dx}+a_2(x)\,w=0 \tag{9.3-30}$$

имеет решение $w=w(x)$ *в каждом интервале* $[a,\ b]$, *где* $a_1(x)$ *и* $a_2(x)$ *действительны и непрерывны; решение однозначно определяется начальными значениями* $w(x_0)$, $w'(x_0)$ *для любого значения* $x_0\in[a,\ b]$. $w(x)$ *может иметь лишь конечное число нулей в любом конечном интервале* $[a,\ b]$, *в котором* $w(x)\not\equiv 0$; *нули двух линейно независимых решений перемежаются в* $[a,\ b]$.

9.3-9. Гипергеометрическое дифференциальное уравнение Гаусса и P-уравнение Римана (см. также пп. 9.3-5 и 9.3-6).

(a)* *Гипергеометрическое дифференциальное уравнение*

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{dw}{dz}-abw=0 \tag{9.3-31}$$

имеет правильные особые точки $z=\infty$ (с показателями $\mu=a$, $\mu=b$), $z=1$ (с показателями $\mu=0$, $\mu=c-a-b$) и $z=0$ (с показателями $\mu=0$, $\mu=1-c$) и не имеет других особых точек. Решения уравнения (31) содержат в качестве частных случаев многие элементарные функции и специальные функции, рассмотренные в гл. 21.

Разложение в ряд вблизи $z=z_1=0$ дает **гипергеометрическую функцию** вида (17) при $\mu=0$ и $\mu=1-c$ с

$$a_{k+1}=\frac{(a+\mu+k)(b+\mu+k)}{(c+\mu+k)(1+\mu+k)}a_k.$$

При $\mu=0$ получаем специальную гипергеометрическую функцию — *гипергеометрический ряд*

$$w=F(a,\ b;\ c;\ z)\equiv 1+\frac{ab}{c}z+\frac{1}{2!}\frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)}z^2+\ldots \tag{9.3-32}$$

(c не должно равняться нулю или целому отрицательному числу). Этот ряд сходится абсолютно и равномерно при $|z|<1$; сходимость распространяется и на единичную окружность, если $\operatorname{Re}(a+b-c)<0$[1]). Ряд (9.3-32) сводится к геометрической прогрессии при $a=1$, $b=c$ и к *многочленам Якоби* (п. 21.7-8), если a равно целому отрицательному числу. Ясно, что $F(a,\ b;\ c;\ z)=F(b,\ a;\ c;\ z)$.

Второе (линейно независимое) решение уравнения (31) может быть получено способом, указанным в п. 9.3-3,b; в частности, **гипергеометрическая функция второго рода**

$$\Phi(a,\ b;\ c;\ z)\equiv$$
$$\equiv\frac{\Gamma(a-c+1)\,\Gamma(b-c+1)\,\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(1-c)}z^{1-c}F(a-c+1,\ b-c+1;\ 2-c;\ z) \tag{9.3-33}$$

является решением уравнения, если c отлично от целого числа

---

[1]) При $0\leqslant\operatorname{Re}(a+b-c)<1$ ряд условно сходится во всех точках единичной окружности, кроме точки $z=1$.

Отметим следующие соотношения ($|z|<1$):

$$F(a,b;\ c;\ z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}\int_0^1 \zeta^{a-1}(1-\zeta)^{c-a-1}(1-z\zeta)^{-b}\,d\zeta \quad [\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} a>0], \tag{9.3-34}$$

$$\frac{dF}{dz}=\frac{ab}{c}F(a+1,\ b+1;\ c+1;\ z); \qquad \frac{d\Phi}{dz}=\frac{ab}{c}\Phi(a+1;\ b+1;\ c+1;\ z), \tag{9.3-35}$$

$$F(a,\ b;\ c;\ 1)=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \qquad [\operatorname{Re}(a+b-c)<0], \tag{9.3-36}$$

$$F(a,\ b;\ c;\ z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,\ c-b;\ c;\ z).$$

Приведем некоторые линейные преобразования $F(a,\ b;\ c;\ z)$ (полный перечень таких преобразований приведен в [21.3]):

$$F(a,\ b;\ c;\ z)=(1-z)^{-a}F\left(a,\ c-b;\ c;\ \frac{z}{z-1}\right)=(1-z)^{-b}F\left(b,\ c-a;\ c;\ \frac{z}{z-1}\right). \tag{9.3-37}$$

Формулы (37) позволяют аналитически продолжить $F(a,\ b;\ c;\ z)$ в полуплоскость $\left|\frac{z}{z-1}\right|<1$, т. е. $\operatorname{Re} z<1/2$.

$$F(a,\ b;\ c;\ z)=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}F(a,\ b;\ a+b-c+1;\ 1-z)+$$
$$+(1-z)^{c-a-b}\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}F(c-a,\ c-b;\ c-a-b+1;\ 1-z) \tag{9.3-38}$$
$$[\,|\arg(1-z)|<\pi; \qquad a+b-c\neq 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots].$$

С помощью формулы (38) гипергеометрическую функцию можно продолжить в круг $|z-1|<1$ с разрезом по отрезку [1, 2], а также выявить характер ее особенности в точке $z=1$.

$$F(a,\ b;\ c;\ z)=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}F\left(a,\ 1-c+a;\ 1-b+a;\ \frac{1}{z}\right)+$$
$$+\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}F\left(b,\ 1-c+b;\ 1-a+b;\ \frac{1}{z}\right) \tag{9.3-39}$$
$$[\,|\arg(-z)|<\pi; \qquad a-b\neq 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots].$$

Формула (39) позволяет продолжить $F(a,\ b;\ c;\ z)$ во внешность единичной окружности $|z|>1$ с разрезом по лучу $[1,\ \infty]$.

В табл. 9.3-2 приведены дополнительные формулы.

(b) *P*-уравнение Римана. Уравнение (31) является частным случаем *P*-уравнения Римана

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-z_1}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-z_2}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-z_3}\right)\frac{dw}{dz}+$$
$$+\left[\frac{\alpha\alpha'(z_1-z_2)(z_1-z_3)}{z-z_1}+\frac{\beta\beta'(z_2-z_3)(z_2-z_1)}{z-z_2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma\gamma'(z_3-z_1)(z_3-z_2)}{z-z_3}\right]\frac{w}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}=0, \tag{9.3-40}$$

которое имеет три различные правильные особые точки: $z=z_1$ (с показателями $\alpha,\ \alpha'$), $z=z_2$ (с показателями $\beta,\ \beta'$) и $z=z_3$ (с показателями $\gamma,\ \gamma'$); здесь

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1.$$

Решение уравнения (40) обозначается так:

$$w(z)\equiv P\left\{\begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}.$$

Одним из решений служит функция

$$\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-z_3}{z-z_2}\right)^{\gamma}F\left(\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta'+\gamma;\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(z-z_1)(z_3-z_2)}{(z-z_2)(z_3-z_1)}\right). \tag{9.3-41}$$

Это решение сводится к (32) при $z_1=0,\ z_2=\infty,\ z_3=1$ и

$$\alpha=0,\ \ \beta=a,\ \ \gamma=0;\ \ \ \alpha'=1-c,\ \ \beta'=b,\ \ \gamma'=c-a-b.$$

Таблица 9.3-2

Дополнительные формулы для гипергеометрических функций

1. Формулы приведения Гаусса.

$$c\,F(a,\ b-1;\ c;\ z)-c\,F(a-1,\ b;\ c;\ z)+(a-b\ \ z\,F(a,\ b;\ c+1;\ z)=0$$

$$c\,(a-b)\,F(a,\ b;\ c;\ z)-a\,(c-b)\,F(a+1,\ b;\ c+1;\ z)+ \\ +b\,(c-a)\,F(a,\ b+1;\ c+1;\ z)=0$$

$$c\,(c+1)\,[F(a,\ b;\ c;\ z)-F(a,\ b;\ c+1;\ z)]-abz\,F(a+1,\ b+1;\ c+2;\ z)=0$$

$$c\,F(a,\ b;\ c;\ z)-(c-a)\,F(a,\ b+1;\ c+1;\ z)-a\,(1-z)\,F(a+1,\ b+1;\ c+1;\ z)=0$$

$$c\,F(a,\ b;\ c;\ z)+(b-c)\,F(a+1,\ b;\ c+1;\ z)-b\,(1-z)\,F(a+1,\ b+1;\ c+1;\ z)=0$$

$$c\,(c-bz-a)\,F(a,\ b;\ c;\ z)-c\,(c-a)\,F(a-1,\ b;\ c;\ z)+ \\ +abz\,(1-z)\,F(a+1,\ b+1;\ c+1;\ z)=0$$

$$c\,(c-az-b)\,F(a,\ b;\ c;\ z)-c\,(c-b)\,F(a,\ b-1;\ c;\ z)+ \\ +abz\,(1-z)\,F(a+1,\ b+1;\ c+1;\ z)=0$$

$$c\,F(a,\ b;\ c;\ z)-c\,F(a,\ b+1;\ c;\ z)+az\,F(a+1,\ b+1;\ c+1;\ z)=0$$

$$c\,F(a,\ b;\ c;\ z)-c\,F(a+1,\ b;\ c;\ z)+bz\,F(a+1,\ b+1;\ c+1;\ z)=0$$

$$c\,[a-(c-b)\,z]\,F(a,\ b;\ c;\ z)-ac\,(1-z)\,F(a+1,\ b;\ c;\ z)+ \\ +(c-a)\,(c-b)\,z\,F(a,\ b;\ c+1;\ z)=0$$

$$c\,[b-(c-a)\,z]\,F(a,\ b;\ c;\ z)-bc\,(1-z)\,F(a,\ b+1;\ c;\ z)+ \\ +(c-a)\,(c-b)\,z\,F(a,\ b;\ c+1;\ z)=0$$

$$c\,(c+1)\,[F(a,\ b;\ c;\ z)-F(a,\ b+1;\ c+1;\ z)]+ \\ +a\,(c-b)\,z\,F(a+1,\ b+1;\ c+2;\ z)=0$$

$$c\,(c+1)\,[F(a,\ b;\ c;\ z)-F(a+1,\ b;\ c+1;\ z)]+ \\ +b\,(c-a)\,z\,F(a+1,\ b+1;\ c+2;\ z)=0$$

$$c\,F(a,\ b;\ c;\ z)-(c-b)\,F(a,\ b;\ c+1;\ z)-b\,F(a,\ b+1;\ c+1;\ z)=0$$

$$c\,F(a,\ b;\ c;\ z)-(c-a)\,F(a,\ b;\ c+1;\ z)-a\,F(a+1,\ b;\ c+1;\ z)=0$$

2. Разные формулы.

$$F(a,\ b;\ 2b;\ z)=\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-a}F\left[\frac{a}{2},\ \frac{a+1}{2};\ b+\frac{1}{2};\ \left(\frac{z}{2-z}\right)^{2}\right],$$

$$(1+z)^{2a}F\left(a,\ a+\frac{1}{2}-b;\ b+\frac{1}{2};\ z^{2}\right)=F\left[a,\ b;\ 2b;\ \frac{4z}{(1+z)^{2}}\right],$$

$$(1+z)^{2a}F(2a,\ 2a+1-c;\ c;\ z)=F\left[a,\ a+\frac{1}{2};\ c;\ \frac{4z}{(1+z)^{2}}\right],$$

$$F\left(a,\ b;\ a+b+\frac{1}{2};\ \sin^{2}\vartheta\right)=F\left(2a,\ 2b;\ a+b+\frac{1}{2};\ \sin^{2}\frac{\vartheta}{2}\right).$$

3. Выражение некоторых элементарных функций через гипергеометрические (см. также таблицу 21.7-1).

$$(1+x)^{n}=F(-n,\ 1;\ 1;\ -x),$$

$$\ln(1+x)=x\,F(1,\ 1;\ 2;\ -x),$$

$$\arcsin x=x\,F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ x^{2}\right),$$

$$\operatorname{arctg} x=x\,F\left(\frac{1}{2},\ 1;\ \frac{3}{2};\ -x^{2}\right),$$

Таблица 9.3-2 (*продолжение*)

$$\sin nx = n \sin x\, F\left(\frac{1+n}{2},\ \frac{1-n}{2};\ \frac{3}{2};\ \sin^2 x\right),$$

$$\cos nx = F\left(\frac{n}{2},\ -\frac{n}{2};\ \frac{1}{2};\ \sin^2 x\right) = \cos x\, F\left(\frac{1+n}{2},\ \frac{1-n}{2};\ \frac{1}{2};\ \sin^2 x\right) = \cos^n x\, F\left(-\frac{n}{2};\ \frac{1-n}{2};\ \frac{1}{2};\ -\operatorname{tg}^2 x\right),$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\, F\left(\frac{1}{2},\ 1;\ \frac{3}{2};\ x^2\right),$$

$$e^{-nx} = (2 \operatorname{ch} x)^{-n} \operatorname{th} x\, F\left(1+\frac{n}{2},\ \frac{1+n}{2};\ 1+n;\ \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right),$$

$$\mathrm{K}(k) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ k^2\right), \qquad \mathrm{E}(k) = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ k^2\right).$$

9.3-10. Вырожденные гипергеометрические функции. Особую точку $z=1$ гипергеометрического дифференциального уравнения (31) можно передвинуть в $z=b$ заменой z на z/b; тогда при $b \to \infty$ особая точка $z=b$ будет стремиться к уже имеющейся особой точке $z=\infty$ (*вырождение особой точки*). Это приводит *к дифференциальному уравнению вырожденной гипергеометрической функции* (*Куммера*)

$$z\frac{d^2w}{dz^2} + (c-z)\frac{dw}{dz} - aw = 0, \tag{9.3-42}$$

которое имеет одну правильную особую точку $z=0$ и одну существенно особую точку $z=\infty$. Многие специальные функции являются решением уравнения (42) при частном выборе значений a и c (гл. 21).

Разложение решения в ряд в точке $z=0$ дается формулой (17) при $\mu=0$ и $\mu=1-c$, где

$$a_{k+1} = \frac{a+\mu+k}{(c+\mu+k)(1+\mu+k)}\, a_k.$$

При $\mu=0$ получаем **вырожденную гипергеометрическую функцию Куммера** — *вырожденный гипергеометрический ряд* (см. п. 21.7-5):

$$w = F(a;\ c;\ z) \equiv 1 + \frac{a}{c} z + \frac{1}{2!}\frac{a(a+1)}{c(c+1)} z^2 + \ldots \qquad (|z| < \infty). \tag{9.3-43}$$

Второе (линейно независимое) решение можно получить тем же способом, что и в п. 9.3-8, b; в частности, **вырожденная гипергеометрическая функция второго рода**

$$\Phi(a;\ c;\ z) \equiv \frac{\Gamma(a-c+1)\,\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(1-c)} z^{1-c} F(a-c+1;\ 2-c;\ z) \tag{9.3-44}$$

является решением, если только c — не целое.

Отметим следующие соотношения:

$$F(a;\ c;\ z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 \zeta^{a-1}(1-\zeta)^{c-a-1} e^{z\zeta}\, d\zeta; \qquad \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0; \tag{9.3-45}$$

$$\frac{dF}{dz} = \frac{a}{c} F(a+1;\ c+1;\ z); \qquad \frac{d\Phi}{dz} = \frac{a}{c}\Phi(a+1;\ c+1;\ z); \tag{9.3-46}$$

$$F(a;\ c;\ z) = e^z F(c-a;\ c;\ -z). \tag{9.3-47}$$

В табл. 9.3-3 приведены дополнительные формулы.

Таблица 9.3-3

Дополнительные формулы для вырожденных гипергеометрических функций

$$F(a;\ 2a;\ 2z) = 2^{a-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{2}\left(a-\frac{1}{2}\right)} \Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) e^z z^{\frac{1}{2}-a} J_{a-\frac{1}{2}}\left(z e^{i\frac{\pi}{2}}\right),$$

$$F(a;\ c;\ z) = e^z F(c-a;\ c;\ -z),$$

$$a F\ \ a+1;\ c+1;\ z) = (a-c) F(a;\ c+1;\ z) + c F(a;\ c;\ z),$$

$$a F(a+1;\ c;\ z) = (z+2a-c) F(a;\ c;\ z) + (c-a) F(a-1;\ c;\ z),$$

$$\lim_{c\to -n} \frac{1}{\Gamma(c)} F(a;\ c;\ z) = \frac{z^{n+1} a(a+1)\ldots(a+n-1)}{(n+1)!} F(a+n+1;\ n+2;\ z)$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$F(a;\ c;\ z) = \frac{\Gamma(c)\, 2^{1-c}}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} e^{\frac{z}{2}} \int_{-1}^{1} e^{\frac{zt}{2}} (1-t)^{c-a-1} (1+t)^{a-1}\, dt$$

$$(0 < \operatorname{Re} a < \operatorname{Re} c),$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)}{\Gamma(\alpha+1)} F(-\nu;\ \alpha+1;\ z) = e^z z^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha\left(2\sqrt{zt}\right) dt$$

$$[\operatorname{Re}(\alpha+\nu+1) > 0;\quad |\arg z| < \pi/2].$$

9.3-11. Обобщенные гипергеометрические ряды. Степенные ряды (32) и (43) являются частными случаями рядов

$$ {}_mF_n(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m;\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n;\ z) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \ldots (a_m)_k}{(c_1)_k (c_2)_k \ldots (c_n)_k} z^k \qquad (m,\ n = 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (9.3\text{-}48)$$

где $(x)_k \equiv x(x+1)\ldots(x+k-1)$. *В этих обозначениях гипергеометрические ряды* (32) и (43) *запишутся соответственно как* ${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)$ *и* ${}_1F_1(a;\ c;\ z)$.

9.4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

9.4-1. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами (см. также п. 9.3-1)

(а) *Уравнение первого порядка*

$$a_0 \frac{dy}{dt} + a_1 y = 0 \qquad (a_0 \neq 0) \qquad (9.4\text{-}1)$$

имеет решение

$$y = Ce^{-\frac{a_1}{a_0}t} \qquad [C = y(0)]. \qquad (9.4\text{-}2)$$

При $a_0/a_1 > 0$ (a_0/a_1 называется иногда **постоянной времени)**

$$y(a_0/a_1) = y(0)\, e^{-1} \approx 0{,}37 y(0), \quad y(4a_0/a_1) \approx 0{,}02 y(0).$$

(b) *Уравнение второго порядка*

$$a_0 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = 0 \qquad (a_0 \neq 0) \tag{9.4-3}$$

имеет решение

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}, \\ s_{1,2} &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0} \end{aligned}\right\} \quad (a_1^2 - 4a_0 a_2 \neq 0); \tag{9.4-4a}$$

$$y = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\frac{a_1}{2a_0} t} \qquad (a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0). \tag{9.4-4b}$$

Если a_0, a_1, a_2 действительны, то при $a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$ корни s_1, s_2 будут комплексными; в этом случае формулу (4a) удобнее представить в виде

$$y = e^{\sigma t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = Re^{\sigma t} \sin (\omega t + \alpha), \tag{9.4-4c}$$

где величины

$$\sigma = -\frac{a_1}{2a_0}, \qquad \omega = \frac{\sqrt{4a_0 a_2 - a_1^2}}{2a_0} \tag{9.4-4d}$$

называются соответственно **постоянной затухания** и **собственной круговой частотой.** Постоянные C_1, C_2, A, B, R, α определяются по начальным или краевым условиям (см. также п. 9.4-5, а).

Если a_0, $a_2 > 0$, то величина $\zeta = \frac{a_1}{\sqrt{4a_0 a_2}}$ называется **коэффициентом затухания**; при $\zeta > 1$, $\zeta = 1$, $0 < \zeta < 1$ получаем соответственно *апериодическое затухание* (4a), *критическое затухание* (4b), *затухающие колебания* (4c). В последнем случае **логарифмический декремент** $2\pi\sigma/\omega$ есть натуральный логарифм отношения последовательных максимумов решения $y(t)$.

Уравнение (3) записывают иногда в *безразмерном виде*

$$\frac{1}{\omega_1^2} \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{\zeta}{\omega_1} \frac{dy}{dt} + y = 0$$

с

$$s_{1,2} = -\omega_1 \zeta \pm \omega_1 \sqrt{\zeta^2 - 1};$$

при слабом затухании ($\zeta^2 \ll 1$) имеем $\omega_1 = \sqrt{a_2/a_0} \approx \omega$.

(c) Для интегрирования **уравнения порядка** r

$$Ly \equiv a_0 \frac{d^r y}{dt^r} + a_1 \frac{d^{r-1} y}{dt^{r-1}} + \ldots + a_r y = 0 \qquad (a_0 \neq 0) \tag{9.4-5}$$

надо найти корни **характеристического уравнения** — алгебраического уравнения степени r:

$$a_0 s^r + a_1 s^{r-1} + \ldots + a_{r-1} s + a_r = 0. \tag{9.4-6}$$

Если все корни s_1, s_2, ..., s_r этого уравнения различны, то общее решение дифференциального уравнения (5) есть

$$y = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \ldots + C_r e^{s_r t}. \tag{9.4-7a}$$

Если некоторый корень s_k имеет кратность m_k, то соответствующие члены в (7a) надо заменить на

$$\left(C_k + C_{k1} t + C_{k2} t^2 + \ldots + C_{k\,(m_k - 1)} t^{m_k - 1}\right) e^{s_k t}. \tag{9.4-7b}$$

Различные члены в решении (7) называются **собственными колебаниями.** r постоянных C_k и C_{kj} определяются по начальным или краевым условиям (см. также п. 9.4-5, а).

Если коэффициенты уравнения (5) действительны, то комплексные корни характеристического уравнения встречаются сопряженными парами $\sigma \pm i\omega$. Соответствующие пары членов в решении также будут комплексно сопряжены и могут быть заменены действительными членами:

$$t^m C e^{(\sigma+i\omega)t} + t^m \bar{C} e^{(\sigma-i\omega)t} = t^m e^{\sigma t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = R t^m e^{\sigma t}\sin(\omega t + \alpha), \quad (9.4\text{-}7c)$$

где A и B или R и α — новые (действительные) постоянные интегрирования.

(d) Если дана *система n однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*

$$\varphi_{j1}\left(\frac{d}{dt}\right) y_1 + \varphi_{j2}\left(\frac{d}{dt}\right) y_2 + \ldots + \varphi_{jn}\left(\frac{d}{dt}\right) y_n = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad (9.4\text{-}8)$$

где $\varphi_{jk}(d/dt)$ — многочлены от d/dt, то каждая из n функций, составляющих решение $y_k = y_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, имеет вид (7); показатели s_i будут теперь корнями *характеристического уравнения системы*

$$D(s) \equiv \det[\varphi_{jk}(s)] = 0. \quad (9.4\text{-}9)$$

Подставляя выражения вида (7) в уравнения (8), мы получаем соотношения между коэффициентами; коэффициенты, оставшиеся произвольными (постоянные интегрирования), определяются по начальным или краевым условиям (см. также п. 9.4-5, b и п. 13.6-2).

9.4-2. Неоднородные уравнения (см. также п. 9.3-1).

(a) Методы, изложенные в пп. 9.3-1 — 9.3-4, применимы ко всем линейным дифференциальным уравнениям. Поэтому общее решение неоднородного уравнения

$$\mathsf{L}y \equiv a_0 \frac{d^r y}{dt^r} + a_1 \frac{d^{r-1}y}{dt^{r-1}} + \ldots + a_r y = f(t) \quad (9.4\text{-}10)$$

можно представить в виде суммы общего решения (7) приведенного уравнения (5) и какого-либо частного решения уравнения (10).

Если, как это часто бывает в приложениях, $f(t) = 0$ при $t \leqslant 0$[1]), то частное решение $y = y_N(t)$ уравнения (10) такое, что $y_N = y'_N = \ldots = y_N^{(r-1)} = 0$ при $t \leqslant 0$, называется **нормальной реакцией на внешнюю нагрузку** $f(t)$. *Решение уравнения* (10) *при заданных начальных значениях величин* $y, y', \ldots, y^{(r-1)}$ *есть сумма решения соответствующей начальной задачи для однородного уравнения* (5) *и нормальной реакции* $y_N(t)$.

Во многих приложениях (устойчивые электрические цепи, колебания) все корни характеристического уравнения [(6) или (9)] имеют отрицательные действительные части, и общее решение уравнения (5) исчезает более или менее быстро (устойчивый «переходный процесс»). В таких случаях главный интерес представляет обычно «установившийся процесс» $y = y_{ss}(t)$ — частное решение, вызванное данной нагрузкой $f(t)$. В других случаях $y_{ss}(t)$ определяется не только данным дифференциальным уравнением, но и начальными условиями. Нормальная реакция $y_N(t)$ может как содержать, так и не содержать переходные члены.

(b) Всякое решение $y_k = y_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *неоднородной системы* линейных дифференциальных уравнений

$$\varphi_{j1}\left(\frac{d}{dt}\right) y_1 + \varphi_{j2}\left(\frac{d}{dt}\right) y_2 + \ldots + \varphi_{jn}\left(\frac{d}{dt}\right) y_n = f_j(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (9.4\text{-}11)$$

есть сумма частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы (8). **Нормальная реакция** системы (11) на множество внешних нагрузок $f_j(t)$, равных нулю при $t \leqslant 0$, есть частное решение, в котором при $t \leqslant 0$ все функции y_k вместе со своими соответствующими производными равны нулю.

---

[1]) Это означает, что рассматриваются правые части только вида $f(t) \equiv f(t)\,U_+(t)$, где $U_+(t)$ — единичная функция, определенная в п. 21.9-1.

(c) Если правая часть содержит периодический член, частота которого совпадает с частотой незатухающего синусоидального члена в общем решении соответствующего однородного уравнения или системы, то данное уравнение или система не будет иметь ограниченного решения (резонанс).

9.4-3. Свертки и функции Грина (см. также пп. 9.3-3, 9.4-7 и 15.5-1).

(a) Физически реализуемые задачи Коши. Применение метода функции Грина (п. 9.3-3, b) к дифференциальному уравнению (10) позволяет представить нормальную реакцию на внешнюю нагрузку $f(t)$ в виде *интеграла Дюамеля* или *свертки*

$$y=y_N(t)=\int_0^t h_+(t-\tau)f(\tau)\,d\tau=\int_0^t h_+(\tau)f(t-\tau)\,d\tau, \qquad (9.4\text{-}12)$$

если предположить, что $f(t)=0$ при $t\leqslant 0$ и $h_+(t-\tau)=0$ при $t\leqslant\tau$, так что «будущие» значения $f(t)$ не могут воздействовать на «более ранние» значения $y(t)$ и «мгновенные» влияния исключаются (*физически реализуемые системы*). При этом

$$y_N^{(m)}(t)=\int_0^t \frac{\partial^m}{\partial t^m}h_+(t-\tau)f(\tau)\,d\tau \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r), \qquad (9.4\text{-}13)$$

если существуют производные в правой части. Функция $h_+(t-\tau)$ есть частный случай функции Грина и определяется условиями

$$\mathsf{L}h_+(t-\tau)=0 \ \ (t>\tau); \qquad \int_0^\infty \mathsf{L}h_+(t-\tau)\,d\tau=1 \ \ (t>0), \qquad (9.4\text{-}14a)$$

$$h_+(t-\tau)=h'_+(t-\tau)=\ldots=h_+^{(r-1)}(t-\tau)=0 \qquad (t\leqslant\tau). \qquad (9.4\text{-}14b)$$

$h_+(t-\tau)$ *есть нормальная реакция на единичный импульс* $\delta_+(t-\tau)$ (п. 21. 9-6); уравнение (14a) можно записать в символической форме

$$\mathsf{L}h_+(t-\tau)=\delta_+(t-\tau). \qquad (9.4\text{-}14c)$$

Заметим, что $\int_0^t h_+(t-\tau)\,d\tau$ есть нормальная реакция на единичную нагрузку $U_+(t-\tau)$ (п. 21.9-1), т. е. $h_+(t-\tau)$ *есть производная от нормальной реакции на единичную нагрузку*. Символическое дифференциальное уравнение (14c) часто легко решается операторным методом п. 9.4-5; другой путь нахождения $h_+(t)$ заключается в интегрировании *однородного* дифференциального уравнения

$$\mathsf{L}h_+(t)=0 \qquad (t>0) \qquad (9.4\text{-}14d)$$

при начальных условиях

$$\left.\begin{aligned} h_+(0+0)=h'_+(0+0)=\ldots=h_+^{(r-2)}(0+0)=0,\\ h_+^{(r-1)}(0+0)=\frac{1}{a_0} \end{aligned}\right\} \qquad (9.4\text{-}14e)$$

Пример. Для $\mathsf{L}y\equiv a\frac{dy}{dt}+y$ имеем: $h_+(t)=\frac{1}{a}e^{-t/a}$ $(t>0)$.

(b) При аналогичных условиях нормальная реакция *системы* линейных дифференциальных уравнений (11) может быть представлена в виде

$$y_k=\sum_{j=1}^n\int_0^t (h_+)_{kj}\,(t-\tau)\,f_j\,(\tau)\,d\tau \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (9.4\text{-}15)$$

где $(h_+)_{kj}\,(t-\tau)$ — решения системы (11), соответствующие правым частям $f_j\,(t)=0$

($j \neq k$), $f_k(t) = \delta_+(t-\tau)$. Матрица функций $[(h_+)_{kj}(t-\tau)]$ есть частный случай **матрицы Грина.**

(c) Свертка (12) дает нормальные реакции также и в том случае, когда $f(t)$ и $y(t)$, связаны дифференциальным уравнением вида

$$a_0 \frac{d^r y}{dt^r} + a_1 \frac{d^{r-1} y}{dt^{r-1}} + \ldots + a_r y = b_0 \frac{d^\rho f}{dt^\rho} + b_1 \frac{d^{\rho-1} f}{dt^{\rho-1}} + \ldots + b_\rho f. \qquad (9.4\text{-}16)$$

Такие соотношения могут получиться, в частности, когда система (11) приводится к одному уравнению путем исключения ($n-1$) искомых функций.

Некоторые $(h_+)_{kj}(t)$, а значит, и $h_+(t)$, в случае соотношений типа (16) могут содержать особенности типа дельта-функции (обобщенные функции Грина, п. 15.5-1, b). Если при этом

$$h_+(t) = c_1\delta_+(t-t_1) + c_2\delta_+(t-t_2) + \ldots + h_0(t),$$

то формула (12) сводится к

$$y = y_N(t) = c_1 f(t-t_1) + c_2 f(t-t_2) + \ldots + \int_0^t h_0(t-\tau) f(\tau)\, d\tau \qquad (t > 0).$$

(d) Более общие задачи. «Симметрические» и «асимметрические» функции Грина. В случае, когда правая часть при $t \leqslant 0$ отлична от нуля, можно ввести «симметрическую» функцию $h(t-\tau)$, определяемую уравнением (см. п. 21.9-2)

$$\mathrm{L}h(t-\tau) = \delta(t-\tau) \qquad (9.4\text{-}17)$$

и подходящими начальными или краевыми условиями. Решение

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau)\, d\tau \qquad (9.4\text{-}18)$$

будет, в частности, удовлетворять уравнению (10) при $t \geqslant 0$ и

$$y(0-0) = y'(0-0) = \ldots = y^{(r-1)}(0-0) = 0,$$

если $f(t) \equiv f(t)\,U(t)$ (п. 21.9-1) и если

$$h(t-\tau) = h'(t-\tau) = \ldots = h^{(r-1)}(t-\tau) = 0 \qquad (t < \tau). \quad (9.4\text{-}19a)$$

«Асимметрические» функции $h_+(t)$ удобнее применять вместе с преобразованием Лапласа, а «симметрические» $h(t)$ — с преобразованием Фурье. *В обычных физических приложениях сохраняют условия* (19a), *так как «будущие» значения функции не могут влиять на решение;* при этом $h_+(t)$ и $h(t)$ совпадают в точках непрерывности. Часто внешняя нагрузка не может оказать мгновенного действия на решение, так что $h(t-\tau)$ удовлетворяет более сильным условиям

$$h(t-\tau) = h'(t-\tau) = \ldots = h^{(r-1)}(t-\tau) = 0 \qquad (t \leqslant \tau) \qquad (9.4\text{-}19b)$$

и $h(t)$ совпадает с $h_+(t)$.

Пример. В электрической цепи, содержащей только сопротивление R, сила тока $y(t)$ и напряжение $f(t)$ связаны соотношением $y(t) = f(t)/R$, так что здесь $h_+(t) = \delta_+(t)/R$ и $h(t) = \delta(t)/R$. Но для $\mathrm{L}y \equiv a\frac{dy}{dt} + y$ имеем $h_+(t) \equiv h(t) \equiv \frac{1}{a}e^{-t/a}$.

9.4-4. Устойчивость. Линейное дифференциальное уравнение (10) или система (11) **устойчивы,** если все корни соответствующего характеристического уравнения (6) или (9) имеют отрицательные действительные части; тогда малое изменение начальных условий не может вызвать больших изменений решения (более общее определение устойчивости см. п. 9.5-4, a). Характер корней может быть исследован методами пп. 1.6-6 и 7.6-9 (критерии устойчивости для электрических цепей и систем управления). *Дифференциальное уравнение* (10)

устойчиво тогда и только тогда, когда существует $\int_0^\infty |h_+(\tau)|\,d\tau$ (или соответственно $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau$). Аналогичные условия для каждой функции $h_{kj}(\tau)$ системы (11) (п. 9.4-3, b) являются необходимыми и достаточными для устойчивости этой системы.

9.4-5. Операторный метод решения (см. также п. 8.1-1, 8.4-1—8.4-5, 9.3-7, 10.5-2 и 13.6-2, c).

(a) Для интегрирования линейного дифференциального уравнения (10) с начальными значениями $y(0+0)$, $y'(0+0)$, ..., $y^{(r-1)}(0+0)$ применяют *преобразование Лапласа* (8.2-1) к обеим частям уравнения, полагая $\mathscr{L}[y(t)] \equiv Y(s)$ и $\mathscr{L}[f(t)] \equiv F(s)$. Получающееся линейное *алгебраическое* уравнение (*вспомогательное уравнение*)

$$\left.\begin{aligned} &(a_0 s^r + a_1 s^{r-1} + \ldots + a_r)\,Y(s) = F(s) + G(s),\\ &G(s) \equiv y(0+0)(a_0 s^{r-1} + a_1 s^{r-2} + \ldots + a_{r-1}) +\\ &\quad + y'(0+0)(a_0 s^{r-2} + a_1 s^{r-3} + \ldots + a_{r-2}) +\\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad + y^{(r-2)}(0+0)(a_0 s + a_1) + a_0 y^{(r-1)}(0+0) \end{aligned}\right\} \qquad (9.4\text{-}20)$$

легко разрешимо относительно изображения искомого решения:

$$Y(s) = \frac{F(s)}{a_0 s^r + a_1 s^{r-1} + \ldots + a_r} + \frac{G(s)}{a_0 s^r + a_1 s^{r-1} + \ldots + a_r}. \qquad (9.4\text{-}21)$$

Здесь первый член есть *изображение* $Y_N(s)$ *нормальной реакции* $y_N(t)$ (п. 9.4-2, а), а второй член представляет влияние ненулевых начальных значений функции $y(t)$ и ее производных. Решения $y(t)$ и $y_N(t)$ находятся по своим изображениям с помощью табл. 8.4-1 или 8.4-2 или по правилам пп. 8.4-2—8.4-9. В частности, каждый из r членов разложения функции $\frac{G(s)}{(a_0 s^r + a_1 s^{r-1} + \ldots + a_r)}$ на простейшие дроби (п. 8.4-5) дает соответствующий член в решении (7).

Этот метод решения применяется без существенных изменений и к дифференциальным уравнениям вида (16).

(b) Применение преобразования Лапласа к системе дифференциальных уравнений (11) приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\varphi_{j1}(s)\,Y_1(s) + \varphi_{j2}(s)\,Y_2(s) + \ldots + \varphi_{jn}(s)\,Y_n(s) = F_j(s) + G_j(s) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (9.4\text{-}22)$$

где функции $G_j(s)$ зависят от начальных условий. Решая полученную систему по правилу Крамера (1.9-4), находят изображения искомого решения

$$Y_k(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{jk}(s)}{D(s)} F_j(s) + \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{jk}(s)}{D(s)} G_j(s) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (9.4\text{-}23)$$

где $A_{jk}(s)$ — алгебраические дополнения элементов $\varphi_{jk}(s)$ в **определителе системы** $D(s) \equiv \det[\varphi_{jk}(s)]$ (см. также п. 1.9-2). Первая сумма в формуле (23) есть изображение нормальной реакции, а вторая представляет влияние начальных условий.

Искомое решение $y_k(t)$ находится путем обращения преобразования Лапласа.

В задачах, содержащих неустойчивое дифференциальное уравнение (п. 9.4-4) или импульсные внешние нагрузки, решение может иметь особенности типа дельта-функций (см. также пп. 8.5-1 и 21.9-6).

9.4-6. Периодические внешние нагрузки и решения.

(a) Синусоидальные внешние нагрузки и решения. Синусоидальные установившиеся решения. *Любая система линейных дифференциальных уравнений* (11) *с действительными коэффициентами и синусоидальными внешними нагрузками одной частоты*

$$f_j(t) \equiv B_j \sin(\omega t + \beta_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{9.4-24 a}$$

допускает единственное частное решение вида

$$y_k(t) \equiv A_k \sin(\omega t + \alpha_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{9.4-24 b}$$

(если нет резонанса, т. е. если ωi не является корнем характеристического уравнения). В частности, *если все корни характеристического уравнения* (9) *имеют отрицательные действительные части* (*устойчивая система*, п. 9.4-4), *то синусоидальное решение* (24 b) *будет единственным установившимся решением* (п. 9.4-2).

(b) Метод комплексных амплитуд. Синусоидальные внешние нагрузки и решения (24) можно поставить во взаимно однозначное соответствие комплексным числам (*комплексным амплитудам*)

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F}_j &= \frac{B_j}{\sqrt{2}} e^{i\beta_j} = \frac{B_j}{\sqrt{2}} \underline{/\beta_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \\ \mathbf{Y}_k &= \frac{A_k}{\sqrt{2}} e^{i\alpha_k} = \frac{A_k}{\sqrt{2}} \underline{/\alpha_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{9.4-25}$$

Абсолютная величина каждой комплексной амплитуды равна среднему квадратическому значению соответствующей синусоиды, а ее аргумент равен начальной фазе синусоиды. *Комплексные амплитуды* (25) *связаны* (*комплексными*) *линейными алгебраическими уравнениями*

$$\varphi_{j1}(i\omega)\,\mathbf{Y}_1 + \varphi_{j2}(i\omega)\,\mathbf{Y}_2 + \ldots + \varphi_{jn}(i\omega)\,\mathbf{Y}_n = \mathbf{F}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{9.4-26}$$

которые отвечают системе (11) и могут быть решены относительно неизвестных комплексных амплитуд (ср. п. 9.4-5, b):

$$\mathbf{Y}_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{jk}(i\omega)}{D(i\omega)} \mathbf{F}_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.4-27}$$

В случае резонанса (п. 9.4-2, с) выражение (27) может не иметь смысла.

(c) *Синусоидальные величины* (24) *удовлетворяют данной системе дифференциальных уравнений* (11) *тогда и только тогда, когда этим же свойством обладают комплексные гармонические функции*

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{f}_j(t) &\equiv B_j e^{i(\omega t + \beta_j)} \equiv \mathbf{F}_j e^{i\omega t}\sqrt{2} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \\ \mathbf{y}_k(t) &\equiv A_k e^{i(\omega t + \alpha_k)} \equiv \mathbf{Y}_k e^{i\omega t}\sqrt{2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{9.4-28}$$

которые часто более удобны в расчетах, чем сами синусоиды (24).

(d) Более общие периодические внешние нагрузки (см. также пп. 4.11-4, 4.11-5 и 9.4-5, b). Если дана устойчивая система (11) с периодическими внешними нагрузками вида

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} (a_h \cos h\omega t + b_h \sin h\omega t), \tag{9.4-29}$$

то метод комплексных амплитуд можно применить к каждому синусоидальному члену отдельно и затем путем наложения получить установившееся периодическое решение. Этот метод может оказаться более удобным, чем метод преобразования Лапласа, если в решении надо найти только небольшое число гармоник.

9.4-7. Передаточные функции и частотные характеристики.

(a) Передаточные функции. **Передаточной функцией** называется функция

$$H(s)=\frac{1}{a_0s^r+a_1s^{r-1}+\ldots+a_r}=\frac{Y_N(s)}{F(s)} \tag{9.4-30}$$

(см. формулу (21)). Передаточная функция представляет некоторый линейный оператор (п. 15.2-7), который преобразует внешнюю нагрузку на входе в нормальную реакцию на выходе (рис. 9.4-1).

$$\xrightarrow{F(s)} \boxed{H_1(s)\equiv\frac{Y_N(s)}{F(s)}} \xrightarrow{Y_N(s)} \boxed{H_2(s)\equiv\frac{Z_N(s)}{Y_N(s)}} \xrightarrow{Z_N(s)}$$

Рис. 9.4-1. Представление линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью передаточных функций. Если $y_N(t)$ становится внешней нагрузкой для второго дифференциального уравнения с нормальной реакцией $z_N(t)$, то две передаточные функции перемножаются, т. е.

$$\frac{Z_N(s)}{F(s)}=H_1(s)\,H_2(s).$$

Более общо, каждая функция $\frac{A_{jk}(s)}{D(s)}$ в формуле (23) есть передаточная функция, относящая нормальную реакцию $y_k(t)$ системы (11) на выходе внешней нагрузке $f_j(t)$ на входе, когда все остальные внешние нагрузки отсутствуют. Эти передаточные функции образуют **передаточную матрицу.**

Передаточная функция для уравнения (16) есть

$$H(s)=\frac{b_0s^\rho+b_1s^{\rho-1}+\ldots+b_\rho}{a_0s^r+a_1s^{r-1}+\ldots+a_r}. \tag{9.4-31}$$

(b) Частотные характеристики (см. также п. 9.4-6, a). **Частотные характеристики** $H(i\omega)$ и $\frac{A_{jk}(i\omega)}{D(i\omega)}$ связывают комплексные амплитуды, представляющие синусоидальные внешние нагрузки, и установившиеся решения с одной и той же частотой ω. В частности, *абсолютная величина и аргумент частотной характеристики связывают амплитуды и фазы синусоид на входе и выходе:* если $f(t)=B\sin(\omega t+\beta)$, $y(t)=A\sin(\omega t+\alpha)$, то

$$|H(i\omega)|=\frac{A}{B},\qquad \arg H(i\omega)=\alpha-\beta. \tag{9.4-32}$$

Для схемы, представленной на рис. 9.4-1, амплитудные характеристики $|H(i\omega)|$ перемножаются, а фазовые характеристики $\arg H(i\omega)$ складываются.

(c) Соотношения между передаточными функциями, частотными характеристиками и функциями Грина (см. также п. 9.4-3 и теоремы о свертках в табл. 8.3-1). *Передаточная функция $H(s)$ есть преобразование Лапласа от асимметрической функции $h_+(t)$:*

$$H(s)=\int_0^\infty h_+(t)\,e^{-st}\,dt. \tag{9.4-33}$$

Частотная характеристика $H(i\omega)$ есть преобразование Фурье от симметрической функции $h(t)$:

$$H(i\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-i\omega t}\, dt. \qquad (9.4\text{-}34)$$

Формулы (33) и (34) указывают возможность получения функций $h_+(t)$ и $h(t)$ как обращений преобразований Лапласа или Фурье для рациональных функций.

9.4-8. Нормальные координаты и собственные колебания.

(а) Свободные колебания. Малые незатухающие колебания механических или электрических систем часто описываются системой n линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\sum_{k=1}^{n}\left(b_{jk}\frac{d^2}{dt^2}+a_{jk}\right)y_k=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (9.4\text{-}35)$$

в которой обе матрицы $[a_{jk}]$ и $[b_{jk}]$ симметричны, положительно определены (п. 13.5-2) и таковы, что характеристическое уравнение (9) имеет $2n$ различных ненулевых чисто мнимых корней $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, ..., $\pm i\omega_n$. Такие n пар корней соответствуют свободным синусоидальным колебаниям с n **собственными частотами** $\frac{\omega_1}{2\pi}$, $\frac{\omega_2}{2\pi}$, ..., $\frac{\omega_n}{2\pi}$.

Для данной системы (35) можно ввести **нормальные координаты** $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, ..., $\bar{y}_n$ с помощью линейного преобразования

$$y_k=\sum_{h=1}^{n} t_{kh}\bar{y}_h \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \qquad (9.4\text{-}36)$$

с такими коэффициентами t_{kh}, чтобы привести одновременно обе матрицы $[a_{jk}]$ и $[b_{jk}]$ к диагональному виду (пп. 13.5-5 и 14.8-7); преобразованная система будет иметь простой вид:

$$\frac{d^2\bar{y}_h}{dt^2}+\omega_h^2\bar{y}_h=0 \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (9.4\text{-}37)$$

Получающиеся здесь свободные синусоидальные (собственные) колебания

$$\bar{y}_h=\bar{A}_h\sin(\omega_h t+\bar{\alpha}_h) \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots n) \qquad (9.4\text{-}38)$$

не влияют одно на другое (разъединены). Нормальные координаты могут иметь непосредственное физическое истолкование.

Пример. Для системы

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}=-\omega_0^2y_1-\alpha^2(y_1-y_2); \qquad \frac{d^2y_2}{dt^2}=-\omega_0^2y_2-\alpha^2(y_2-y_1)$$

нормальными координатами являются $\bar{y}_1=y_1+y_2$, $\bar{y}_2=y_1-y_2$. При начальных условиях $y_1=1$, $y_2=0$, $\frac{dy_1}{dt}=\frac{dy_2}{dt}=0$ при $t=0$ уравнения для нормальных координат

$$\frac{d^2\bar{y}_1}{dt^2}=-\omega_0^2\bar{y}_1; \qquad \frac{d^2\bar{y}_2}{dt^2}=-(\omega_0^2+2\alpha^2)\,\bar{y}_2$$

дают

$$\bar{y}_1=\cos\omega_0 t; \qquad \bar{y}_2=\cos\sqrt{\omega_0^2+2\alpha^2}\,t,$$

и следовательно,

$$y_1=\frac{1}{2}(\bar{y}_1+\bar{y}_2)=\cos\frac{\sqrt{\omega_0^2+2\alpha^2}-\omega_0}{2}t\cos\frac{\sqrt{\omega_0^2+2\alpha^2}+\omega_0}{2}t,$$

$$y_2=\frac{1}{2}(\bar{y}_1-\bar{y}_2)=\sin\frac{\sqrt{\omega_0^2+2\alpha^2}-\omega_0}{2}t\sin\frac{\sqrt{\omega_0^2+2\alpha^2}+\omega_0}{2}t.$$

При $\alpha^2 \ll \omega_0^2$ (слабая связь) эти решения описывают так называемое явление резонанса.

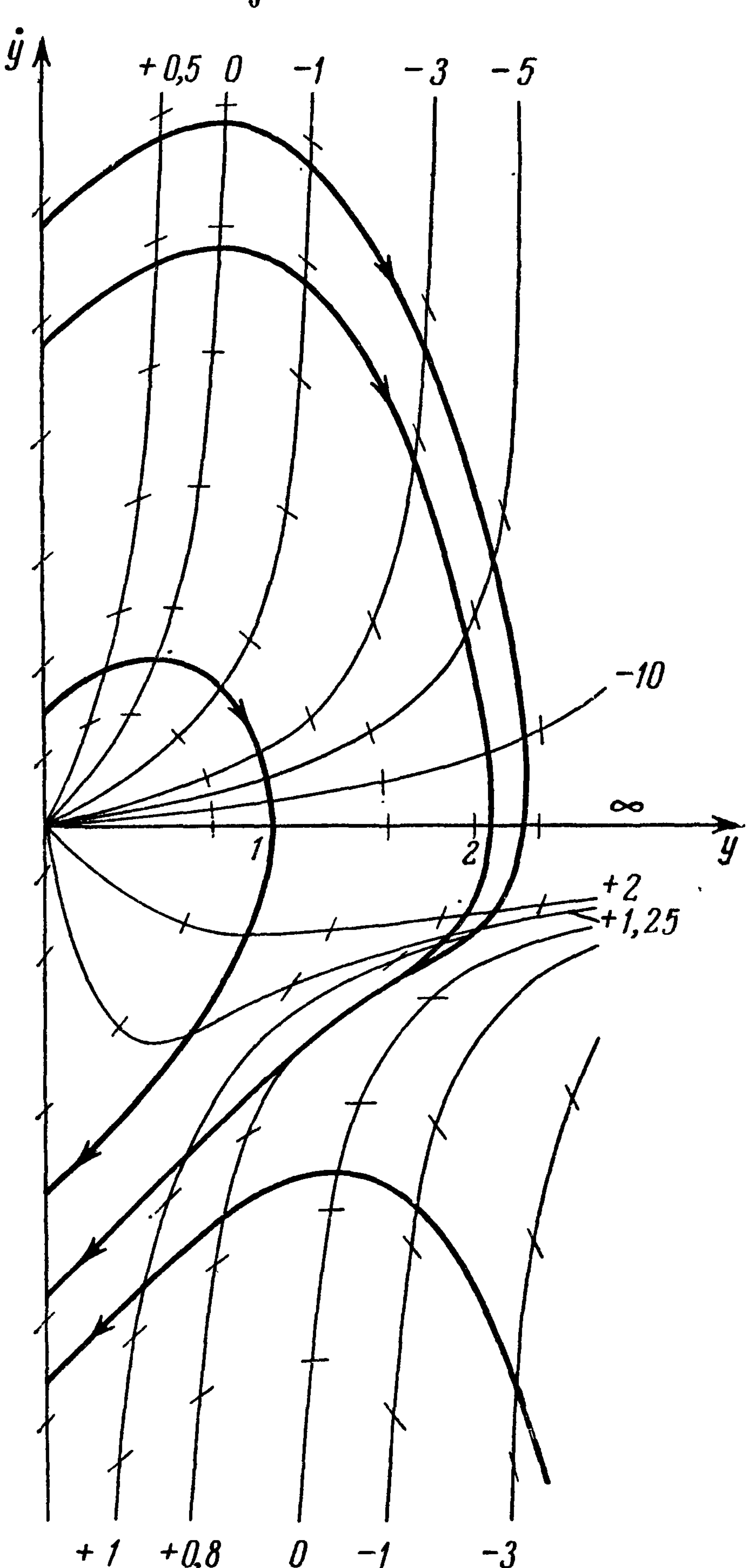


Рис. 9.5-1. Изоклины, направления поля и некоторые решения дифференциального уравнения

$$\frac{d\dot{y}}{dy} = 1 - y^2 - \frac{y}{\dot{y}},$$

соответствующего уравнению Ван дер Поля

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y + \mu\,(1 - y^2)\,\frac{dy}{dt},$$

где $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$. $\mu = 1$. Показана лишь правая полуплоскость.

(b) Вынужденные колебания. Соответствующая задача о вынужденных колебаниях

$$\sum_{k=1}^{n}\left(b_{jk}\frac{d^2}{dt^2} + a_{jk}\right) y_k = f_j\,(t)$$

$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \qquad (9.4\text{-}39)$$

может быть решена в принципе методом п. 14.8-10 путем разложения внешней нагрузки $f_j\,(t)$ по собственным функциям. Обычно более удобен операторный метод п. 9.4-5.

9.5. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

9.5-1. Вводные замечания. В пп. 9.5-2—9.5-5 вводится общая терминология и наиболее простой метод приближенного решения из теории нелинейных колебаний. Для дальнейшего изучения рекомендуются [9.6], [9.7]. Многие методы решения тесно связаны со специфическими приложениями.

Метод возмущений из п. 10.2-7, с часто применяется для упрощения нелинейных задач, особенно в небесной механике. Численные методы решения см пп. 20.7-4 и 20.7-5.

9.5-2. Представление на фазовой плоскости. Графический метод решения (см. также п. 9.2-2). Дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t,\ y,\ \frac{dy}{dt}\right) \qquad (9.5\text{-}1)$$

равносильно системе уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}; \qquad \frac{d\dot{y}}{dt} = f\,(t,\ y,\ \dot{y}). \qquad (9.5\text{-}2)$$

Общее решение $y = y\,(t)$, $\dot{y} = \dot{y}\,(t)$ уравнений (1) или (2) может быть представлено геометрически семейством ориентированных **фазовых траекторий** на **фазовой плоскости** $Oy\dot{y}$. Такое представление полезнее всего в том случае, когда данная функция $f\,(t,\ y,\ \dot{y})$ не содержит явно независимого переменного t. В этом случае система (2) относится к системам вида

$$\frac{dy}{dt} = P\,(y,\ \dot{y}); \qquad \frac{d\dot{y}}{dt} = Q\,(y,\ \dot{y}) \qquad (9.5\text{-}3)$$

(автономная система) и фазовые траектории удовлетворяют дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d\dot{y}}{dy}=\frac{Q(y,\ \dot{y})}{P(y,\ \dot{y})}, \tag{9.5-4}$$

которое каждой точке $(y,\ \dot{y})$ ставит в соответствие наклон проходящей через нее интегральной кривой. Получающееся поле направлений («изображение» дифференциального уравнения на фазовой плоскости) позволяет сделать набросок $\dot{y}(y)$ и отсюда $y(t)$ по заданным начальным значениям y и $\dot{y}$; можно начать с построения геометрического места точек постоянного наклона $d\dot{y}/dy=m$ (**изоклин**, рис. 9.5-1).

9.5-3. Особые точки и предельные циклы (см. также п. 9.5-4).

(а) Обыкновенные и особые точки фазовой плоскости. Точка $(y,\ \dot{y})$ фазовой плоскости системы (3) называется **обыкновенной точкой**, если $P(y,\ \dot{y})$ и $Q(y,\ \dot{y})$ дифференцируемы и не обращаются одновременно в нуль; *через каждую обыкновенную точку проходит единственная фазовая траектория*. Точка $(y_0,\ \dot{y}_0)$ называется **особой точкой**, если

$$P(y_0,\ \dot{y}_0)=0; \qquad Q(y_0,\ \dot{y}_0)=0. \tag{9.5-5}$$

Особые точки классифицируются по характеру фазовых траекторий в их

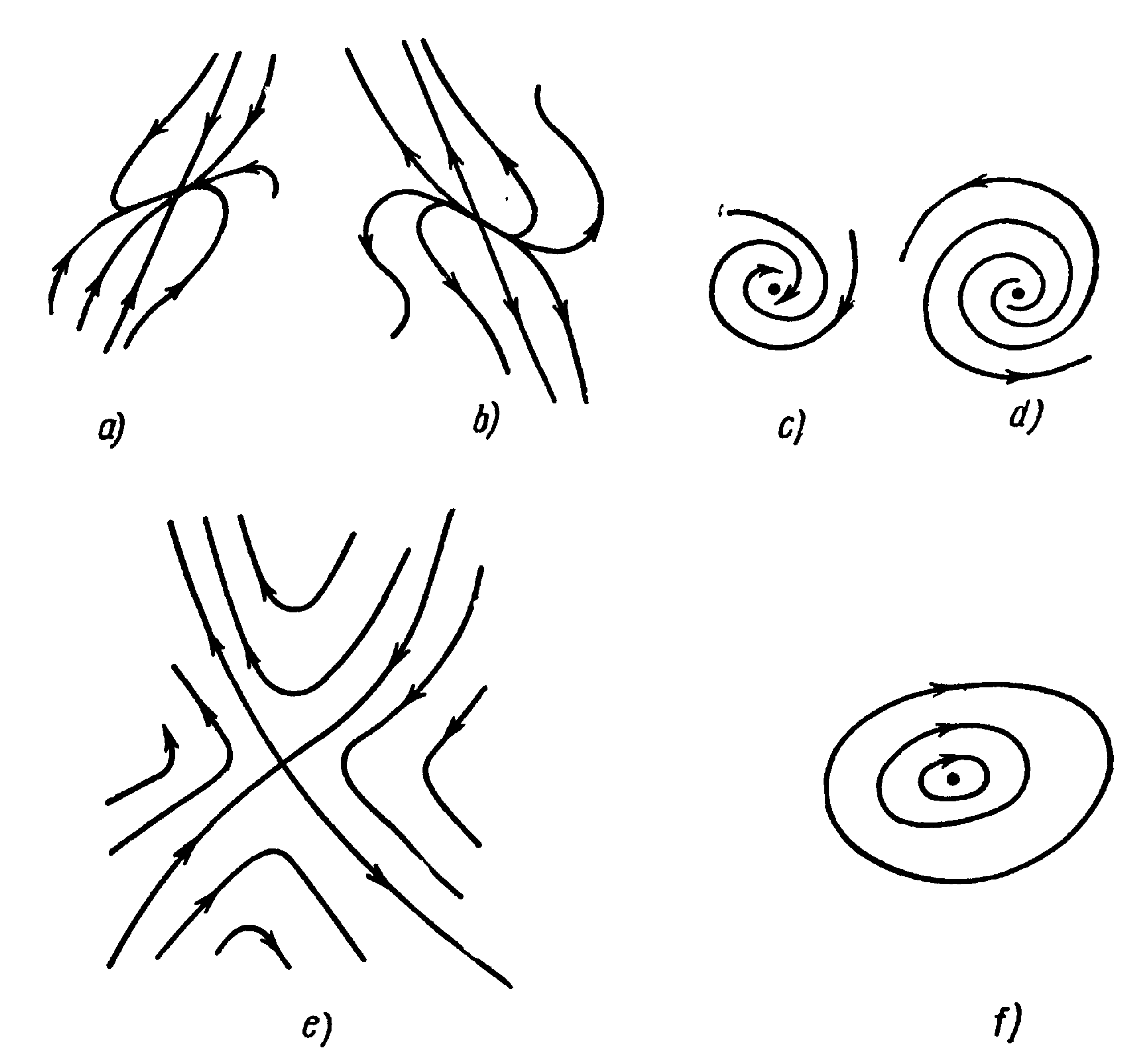


Рис. 9.5-2. Фазовые траектории в окрестности особых точек шести типов (пп. 9.5-3 и 9.5-4).

a) Устойчивый узел; *b*) неустойчивый узел; *c*) устойчивый фокус; *d*) неустойчивый фокус; *e*) седло; *f*) центр.

окрестности; наиболее важные типы особых точек изображены на рис. 9.5-2. Физически особые точки есть *точки покоя* (равновесия), допускающие устойчивые или неустойчивые положения равновесия $y=y_0$ (п. 9.5-4).

(b) Периодические решения и предельные циклы. Периодические решения $y=y(t)$ соответствуют замкнутым фазовым траекториям, и обратно. Замкнутая фазовая траектория C называется **предельным циклом**, если она имеет окрестность из обыкновенных точек, в которой все фазовые траектории спиралевидно приближаются к C (**устойчивый** предельный цикл)

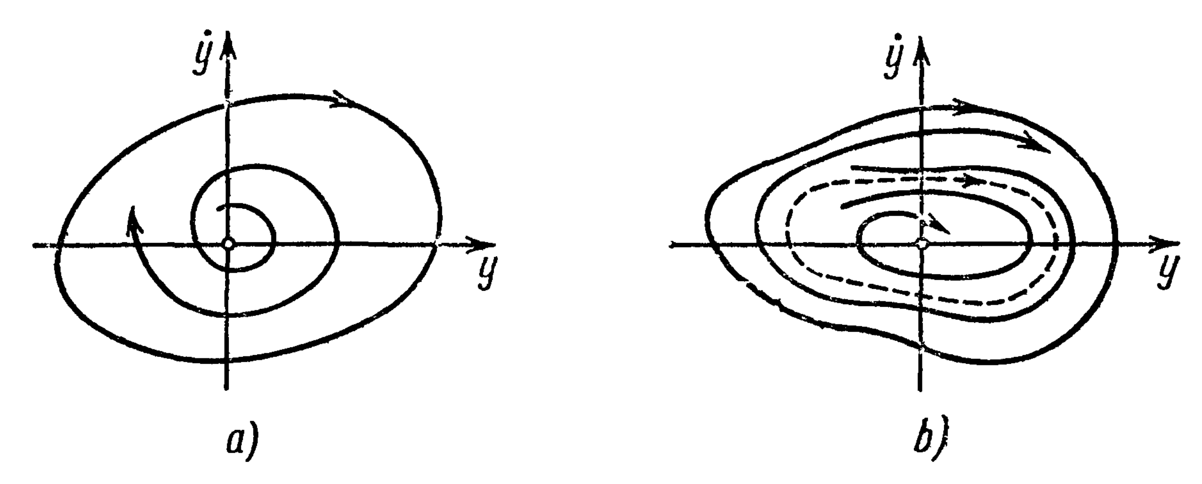


Рис. 9.5-3. *a*) Устойчивый предельный цикл, заключающий неустойчивую особую точку в начале. «Мягкое» самовозбуждение колебаний при произвольно малых начальных значениях y и $\dot{y}$. *b*) Устойчивый предельный цикл, заключающий устойчивую особую точку в начале и неустойчивый предельный цикл (показанный пунктиром). «Жесткое» самовозбуждение колебаний при начальных значениях вне неустойчивого цикла.

или удаляются от C (**неустойчивый** предельный цикл) или приближаются к C с одной стороны и удаляются от нее с другой (**полуустойчивый** предельный цикл). Примеры см. пп. 9.5-4, с и 9.5-5 (см. также рис. 9.5-3).

(c) Индекс Пуанкаре и теоремы Бендиксона. Во многих приложениях представляет интерес существование предельных циклов (устойчивых колебаний). В дополнение к аналитическому критерию п. 9.5-4 полезна иногда следующая теория.

Индексом замкнутой кривой C, состоящей из обыкновенных точек фазовой плоскости, называется число полных оборотов вектора, задающего направление поля, при обходе точкой $(y, \dot{y})$ контура C. **Индексом изолированной особой точки** P называется индекс любой замкнутой кривой, охватывающей точку P и не содержащей других особых точек. При этом:

1. Индекс замкнутой кривой C равен сумме индексов всех (изолированных) особых точек, лежащих внутри C; если внутри C все точки обыкновенные, то ее индекс равен нулю.
2. Индекс узла, фокуса или центра равен 1; индекс седла равен -1 (см. рис. 9.5-2).
3. Индекс любой фазовой траектории равен 1; следовательно, *предельный цикл должен содержать по крайней мере одну особую точку помимо седла* (рис. 9.5-3).

Внутри любой области фазовой плоскости, где $\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial \dot{y}}$ *сохраняет знак, существуют незамкнутые фазовые траектории (первая теорема Бендиксона). Траектория, которая остается внутри ограниченной области и не приближается ни к какой особой точке при* $0 \leqslant t < \infty$, *либо является замкнутой, либо асимптотически приближается к некоторой замкнутой траектории (вторая теорема Бендиксона).*

9.5-4. ⁎ Устойчивость решений по Ляпунову *) (см. также пп. 13.6-5—13.6-7).

(a) Решение $y_i=y_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dt}=f_i(t; y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{9.5-6}$$

соответствующее начальным условиям $y_i(t_0)=y_{i0}$, называется **устойчивым по Ляпунову**, если для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что из системы неравенств $|x_{i0}-y_{i0}|<\delta$ будут следовать неравенства $|x_i(t)-y_i(t)|<\varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0$, где $x_i(t)$ — решение, определяемое начальными условиями

*) Теория устойчивости по Ляпунову изложена во многих руководствах; см., например, [9.1], [9.3].

$x_i(t_0)=x_{i0}$. Это значит, что *малое изменение начальных условий не может вызвать больших изменений решения.*

Устойчивое решение $y_i(t)$ называется **асимптотически устойчивым**, если можно указать такое число r, что из неравенств $|x_{i0}-y_{i0}|<r$ будут следовать соотношения $\lim\limits_{t\to\infty}|x_i(t)-y_i(t)|=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Асимптотически устойчивое решение называется **асимптотически устойчивым в целом (вполне устойчивым)**, если $r=\infty$, т. е. если при *любых* начальных условиях x_{i0} решение $x_i(t)\to y_i(t)$ при $t\to\infty$.

В частности, *все решения устойчивой системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами асимптотически устойчивы в целом* (все корни характеристического уравнения такой системы имеют отрицательные действительные части, см. п. 9.4-4).

(b) Устойчивость положения равновесия автономной системы. Пусть

$$\frac{dy_i}{dt}=f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{9.5-7}$$

— *автономная система* дифференциальных уравнений (все функции f_i не зависят явно от t) и $(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ — какая-либо ее точка покоя, т. е. $f_i(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. *Тривиальное «равновесное» решение*

$$y_i(t)=y_{i0} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

соответствующее данной точке покоя, является асимптотически устойчивым, если линеаризованная система (система первого приближения)

$$\frac{dy_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right)_0(y_k-y_{k0}) \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{9.5-8}$$

устойчива (все частные производные берутся в исследуемой точке покоя $(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$). Это имеет место тогда, когда все корни s характеристического уравнения

$$\det\left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right)_0-s\delta_k^i\right]=0 \tag{9.5-9}$$

имеют отрицательные действительные части. Тривиальное решение будет *неустойчивым*, если уравнение (9) имеет хотя бы один корень с положительной действительной частью; если нет корней с положительной действительной частью, но среди корней есть чисто мнимые, то требуется дополнительное исследование (см. п. 13.6-7).

В частности, для системы (3) характеристическое уравнение есть

$$s^2-\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial \dot y}\right)_0 s+\left(\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial \dot y}-\frac{\partial P}{\partial \dot y}\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_0=0, \tag{9.5-10}$$

где все частные производные берутся в точке покоя $(y_0, \dot y_0)$.

Для уравнения второго порядка $\ddot y=f(y, \dot y)$ и точки покоя $(y_0, \dot y_0)$ (значит, $f(y_0, \dot y_0)=0$) характеристическое уравнение можно записать, не переходя к системе (3):

$$s^2-\left(\frac{\partial f}{\partial \dot y}\right)_0 s-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0=0.$$

Точка покоя системы (3) есть (см. рис. 9.5-2)

— *устойчивый или неустойчивый узел,* если оба корня s_1 и s_2 уравнения (10) действительны и соответственно отрицательны или положительны,

— *седло,* если s_1 и s_2 действительны и имеют разные знаки,

— *устойчивый или неустойчивый фокус*, если s_1 и s_2 комплексно сопряжены и имеют соответственно отрицательную или положительную действительную часть.

Если корни уравнения (10) чисто мнимы, то для линеаризованной системы точка покоя является *центром*. Выяснение характера точки покоя данной нелинейной системы требует, как уже отмечалось, дополнительного исследования.

(c) Устойчивость периодических решений. Устойчивость периодического решения $y = y_p(t) \not\equiv 0$, $\dot{y} = \dot{y}_p(t)$ системы (3) зависит от устойчивости такого же решения линеаризованной системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\delta y}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial y}\delta y + \frac{\partial P}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}, \\ \frac{d\delta \dot{y}}{dt} &= \frac{\partial Q}{\partial y}\delta y + \frac{\partial Q}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}, \end{aligned}\right\} \tag{9.5-11}$$

которой удовлетворяют малые вариации (п. 11.4-1) δy, $\delta\dot{y}$ периодического решения. (Здесь все частные производные берутся в точке $(y_p(t), \dot{y}_p(t))$.) Это — система линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, имеющими тот же период T, что и данное решение; уравнения (11) допускают два линейно независимых решения вида

$$\delta y = h_{11}(t),\ \delta\dot{y} = h_{12}(t);\ \delta y = e^{\lambda t} h_{21}(t),\ \delta\dot{y} = e^{\lambda t} h_{22}(t), \tag{9.5-12}$$

где $h_{ik}(t)$ — периодические функции, а

$$\lambda = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial \dot{y}}\right)\Bigg|_{y = y_p(t),\ \dot{y} = \dot{y}_p(t)} dt. \tag{9.5-13}$$

Периодическое решение устойчиво при $\lambda < 0$ *и неустойчиво при* $\lambda > 0$; случай $\lambda = 0$ требует дополнительного исследования.

Пример. Дифференциальное уравнение Ван дер Поля

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y - \mu(1 - y^2)\frac{dy}{dt} = 0 \quad (\mu > 0) \tag{9.5-14}$$

имеет устойчивый предельный цикл в окрестности приближенно периодического решения $y = y_p(t) \approx 2\cos t$; $\dot{y} = \dot{y}_p(t) \approx -2\sin t$ и $\lambda = -\mu[1 + O(\mu)]$ (см. также п. 9.5-5).

9.5-5. Приближенный метод Крылова и Боголюбова.

(а) Первое приближение. Эквивалентная регуляризация. Решение дифференциального уравнения вида

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y + \mu f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = 0, \tag{9.5-15}$$

где μ — малая постоянная, так что последний член представляет малое нелинейное возмущение, ищут в виде

$$y = r(t)\cos\varphi(t). \tag{9.5-16}$$

Пренебрегая ошибкой порядка μ^2, находим «амплитуду» $r(t)$ и «полную фазу» $\varphi(t)$ из дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\mu}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(r\cos\lambda, -r\omega\sin\lambda)\sin\lambda\, d\lambda = -\frac{r}{2}a_1(r), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \frac{\mu}{2\pi r\omega}\int_0^{2\pi} f(r\cos\lambda, -r\omega\sin\lambda)\cos\lambda\, d\lambda = \sqrt{a_2(r)}. \end{aligned}\right\} \tag{9.5-17}$$

При данном начальном значении $r(0) = r_0$ решение *эквивалентного линейного дифференциального уравнения*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1(r_0)\frac{dy}{dt} + a_2(r_0)\,y = 0 \tag{9.5-18}$$

аппроксимирует решение данного дифференциального уравнения (15) с ошибкой порядка μ^2. Для периодического решения типа предельного цикла (п. 9.5-3, b) приближенная амплитуда r_L находится из $a_1(r_L)=0$, а круговая частота приближенно равна $\sqrt{a_2(r_L)}$. Этот предельный цикл устойчив, если $\left.\frac{da_1}{dr}\right|_{r=r_L}>0$, и неустойчив, если $\left.\frac{da_1}{dr}\right|_{r=r_L}<0$. Для самовозбуждения из состояния покоя должно быть $a_1(0)<0$.

Указанное первое приближение представляет интерес в связи с периодическими нелинейными колебаниями. В таких случаях эквивалентное линейное дифференциальное уравнение (18) дает то же накопление и рассеяние энергии по циклу, что и данное нелинейное уравнение (15). Поэтому эквивалентное линейное уравнение может применяться в исследованиях явления нелинейного резонанса.

(b) Улучшенное первое приближение. Улучшенное приближение первого порядка дается формулой

$$y=r(t)\cos\varphi(t)+\frac{\mu}{\omega^2}\left\{\frac{\alpha_0(r)}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\alpha_k(r)\cos k\varphi(t)+\beta_k(r)\sin k\varphi(t)\right]\right\},\quad (9.5\text{-}19)$$

где $r(t)$ и $\varphi(t)$ определяются из уравнений (17), а

$$\left.\begin{aligned}\alpha_k(r)&=\frac{1}{\pi(k^2-1)}\int_0^{2\pi}f(r\cos\lambda,\ -r\omega\sin\lambda)\cos k\lambda\,d\lambda\quad(k=0,\ 2,\ 3,\ \ldots),\\ \beta_k(r)&=\frac{1}{\pi(k^2-1)}\int_0^{2\pi}f(r\cos\lambda,\ -r\omega\sin\lambda)\sin k\lambda\,d\lambda\quad(k=2,\ 3,\ \ldots).\end{aligned}\right\}\quad (9.5\text{-}20)$$

Пример. В случае дифференциального уравнения Ван дер Поля (14) уравнения (17) дают

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\mu r}{2}\left(1-\frac{r^2}{4}\right);\qquad r(t)=\frac{r_0e^{\mu t/2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}r_0^2\left(e^{\mu t}-1\right)}}.\quad (9.5\text{-}21)$$

При $r=r_L=2$ имеется устойчивый предельный цикл. Все коэффициенты (20) исчезают, за исключением β_3; улучшенное первое приближение есть

$$y=r(t)\cos(t+\varphi_0)-\mu\frac{r^3(t)}{32}\sin 3(t+\varphi_0).\quad (9.5\text{-}22)$$

Приближение Крылова — Боголюбова (19) есть улучшение более простого метода Ван дер Поля, который строил приближения вида

$$y=a(t)\cos\omega t+b(t)\sin\omega t.$$

Метод Крылова — Боголюбова может быть распространен на случай периодической внешней нагрузки в правой части дифференциального уравнения (15) (нелинейные вынужденные колебания, субгармонический резонанс).

9.5-6. Интеграл живых сил. Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dt^2}=f(y),\quad (9.5\text{-}23)$$

представляющее значительный интерес в динамике, может быть приведено к уравнению первого порядка умножением на dy/dt и интегрированием:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=2\int f(y)\,dy+C_1,\quad (9.5\text{-}24)$$

$$t=\int\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy+C_1}}+C_2.\quad (9.5\text{-}25)$$

9.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА

9.6-1. Дифференциальные уравнения Пфаффа (см. также пп. 3.1-16 и 17.2-2). **Дифференциальное уравнение Пфаффа**

$$P(x,\ y,\ z)\,dx+Q(x,\ y,\ z)\,dy+R(x,\ y,\ z)\,dz=0 \qquad (9.6\text{-}1)$$

с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами P, Q, R может быть истолковано геометрически как условие ортогональности интегральных кривых (с касательным вектором $(dx,\ dy,\ dz)$) заданному полю направлений (P, Q, R). Чтобы найти интегральную кривую, лежащую на произвольной (регулярной) поверхности

$$f(x,\ y,\ z)=0, \qquad (9.6\text{-}2)$$

надо решить обыкновенное дифференциальное уравнение, получающееся при исключении z и dz из уравнения (1) и $df(x,\ y,\ z)=0$ При этом **интегральные кривые** будут описываться двумя уравнениями $f(x, y, z)=0$, $g(x, y, z, C)=0$, где C — постоянная интегрирования.

9.6-2. Вполне интегрируемый случай (см. также п. 9.2-4). Дифференциальное уравнение Пфаффа (1) **вполне интегрируемо**, если существует *интегрирующий множитель* $\mu=\mu(x,\ y,\ z)$ такой, что $\mu(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)$ есть полный дифференциал $d\varphi(x,\ y,\ z)$; это имеет место тогда и только тогда, когда

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\equiv 0. \qquad (9.6\text{-}3)$$

В этом случае каждая линия на **интегральной поверхности**

$$\varphi(x,\ y,\ z)=C, \qquad (9.6\text{-}4)$$

ортогональной семейству кривых, описываемых системой

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}, \qquad (9.6\text{-}5)$$

является интегральной кривой. Отсюда следует, что решения, найденные методом п. 9.6-1 по подходящим образом выбранному *семейству* поверхностей (обычно плоскостей)

$$f(x,\ y,\ z)\equiv f(x,\ y,\ z;\ \lambda)=0, \qquad (9.6\text{-}6)$$

лежат на некоторой интегральной поверхности (4), получающейся путем исключения λ из решения $f(x,\ y,\ z;\ \lambda)=0$, $g(x,\ y,\ z,\ C;\ \lambda)=0$ (*метод Майера*).

Другой метод нахождения интегральной поверхности (4): *считая z постоянным*, находят решение обыкновенного дифференциального уравнения $P\,dx+Q\,dy=0$ в виде $u(x,\ y,\ z)-K=0$. Тогда интегральная поверхность описывается уравнением

$$\varphi(x,\ y,\ z)\equiv u(x,\ y,\ z)-\psi(z)=C, \qquad (9.6\text{-}7)$$

где $\psi(z)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения, получающегося путем исключения x и y из

$$\frac{1}{P}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{Q}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{d\psi}{dz}\right). \qquad (9.6\text{-}8)$$

Заметим, что общее значение отношения в (8) есть упомянутый интегрирующий множитель $\mu(x,\ y,\ z)$.

Приложения в термодинамике: адиабатическое условие $\delta q=0$ имеет вид (1), интегрирующим множителем служит $1/T$, где T — *абсолютная температура*, $\delta q/T$ — (полный) дифференциал *энтропии*.

ГЛАВА 10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

10.1. ВВЕДЕНИЕ И ОБЗОР

10.1.1. Вводные замечания. Пункты 10.2-1—10.2-7 посвящены дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка и их геометрической интерпретации и включают элементы теории Гамильтона—Якоби канонических уравнений.

В пп. 10.3-1—10.3-4 изучаются характеристики и краевые задачи для гиперболических, параболических и эллиптических уравнений второго порядка.

В пп. 10.4-1—10.5-4 представлены решения наиболее важных линейных дифференциальных уравнений математической физики (уравнение теплопроводности, волновое уравнение и т. д.) с эвристической точки зрения и простейшие применения метода интегральных преобразований. Более усложненная теория линейных краевых задач и проблемы собственных значений описываются в гл. 15.

10.1-2. Дифференциальные уравнения с частными производными (см. также п. 9.1-2).

(а) Дифференциальное уравнение с частными производными r-го порядка есть функциональное уравнение вида

$$F\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \Phi;\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_1},\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial\Phi}{\partial x_n};\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2},\ \ldots\right)=0, \qquad (10.1\text{-}1)$$

включающее по меньшей мере одну частную производную r-го порядка от неизвестной функции $\Phi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ двух или более независимых переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

Функция $\Phi(x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n)$, удовлетворяющая данному уравнению (1) в некоторой области точек $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, называется **решением или интегралом** дифференциального уравнения с частными производными.

Общее решение (общий интеграл) данного уравнения r-го порядка (1) содержит, как правило, *произвольные функции*. Выделение **частных интегралов** производится путем задания соответствующих дополнительных условий, т. е. условий, налагаемых на функцию Φ и / или ее производные, на кривой, поверхности и т. д. в пространстве точек $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ (*краевые условия, начальные условия*).

Многие дифференциальные уравнения с частными производными допускают дополнительные решения (**особые интегралы**), которые не могут быть получены из общего интеграла ни при каком выборе произвольных функций (п. 10.2-1, с).

(b) Дифференциальное уравнение с частными производными называется **однородным**, если произведение $\alpha\Phi$ любой постоянной α на решение Φ также является решением.

Дифференциальное уравнение (1) называется **линейным**, если F — линейная функция от Φ и ее производных (см. также пп. 10.4-1 и 10.4-2).

(с) Система дифференциальных уравнений с частными производными. Условия совместности. Система дифференциальных уравнений

$$F_i\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots;\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1},\ \ldots\right)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots) \qquad (10.1\text{-}2)$$

содержит несколько неизвестных функций $\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ... и их частные производные.

Каждое дифференциальное уравнение (1) *или систему дифференциальных уравнений* (2) *можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка, принимая подходящие производные за новые неизвестные функции* (см. также п. 9.1-3).

Система дифференциальных уравнений (2) допускает решение Φ_1, Φ_2, ... только тогда, когда заданные функции F_i и их производные удовлетворяют **условиям совместности (условиям интегрируемости)**, которые гарантируют, что дифференцирование двух или более уравнений (2) приводит к совпадению производных высшего порядка от функций Φ_i.

Условия совместности получаются исключением функций Φ_k и их производных из последовательности уравнений, полученных дифференцированием данных дифференциальных уравнений системы (2).

Пример. Дана система

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + f_1(x_1, x_2) = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + f_2(x_1, x_2) = 0.$$

Дифференцируя, получим

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\,\partial x_2} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2\,\partial x_1} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1},$$

так что данная система уравнений совместна, если $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$.

(d) Существование решений. Как для обыкновенных дифференциальных уравнений (п. 9.1-4). фактическое существование и единственность решений для данного дифференциального уравнения с частными производными или системы таких уравнений требуют доказательства в каждом случае, даже если условия совместности соблюдаются. См. [10.5], где приведены некоторые теоремы существования.

10.1-3. Решение дифференциальных уравнений с частными производными; разделение переменных (см. также пп. 10.4-2—10.4-9). Во многих важных случаях попытка найти решение в виде

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1)\,\varphi_0(x_2, x_3, \ldots, x_n) \qquad (10.1\text{-}3)$$

позволяет записать данное дифференциальное уравнение (1) в разделенной форме

$$F_1\left(x_1, \varphi_1, \frac{d\varphi_1}{dx_1}, \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2}, \ldots\right) = F_2\left(x_2, x_3, \ldots, x_n; \varphi_0; \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_3}, \ldots\right).$$

Неизвестные функции $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_0(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$F_1\left(x_1, \varphi_1, \frac{d\varphi_1}{dx_1}, \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2}, \ldots\right) = C, \qquad (10.1\text{-}4a)$$

$$F_2\left(x_2, x_3, \ldots, x_n; \varphi_0; \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_3}, \ldots\right) = C, \qquad (10.1\text{-}4b)$$

где C — *константа разделения*, которая определяется в соответствии с заданными краевыми условиями или другими присоединенными условиями. Заметим, что уравнение (4*a*) — *обыкновенное* дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi_1(x_1)$; для уравнения (4*b*) иногда возможно повторение процесса разделения.

Разделение переменных с успехом применяется при решении многих линейных однородных уравнений с частными производными математической физики; иногда разделение становится возможным после соответствующей замены переменных (в качестве примеров см. пп. 10.4-3—10.4-9).

10.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

10.2-1. *Уравнения с двумя независимыми переменными. Геометрическая интерпретация (см. также пп. 9.2-2 и 17.3-11).

(a) Возьмем дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка относительно неизвестной функции $z=z(x, y)$:

$$F(x, y, z, p, q)=0 \qquad \left(p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},\ F_p^2+F_q^2\neq 0\right), \qquad (10.2\text{-}1)$$

где данная функция F дважды непрерывно дифференцируема, и рассмотрим x, y, z как декартовы прямоугольные координаты. Тогда каждое решение $z=z(x, y)$ уравнения (1) представляет поверхность (интегральную поверхность). Для любой интегральной поверхности, проходящей через фиксированную точку $M(x, y, z)$, уравнение касательной плоскости имеет вид

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y),$$

где p и q связаны уравнением (1), в котором x, y и z рассматриваются как постоянные. Огибающей семейства касательных плоскостей является конус (**конус Монжа**). Касательная плоскость к любой интегральной поверхности касается также конуса Монжа вдоль одной из его образующих. Линии на интегральной поверхности, касающиеся в каждой своей точке соответствующей образующей, называются **характеристическими линиями** или **характеристиками.** Вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=\frac{dz}{pF_p+qF_q}.$$

Рис. 10.2-1. Начальная полоса и одна характеристическая полоса на интегральной поверхности. I — конус Монжа в точке P_0.

Последовательность значений (x, y, z, p, q), как говорят, описывает **плоский элемент**, связывающий угловые коэффициенты p и q касательной плоскости с точкой (x, y, z). Данное уравнение (1) определяет поле плоских элементов (x, y, z, p, q), касательных к конусам Монжа (рис. 10.2-1).

Если F_p и F_q явно не зависят от p и q (*квазилинейное уравнение первого порядка*), то каждый конус Монжа вырождается в прямую (**ось Монжа**).

(b) Полосы и уравнения характеристик. Совокупность дифференцируемых функций

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad p=p(t), \quad q=q(t) \qquad (10.2\text{-}2)$$

представляет плоские элементы (точки и касательные плоскости) вдоль **полосы** регулярной поверхности, если функции (2) удовлетворяют *условию полосы*

$$\frac{dz}{dt}=p\frac{dx}{dt}+q\frac{dy}{dt}.$$

Для данного уравнения с частными производными (1) каждая совокупность функций (2), удовлетворяющая системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dz}{dt}=pF_p+qF_q, &&\frac{dx}{dt}=F_p,\ \frac{dy}{dt}=F_q,\\ &\frac{dp}{dt}=-(pF_z+F_x), &&\frac{dq}{dt}=-(qF_z+F_y)\end{aligned}\right\} \text{(характеристические уравнения, связанные с уравнением (1))}, \qquad (10.2\text{-}3)$$

описывает вместе с уравнением (1) **характеристическую полосу**. Характеристическая полоса касается конуса Монжа в каждой точке (x, y, z); соответствующая кривая

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t)$$

лежит на интегральной поверхности и является **характеристикой**. *Интегральные поверхности могут касаться друг друга только вдоль характеристик.*

(c) Особые интегралы (см. также пп. 9.2-2,b, 10.1-2,a и 10.2-3,c). Решения $z=z(x, y)$ уравнения (1), полученные исключением p и q из уравнений

$$F(x, y, z, p, q)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial p}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial q}=0, \tag{10.2-4}$$

являются *особыми интегралами*. Они не удовлетворяют условию $F_p^2+F_q^2 \neq 0$ и не могут быть получены из общего интеграла уравнения (1).

10.2-2. Задача с начальными условиями (задача Коши). Требуется найти решение $z=z(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее *начальным условиям* (*граничным условиям типа Коши*)

$$x=x_0(\tau), \quad y=y_0(\tau), \quad z=z_0(\tau), \quad p=p_0(\tau), \quad q=q_0(\tau), \tag{10.2-5a}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &F[x_0(\tau), y_0(\tau), z_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau)]=0, \\ &\frac{dz_0}{d\tau}=p_0\frac{dx_0}{d\tau}+q_0\frac{dy_0}{d\tau}; \end{aligned}\right\} \tag{10.2-5b}$$

эти условия задают начальную полосу, т. е. точки и касательные плоскости к искомой интегральной поверхности вдоль регулярной кривой C_0; проекция C_0 на плоскость Oxy есть простая кривая (п. 3.1-13). Чтобы решить задачу Коши, надо *найти решение*

$$x=x(t, \tau), \quad y=y(t, \tau), \quad z=z(t, \tau), \quad p=p(t, \tau), \quad q=q(t, \tau) \tag{10.2-6}$$

системы характеристических уравнений (3), *удовлетворяющее начальным условиям* (5) *при* $t=0$. *Результирующие функции* (6) *удовлетворяют* уравнению (1); решение $z=z(x, y)$ или в неявном виде $\varphi(x, y, z)=0$ находим, исключая параметры t и τ.

Задача с начальными условиями имеет единственное решение, если из данных начальных условий (5) *следует*

$$F_p\frac{dy}{d\tau}-F_q\frac{dx}{d\tau}\neq 0 \quad \left[\left.\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \tau)}\right|_{t=0}\neq 0\right]. \tag{10.2-7}$$

В противном случае задача имеет решение только тогда, когда данные начальные условия (5) *описывают характеристическую полосу; при этом имеется бесчисленное множество решений.*

∗ При постановке задачи можно было бы сначала считать заданной только начальную кривую C_0, а величины p_0 и q_0 определить из двух соотношений (5b). Если эти уравнения имеют несколько решений, то кривая C_0 может принадлежать различным начальным полосам, для каждой из которых задача Коши решается отдельно.

Пример. Найти решение уравнения $pq-z=0$, удовлетворяющее начальным условиям: $x_0=1$, $y_0=\tau$, $z_0=\tau^2$ (т. е. найти интегральную поверхность, проходящую через заданную кривую). Система уравнений (3) имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=q, \quad \frac{dy}{dt}=p, \quad \frac{dz}{dt}=2pq=2z, \quad \frac{dp}{dt}=p, \quad \frac{dq}{dt}=q.$$

Ее решение, принимающее при $t=0$ значения $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$:

$$p=p_0e^t, \quad q=q_0e^t, \quad z=z_0e^{2t}, \quad x=q_0e^t+x_0-q_0, \quad y=p_0e^t+y_0-p_0.$$

Начальные значения p_0 и q_0 связаны условиями $p_0q_0=\tau^2$ и $q_0=2\tau$, откуда $q_0=2\tau$, $p_0=\tau/2$. Следовательно,

$$x=2\tau(e^t-1)+1, \quad y=\frac{\tau}{2}(e^t-1)+\tau, \quad z=\tau^2e^{2t}.$$

Здесь $\left.\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(t,\ \tau)}\right|_{t=0}=2\tau\neq 0$. Исключая параметры t и τ, получаем единственное решение $z=\frac{(4y+x-1)^2}{16}$.

Если ищется решение данного уравнения $pq-z=0$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0=\tau$, $y_0=\tau^2$, $z_0=\tau^3$, то уравнения (5b) принимают вид $p_0q_0=\tau^3$ и $p_0+2\tau q_0=3\tau^2$ и имеют две системы решений $p_0'=\tau^2$, $q_0'=\tau$ и $p_0''=2\tau^2$, $q_0''=\tau/2$. Соответственно этому надлежит решать две задачи Коши. Для первой из них $x=\tau e^t$, $y=\tau^2e^t$, $z=\tau^3e^{2t}$, откуда $z=xy$.

Для второй $x=\tau(e^t+1)/2$, $y=\tau^2(2e^t-1)$, $z=\tau^3e^{2t}$.

В обоих случаях условие единственности выполняется.✱

10.2-3. Полные интегралы. Общие, частные, особые интегралы; решения характеристических уравнений.

(a) **Полный интеграл** уравнения с частными производными первого порядка (1) есть двупараметрическое семейство решений

$$z=\Phi(x,\ y,\ \lambda,\ \mu)\qquad\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial\lambda}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial\mu}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial\lambda}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial\mu}\neq 0\right),\tag{10.2-8}$$

причем функция Φ и ее производные

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=p(x,\ y,\ \lambda,\ \mu)=p,\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=q(x,\ y,\ \lambda,\ \mu)=q$$

в некоторой области пространства x, y, λ, μ должны иметь непрерывные частные производные по x, y, λ, μ. Данная последовательность значений $(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$, удовлетворяющая уравнению (1), должна определять единственные значения параметров λ, μ.

Полный интеграл (8) производит *общий интеграл*, если ввести произвольную функцию $\mu=\mu(\lambda)$ и исключить λ из уравнений

$$z-\Phi[x,\ y,\ \lambda,\ \mu(\lambda)]=0,\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}+\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}=0\tag{10.2-9}$$

(огибающая однопараметрического семейства интегральных поверхностей, п. 17.3-11).

(b) Получение частных интегралов из общего. Для получения *частного интеграла, соответствующего заданным начальным условиям* (5), надо найти соответствующую функцию $\mu(\lambda)$, входящую в общий интеграл, определенный в п. 10.2-3,a.

Функцию $\mu(\lambda)$ находим, исключая x, y и τ из соотношений

$$\frac{\partial\Phi(x,\ y,\ \lambda,\ \mu)}{\partial x}=p_0(\tau),\qquad \frac{\partial\Phi(x,\ y,\ \lambda,\ \mu)}{\partial y}=q_0(\tau),\qquad x=x_0(\tau),\qquad y=y_0(\tau).\tag{10.2-10}$$

(c) Отыскание особых интегралов. Исключая λ и μ из уравнений

$$z-\Phi(x,\ y,\ \lambda,\ \mu)=0,\qquad \frac{\partial\Phi(x,\ y,\ \lambda,\ \mu)}{\partial\lambda}=0,\qquad \frac{\partial\Phi(x,\ y,\ \lambda,\ \mu)}{\partial\mu}=0,\tag{10.2-11}$$

можно получить *особый интеграл* (огибающую двупараметрического семейства интегральных поверхностей).

(d) Решение характеристических уравнений. *Каждый полный интеграл* (8) *уравнения с частными производными первого порядка* (1) *производит решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (3). Функции $x=x(t)$, $y=y(t)$ получаются из соотношений

$$\frac{\partial\Phi(x,\ y,\ \lambda,\ \mu)}{\partial\lambda}=t,\qquad \frac{\partial\Phi(x,\ y,\ \lambda,\ \mu)}{\partial\mu}=\beta t,\tag{10.2-12}$$

где λ, μ и β — произвольные постоянные интегрирования; $z=z(t)$, $p=p(t)$, $q=q(t)$ получаются подстановкой $x=x(t,\ \lambda,\ \mu,\ \beta)$ и $y=y(t,\ \lambda,\ \mu,\ \beta)$ в равенства

$$z=\Phi(x,\ y,\ \lambda,\ \mu),\qquad p=\frac{\partial\Phi(x,\ y,\ \lambda,\ \mu)}{\partial x},\qquad q=\frac{\partial\Phi(x,\ y,\ \lambda,\ \mu)}{\partial y}.\tag{10.2-13}$$

(е) Специальные случаи. Табл. 10.2-1 содержит полные интегралы для некоторых часто встречающихся типов уравнений с частными производными первого порядка и позволяет применять методы п. 10.2-3 ко многим задачам.

Таблица 10.2-1

Полные интегралы для некоторых специальных типов уравнений с частными производными первого порядка *)

№	Тип уравнения		Полный интеграл $z = \Phi(x, y, \lambda, \mu)$
1	x, y, z явно не содержатся в уравнении	$F(p, q) = 0$	$z = \lambda x + \lambda' y + \mu$, где $F(\lambda, \lambda') = 0$
2a	Содержится только одна из переменных x, y, z	$p = f(x, q)$, $q = f(y, p)$	$z = \int f(x, \lambda)\, dx + \lambda y + \mu$, $z = \int f(y, \lambda)\, dy + \lambda x + \mu$
2b		$p = f(z, q)$	$x + \lambda y = \int \frac{dz}{\varphi(z, \lambda)} + \mu$, где $\varphi(z, \lambda)$ есть решение уравнения $p = f(z; \lambda p)$
2c		$p = f(z)$	$x + \lambda y = \int \frac{dz}{f(z)} + \mu$
3	Переменные разделены	$F_1(x, p) = F_2(y, q)$ $(= \lambda$, п. 10.1-3) или $p = f_1(x, \lambda)$, $q = f_2(y, \lambda)$	$z = \int f_1(x, \lambda)\, dx + \int f_2(y, \lambda)\, dy + \mu$
4	Обобщенное уравнение Клеро (см. также п. 9.2-4)	$z = px + qy + f(p, q)$	$z = \lambda x + \mu y + f(\lambda, \mu)$

*) Многие другие специальные типы уравнений приведены в [10.8]

10.2-4. Уравнения с n независимыми переменными.

(а) Задача с начальными условиями (см. также пп. 10.2-1 и 10.2-2). Требуется найти решение

$$z = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

уравнения с частными производными первого порядка

$$\left.\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \ldots, x_n; z; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \\ &\left[p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i},\ i = 1, 2, \ldots, n;\ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)^2 \neq 0\right], \end{aligned}\right\} \qquad (10.2\text{-}14)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} &z=z_0(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}), \quad x_i=x_{i0}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}), \\ &p_i=p_{i0}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}) \quad (i=1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{10.2-15a}$$

где система уравнений $x_i=x_{i0}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1})$ представляет гиперповерхность, не имеющую кратных точек, и

$$F(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}; \quad z_0; \quad p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{n0})=0,$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial \tau_j}=\sum_{k=1}^{n} p_{k0}\frac{\partial x_{k0}}{\partial \tau_j} \qquad (j=1, 2, \ldots, n-1). \tag{10.2-15b}$$

Чтобы получить соотношение между $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и z, надо найти решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt}=\sum_{k=1}^{n} p_k\frac{dx_k}{dt}, \qquad \frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_i}-p_i\frac{\partial F}{\partial z} \tag{10.2-16}$$

$(i=1, 2, \ldots, n)$ (*характеристические уравнения*), удовлетворяющее начальным условиям (15) при $t=0$, и исключить n параметров $\tau_1, \tau_2 \ldots, \tau_{n-1}$ и t.

Как и в случае $n=2$ (см. п. 10.2-2), можно в качестве начальных условий задать только функции z_0 и x_{i0}, а функции p_{i0} определить из уравнений (15b).

Задача с начальными условиями имеет единственное решение, если данные начальные условия (15) приводят к тому, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_1} & \frac{\partial F}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_n} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \tau_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \tau_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial \tau_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial \tau_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \tau_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \left[\left.\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(t, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1})}\right|_{t=0} \neq 0\right]. \tag{10.2-17}$$

(b) **Полные интегралы и решение характеристических уравнений** (см. также п. 10.2-3). Полный интеграл дифференциального уравнения (14) есть n-параметрическое семейство решений

$$z=\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \qquad \left\{\det\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i\, \partial \alpha_k}\right] \neq 0\right\}, \tag{10-2-18}$$

причем функция Φ и ее производные

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}=p_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

должны иметь непрерывные частные производные по всем x_i и α_i. Данная последовательность значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n; z; p_1, p_2, \ldots, p_n)$, удовлетворяющая уравнению (14), должна определять единственные значения параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Полный интеграл (18) производит *общий интеграл*, если ввести n произвольных функций $\alpha_k=\alpha_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1})$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ и исключить $n-1$ параметров λ_j из n уравнений

$$\left.\begin{aligned} &z=\Phi[x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}), \\ &\quad \alpha_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}), \ldots, \alpha_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1})], \\ &\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial \lambda_j}=0 \qquad (j=1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned}\right\} \tag{10.2-19}$$

Каждый полный интеграл (18) *производит решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (16). Функции $x_i = x_i(t)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ получим из соотношений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_k} = \beta_k t \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_n} = t, \tag{10.2-20}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ — $(2n-1)$ произвольных постоянных интегрирования; функции $z = z(t)$ и $p_i = p_i(t)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ найдем, подставляя $x_i = x_i(t;\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n;\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$ в выражения

$$z = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n;\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \qquad p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

(c) Особый интеграл (см. также пп. 10.2-1,c и 10.2-3,c). Особый интеграл дифференциального уравнения (14) есть решение $z = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, получающееся исключением p_i из $n+1$ уравнения

$$\left.\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \dots, x_n;\ z;\ p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}\right\} \tag{10.2-21}$$

Из данного полного интеграла особый интеграл получается, если исключить параметры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ из $n+1$ уравнения

$$\left.\begin{aligned} &z - \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n;\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0, \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}\right\} \tag{10.2-22}$$

10.2-5. Преобразования соприкосновения (см. также п. 9.2-3,*b*). Некоторые задачи, содержащие уравнения с частными производными первого порядка, могут быть упрощены введением дважды дифференцируемого преобразования

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, x_2, \dots, x_n;\ z;\ p_1, p_2, \dots, p_n), \\ &\bar{p} = \bar{p}_i(x_1, x_2, \dots, x_n;\ z;\ p_1, p_2, \dots, p_n), \\ &\bar{z} = \bar{z}(x_1, x_2, \dots, x_n;\ z;\ p_1, p_2, \dots, p_n) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ &\text{где} \\ &\frac{\partial(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n;\ \bar{z};\ \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n;\ z;\ p_1, p_2, \dots, p_n)} \neq 0, \end{aligned}\right\} \tag{10.2-23}$$

выбранного таким образом, что

$$d\bar{z} - \sum_{k=1}^{n} \bar{p}_k\, d\bar{x}_k = g(x_1, x_2, \dots, x_n;\ z;\ p_1, p_2, \dots, p_n)\left(dz - \sum_{k=1}^{n} p_k\, dx_k\right)$$
$$[g(x_1, x_2, \dots, x_n;\ z;\ p_1, p_2, \dots, p_n) \neq 0]. \tag{10.2-24}$$

При этом условии *полный дифференциал* $dz = \sum_{k=1}^{n} p_k\, dx_k$ *преобразуется также в полный дифференциал* $d\bar{z} = \sum_{k=1}^{n} \bar{p}_k\, d\bar{x}_k$, *где* $\bar{p}_i = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}_i}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Такое преобразование называется **преобразованием соприкоснооения**; преобразование соприкосновения необходимо сохраняет каждое условие полосы и будет также сохранять касание регулярных элементов поверхности для $n = 2$ (см. также п. 10.2-1).

Преобразование соприкосновения (23) преобразует данное дифференциальное уравнение (14) в новое дифференциальное уравнение

$$\bar{F}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n; \bar{z}; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n; z; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

$$\left(\bar{p}_i = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n\right) \qquad (10.2\text{-}25)$$

с решениями $\bar{z} = \bar{z}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. Иногда случается, что новое уравнение (25) не содержит $\bar{p}_i$ и не является тогда дифференциальным уравнением.

Пример. *n-мерное преобразование Лежандра* (см. также п. 9.2-3, b и 11.6-8):

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x}_i = p_i, \ \bar{p}_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ &\bar{z} = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k - z + C. \end{aligned}\right\} \qquad (10.2\text{-}26)$$

10.2-6. Канонические уравнения и канонические преобразования.

(a) Канонические уравнения. Для уравнения с частными производными первого порядка

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \qquad \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, \ldots, n\right), \qquad (10.2\text{-}27)$$

которое явно не содержит искомую функцию z, характеристические уравнения (16) имеют особенно простой вид

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{dx_k}{dt}, \qquad (10.2\text{-}28)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial G}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (10.2\text{-}29)$$

(*канонические уравнения*).

Замечание. Решение каждого дифференциального уравнения (14) может быть сведено к решению дифференциального уравнения простого вида (27) относительно $n+1$ независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$; каждое решение

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n; z)$$

дифференциального уравнения

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; z; -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial z}}, -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}}{\frac{\partial u}{\partial z}}, \ldots, -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_n}}{\frac{\partial u}{\partial z}}\right) = 0 \qquad (10.2\text{-}30)$$

производит соответствующее решение $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ данного уравнения (14), такое, что $u(x_1, x_2, \ldots, x_n; z) = 0$.

(b) ✻ Канонические преобразования (см. также п. 11.6-8). Дважды непрерывно дифференцируемое преобразование

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n), \\ &\bar{p}_i = \bar{p}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots, n), \\ &\text{где} \\ &\Delta = \frac{\partial(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n)} \neq 0, \end{aligned}\right\} \qquad (10.2\text{-}31)$$

называется **каноническим преобразованием,** если оно преобразует канонические уравнения (29) в новые канонические уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_i}{d\bar{t}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{p}_i}\bar{G}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n), \\ \frac{d\bar{p}_i}{d\bar{t}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\bar{G}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n) \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10.2\text{-}32)$$

Это должно иметь место для произвольной дважды дифференцируемой функции $G(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$. Преобразование (29) будет каноническим, если выражение $\sum\limits_{k=1}^{n}(p_k\, dx_k - \bar{p}_k\, d\bar{x}_k)$ будет полным дифференциалом для **производящей функции** $\Omega = \Omega(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n}(p_k\, dx_k - \bar{p}_k\, d\bar{x}_k) = d\,\Omega \text{ *)} \quad (10.2\text{-}33)$$

(имеется в виду, что $\bar{p}_k$ и $\bar{x}_k$ выражены по формулам (31)).

При соблюдении условия (33) функция $\bar{G}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)$ получается из функции G путем подстановки вместо x_i и p_i их выражений через $\bar{x}_i$ и $\bar{p}_i$.

Каноническое преобразование может быть выражено в терминах производящей функции $\Omega(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$; последняя часто задается как функция x_i и $\bar{x}_i$ или p_i и $\bar{p}_i$. В частности, каждая дважды дифференцируемая функция $\Omega = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ определяет каноническое преобразование такое, что

$$\sum_{k=1}^{n}(p_k\, dx_k - \bar{p}_k\, d\bar{x}_k) = d\Psi \quad \text{или} \quad p_i = \frac{\partial\Psi}{\partial x_i}, \quad \bar{p}_i = -\frac{\partial\Psi}{\partial \bar{x}_i}$$
$$(i = 1, 2, \dots, n); \quad (10.2\text{-}34)$$

чтобы получить формулы (31), нужно от независимых переменных x_i и $\bar{x}_i$ перейти к x_i и p_i.

Из формулы (34) следует, что $\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p_k}{\partial \bar{x}_i}$. Если записать соотношение (34) в виде

$$\sum_{k=1}^{n}(p_k\, dx_k + \bar{x}_k\, d\bar{p}_k) = d(\Psi + \sum \bar{x}_k\bar{p}_k),$$

то получатся формулы $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial \bar{p}_i}$. Аналогично получаются еще две группы формул

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial p_k} = -\frac{\partial x_k}{\partial \bar{p}_i}, \quad \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial p_k} = \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i} \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

---

*) Иногда такие канонические преобразования называют *унивалентными*; в дальнейшем речь идет только о них. Более общие канонические преобразования рассмотрены в книге [10.9].

Отметим, что для рассматриваемого канонического преобразования определитель матрицы Якоби $\Delta \equiv 1$.

Канонические преобразования (31) образуют группу (см. также п. 12.2-8).

Заданное дифференциальное уравнение первого порядка (27) с каноническими уравнениями (29), новыми каноническими уравнениями (32) связано с дифференциальным уравнением

$$\bar{G}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n) = 0 \qquad \left(\bar{p}_i = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}_i},\ i = 1, 2, \ldots, n\right). \tag{10.2-35}$$

Решение $\bar{z} = \bar{z}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ преобразованного уравнения (35) связано с решением $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ исходного уравнения (27) соотношением

$$\bar{z} = z - \Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n). \tag{10.2-36}$$

Уравнения (31) и (36) совместно составляют преобразование прикосновения (п. 10.2-5).

(с) $\ast$ **Скобки Пуассона.** Данная пара дважды непрерывно дифференцируемых функций $g(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $h(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n)$ определяет **скобку Пуассона**

$$[g, h] = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_k}\frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial h}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right). \tag{10.2-37}$$

Скобки Пуассона обладают следующими свойствами:

$$[h, g] = -[g, h], \quad [g, g] = 0, \quad [g, \text{const}] = 0, \tag{10.2-38}$$

$$[g_1 + g_2, h] = [g_1, h] + [g_2, h], \qquad [g_1 g_2, h] = g_2[g_1, h] + g_1[g_2, h], \tag{10.2-39}$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0 \ (\textit{тождество Пуассона}). \tag{10.2-40}$$

Заметим, что из $[f, g] = 0$, $[f, h] = 0$ *следует* $[g, h] = 0$.

Дано преобразование (31) и пусть

$$\bar{g}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

$$\bar{h}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n) = h(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

и

$$[\bar{g}, \bar{h}] = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{x}_k}\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{p}_k} - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}_k}\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{p}_k}\right). \tag{10.2-41}$$

(Первые два равенства означают, что функции $\bar{g}$ и $\bar{h}$ получены из функций g и h путем замены переменных x_i, p_i через $\bar{x}_i$, $\bar{p}_i$ с помощью преобразования, обратного к преобразованию (31).)

Данное преобразование (31) *есть каноническое преобразование тогда и только тогда, когда оно сохраняет скобки Пуассона, т. е. если* $[\bar{g}, \bar{h}] = [g, h]$ *для всех дважды непрерывно дифференцируемых функций* g, h.

Любое каноническое преобразование (31) удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{aligned} &[\bar{x}_i, \bar{x}_k] = 0, \quad [\bar{p}_i, \bar{p}_k] = 0, \\ &[\bar{x}_i, \bar{p}_k] = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k \end{cases} \end{aligned}\right\} \ (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{10.2-42}$$

Условия (42) *необходимы и достаточны для того, чтобы преобразование* (31) *было каноническим.*

Если $[g, h]=1$, то функции g и h называются **канонически сопряженными**; в частности, из (42) следует, что любая пара функций x_k, p_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ является канонически сопряженной. Часто приходится рассматривать преобразование вида (31), зависящее от параметра t:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_i&=\bar{x}_i(t;\ x_1, x_2, \ldots, x_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n),\\ \bar{p}_i&=\bar{p}_i(t;\ x_1, x_2, \ldots, x_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n).\end{aligned}\right\}\qquad(10.2\text{-}43)$$

Это преобразование будет каноническим (т. е. сохраняющим канонические уравнения (29), если соотношения (42) выполняются для любого значения t (см. п. 10.2-7, с)).

Отметим, что если x_i и p_i являются функциями параметра t, так что совокупность канонических уравнений (29) удовлетворяется, то для каждой дифференцируемой функции $f(t;\ x_1, x_2, \ldots, x_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n)$ имеем:

$$\frac{df}{dt}=[f, G]+\frac{\partial f}{\partial t}. \qquad (10.2\text{-}44)$$

В частности, из $\frac{\partial f}{\partial t}=0$ и $[f, G]=0$ следует, что $f=\mathrm{const}$.

10.2-7. Уравнение Гамильтона — Якоби. Решение канонических уравнений.

(а) Важным приложением теории уравнений с частными производными первого порядка является решение системы *обыкновенных* дифференциальных уравнений, которые могут быть записаны как канонические уравнения, связанные с дифференциальным уравнением специального вида

$$p+H(x, x_1, x_2, \ldots, x_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n)=0, \qquad (10.2\text{-}45)$$

$\left(p=\frac{\partial z}{\partial x};\ p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i};\ i=1, 2, \ldots, n\right)$ *(уравнение Гамильтона — Якоби)*.

Заметим, что уравнение содержит $n+1$ независимых переменных x и x_i.

Из уравнений (29) следует, что $dx/dt=1$; это можно записать как $x=t$ (принимая $x=0$ для $t=0$); $2n$ канонических уравнений (29) для x_i и p_i имеют вид [1])

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt}&=\frac{\partial}{\partial p_i}H(t, x_1, x_2, \ldots, x_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n),\\ \frac{dp_i}{dt}&=-\frac{\partial}{\partial x_i}H(t, x_1, x_2, \ldots, x_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n)\ (i,=1, 2, \ldots, n).\end{aligned}\right\}\qquad(10.2\text{-}46)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющая приведенную форму (46), играет важную роль в вариационном исчислении (п. 11. 6-8), а также в аналитической динамике и оптике.

Если удалось найти n-параметрическое решение

$$z=\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \qquad (10.2\text{-}47)$$

уравнения Гамильтона — Якоби (45), *для которого* $\det\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial\alpha_k}\right]\neq 0$, *то решение* $x_i=x_i(t)$, $p_i=p_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *системы* $2n$ *обыкновенных дифференциальных уравнений* (46) *получается из соотношений*

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=\beta_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \qquad (10.2\text{-}48)$$

где α_k *и* β_i суть $2n$ *постоянных интегрирования*; после отыскания функции $x_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n;\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ функции p_i находятся подстановкой x_i в соотношения $p_i=\partial\Phi/\partial x_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ (см. также п. 10.2-4, b).

1) Остающееся каноническое уравнение есть $dp/dt=-\partial H/\partial t$.

(b) Применение канонических преобразований (см. также п. 10.2-6, b). Если полный интеграл (47), дающий решение уравнений (46), неизвестен, то можно пытаться ввести каноническое преобразование, связывающее $2n+2$ переменных $x=t$, p, x_i, p_i с $2n+2$ новыми переменными $\bar{x}=\bar{t}$, $\bar{p}$, $\bar{x}_i$, $\bar{p}_i$, так что $p+H=\bar{p}+\bar{H}$, и

$$\frac{d\bar{x}_i}{d\bar{t}}=\frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{p}_i}, \qquad \frac{d\bar{p}_i}{d\bar{t}}=-\frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{x}_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{10.2-49}$$

В этом случае выражение

$$\sum_{k=1}^{n} p_k dx_k - H dt - \left(\sum_{k=1}^{n} \bar{p}_k\, d\bar{x}_k - \bar{H} d\bar{t}\right) = d\Omega \tag{10.2-50}$$

должно быть полным дифференциалом производящей функции $\Omega(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)$. В частности, пусть $\bar{t}=t$. Тогда каждая дважды дифференцируемая функция $\Omega=\Psi(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_n)$, для которой $\det\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i \partial\bar{x}_k}\right]\neq 0$, определяет каноническое преобразование такое, что

$$\left.\begin{aligned} &p_i=\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}, \quad \bar{p}_i=-\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{x}_i} \quad (i=1,\ 2\ \ldots,\ n),\\ &\bar{H}=H+\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{10.2-51}$$

Иногда возможно так выбрать это преобразование, что $\bar{H}$ уже не зависит явно от $\bar{x}_i$ (преобразование к *циклическим переменным* $\bar{x}_i$), тогда соответствующие уравнения (49) интегрируются непосредственно: $\bar{p}_i=\text{const}$.

(c) Теория возмущений. Дано решение (47) уравнения Гамильтона — Якоби (45); производящая функция $\Psi=\Phi(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_n)$ определяет каноническое преобразование (51), дающее *постоянные значения* преобразованным переменным

$$\bar{x}_i=\alpha_i,\ \bar{p}_i=-\beta_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{10.2-52}$$

Как показано в п. 10.2-7,а $2n$ уравнений (52) дают решение $x_i=x_i(t)$, $p_i=p_i(t)$ канонической системы (46).

Данное решение «невозмущенной» канонической системы (46) часто позволяет решить канонические уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial K}{\partial x_i} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\\ &\text{где}\\ &K=H(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)+\\ &\qquad\qquad +\varepsilon H_1(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n) \end{aligned}\right\} \tag{10.2-53}$$

и εH_1 — малый дополнительный член (*возмущение*, т. е. эффект малого отклонения тела в небесной механике). Применение известного решения (47) для «невозмущенного» уравнения Гамильтона — Якоби (45) вводит новые переменные $\bar{x}_i$, $\bar{p}_i$ каноническими преобразованиями (51) с производящей функцией

$$\Psi=\Phi(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_n).$$

Теперь уравнения (46) заменены уравнениями (53); $\bar{x}_i$ и $\bar{p}_i$ уже не являются постоянными и удовлетворяют преобразованным каноническим уравнениям

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt}=\varepsilon\frac{\partial\bar{H}_1}{\partial\bar{p}_i}, \qquad \frac{d\bar{p}_i}{dt}=-\varepsilon\frac{\partial\bar{H}_1}{\partial\bar{x}_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{10.2-54}$$

которые, возможно, легче решить, чем данную систему (53). Если записать

$$\bar{x}_i=\alpha_i+\varepsilon X_i(t), \qquad \bar{p}_i=-\beta_i+\varepsilon P_i(t) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то поправки $\varepsilon X_i(t)$, $\varepsilon P_i(t)$ к константам (52) производят соответствующие поправки к решениям невозмущенной системы (46).

10.3. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ, ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. ХАРАКТЕРИСТИКИ

10.3-1. Квазилинейные уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными. Характеристики.

(a) Уравнение с частными производными r-го порядка называется **квазилинейным**, если оно линейно относительно производных r-го порядка от неизвестной функции Φ. Квазилинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными x и y имеет вид

$$a_{11}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+B=0, \qquad (10.3\text{-}1)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} и B — функции от x, y, Φ, $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$. Предполагается, что все встречающиеся функции и их производные непрерывны.

(b)* Характеристики. Дана кривая C_0 (в плоскости Oxy), описываемая уравнениями

$$x=x(\tau), \qquad y=y(\tau), \qquad (10.3\text{-}2a)$$

и *последовательность краевых условий типа Коши* [1])

$$\Phi=z(\tau), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x}=p(\tau), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=q(\tau) \qquad \left(\frac{dz}{d\tau}=p\frac{dx}{d\tau}+q\frac{dy}{d\tau}\right) \qquad (10.3\text{-}2b)$$

(эти условия в п. 10.2-2 назывались *начальными*).

Кривая C_0 вместе с функциями ($2b$) образует полосу первого порядка C_1.

Заданная совокупность функций (2) единственным образом определяет значения

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=u(\tau), \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}=v(\tau), \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=w(\tau)$$

(и также значения производных высшего порядка от Φ) на кривой ($2a$) в каждой точке P_0, где функции ($2a$) не удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0 \\ \text{или}\quad &\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.3\text{-}4)$$

В самом деле, производные u, v, w от Φ на C_1 должны удовлетворять уравнению (1) и условиям полосы второго порядка

$$\frac{dp}{d\tau}=u\frac{dx}{d\tau}+v\frac{dy}{d\tau}, \qquad \frac{dq}{d\tau}=v\frac{dx}{d\tau}+w\frac{dy}{d\tau}, \qquad (10.3\text{-}5)$$

так что, например,

$$v=\frac{a_{11}\,dy\,dp+a_{22}\,dx\,dq+B\,dx\,dy}{a_{11}\,dy^2-2a_{12}\,dx\,dy+a_{22}\,dx^2}. \qquad (10.3\text{-}6)$$

---

[1]) Если заданы граничные значения *нормальной производной* $\partial\Phi/\partial n$ (п. 5.6-1)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}}\left(q\frac{dx}{d\tau}-p\frac{dy}{d\tau}\right)=P(\tau), \qquad (10.3\text{-}3)$$

то решая уравнение (3) вместе с условием $\frac{dz}{d\tau}=p\frac{dx}{d\tau}+q\frac{dy}{d\tau}$, найдем $p(\tau)$ и $q(\tau)$.

Уравнения (4) выполняются в точке P_0, если C_0 есть дуга **характеристической кривой** (называемой часто **характеристикой**) $y=y(x)$, удовлетворяющей уравнению (4), или если C_0 касается такой кривой в точке P_0.

Собственно говоря, **характеристики** связывают с дифференциальным уравнением (1) кривые $x=x(\tau)$, $y=y(\tau)$, $z=z(\tau)$ на интегральной поверхности $z=\Phi(x, y)$, так что $y=y(x)$ удовлетворяет уравнению (4). Если уравнение (1) линейно, т. е. a_{11}, a_{12}, a_{22} и B не зависят от z, p и q, то характеристики определяются независимо от выбора z, p и q, т. е. независимо от интегральной поверхности.

Основная задача Коши для уравнения (1) ставится следующим образом. Дана полоса первого порядка C_1; надо найти решение $\Phi(x, y)$ уравнения (1) такое, чтобы поверхность $\Phi(x, y)$ содержала полосу C_1. (Решение ищется в некоторой малой окрестности кривой C_0; см. также п. 10.3-4.) Если полоса C_1 целиком состоит из точек, в которых уравнения (4) соблюдаются (характеристическая полоса), то, чтобы на ней можно было построить полосу второго порядка, должно соблюдаться дополнительное условие. Так как на интегральной поверхности выражение (6) должно быть конечным, то

$$p=\frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad \text{и} \quad q=\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

должны удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$a_{11}\,dy\,dp+a_{22}\,dx\,dq+B\,dx\,dy=0$$

или

$$\frac{dq}{dp}=-\frac{a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{22}}-\frac{B}{a_{22}}\left(\frac{dy}{dp}\right) \tag{10.3-7}$$

на каждой характеристике, определенной уравнением (4) с соответствующим знаком плюс или минус. В этом случае полоса второго порядка определяется не однозначно. Это означает, что на характеристических полосах возможно ветвление интегральной поверхности, т. е. имеются различные интегральные поверхности, для которых вдоль характеристики значения Φ, p и q совпадают, а некоторые производные высших порядков оказываются различными.

Замечание. Производные второго порядка от Φ могут быть разрывны (но обязательно конечны) на характеристике, так что различные решения могут быть соединены вместе вдоль характеристик.

(с) Гиперболическое, параболическое и эллиптическое уравнения. Данное квазилинейное уравнение с частными производными (1) является на выбранной интегральной поверхности:

1) **гиперболическим,** если $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$ во всех точках поверхности; тогда уравнение (4) описывает два различных семейства характеристик;

2) **параболическим,** если $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$; тогда существует одно семейство характеристик;

3) **эллиптическим,** если $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$; тогда действительных характеристик не существует.

Следовательно, тип квазилинейного уравнения зависит от того, какое решение рассматривается, и может быть разным для разных решений.

10.3-2. Решение гиперболических уравнений методом характеристик (см. также п. 10.3-4). В *гиперболическом* случае $(a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0)$ одновременное решение четырех обыкновенных дифференциальных уравнений (4) и (7) выражает $p=\partial\Phi/\partial x$ и $q=\partial\Phi/\partial y$ на интегральной поверхности как функции x и y, так что $\Phi=\Phi(x, y)$ может быть получена дальнейшим интегрированием. Во многих приложениях $\partial\Phi/\partial x$ и $\partial\Phi/\partial y$ более важны, чем $\Phi(x, y)$ (компоненты скорости); этот метод образует основу для многих аналитических и численных методов решения в теории сжимаемой жидкости.

Вычисления значительно упрощаются в специальном случае. Если $B=0$, то

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1\left(\frac{dq}{dp}\right)_2=-1, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2\left(\frac{dq}{dp}\right)_1=-1, \tag{10.3-8}$$

где индекс означает, что в уравнениях характеристик (4) и (7) выбираются соответственно знаки плюс или минус. Если в дополнение a_{11}, a_{12} и a_{22} зависят только от $\partial\Phi/\partial x$ и $\partial\Phi/\partial y$, то нужно решать только уравнение (7) для получения характеристик (двумерное устойчивое сверхзвуковое течение жидкости). Напротив, если a_{11}, a_{12} и a_{22} зависят только от x и y, то нужно решать только уравнение (4).

10.3-3. Преобразование гиперболических, параболических и эллиптических уравнений к каноническому виду. Пусть a_{11}, a_{12} и a_{22} — функции только от x и y, так что обыкновенное дифференциальное уравнение (4) разделяется на два уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1(x, y) \text{ с решениями } h_1(x, y)=\alpha_1, \tag{10.3-9a}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_2(x, y) \text{ с решениями } h_2(x, y)=\alpha_2, \tag{10.3-9b}$$

где α_1, α_2 — произвольные константы.

В зависимости от знака функции $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ в рассматриваемой области значений x, y [1]) возможны три случая.

1. Гиперболическое дифференциальное уравнение ($a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$). $\lambda_1(x, y)$ и $\lambda_2(x, y)$ действительны и различны. *Существуют два однопараметрических семейства действительных характеристик* (9a) и (9b); через каждую точку рассматриваемой области проходит одна кривая каждого семейства. Вводя новые координаты

$$\bar{x}=h_1(x, y), \quad \bar{y}=h_2(x, y), \tag{10.3-10}$$

преобразуем данное уравнение (1) к канонической форме

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\bar{x}\,\partial\bar{y}}=f\left(\bar{x}, \bar{y}, \Phi, \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{x}}, \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{y}}\right). \tag{10.3-11}$$

Система координат

$$\xi=\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}, \quad \eta=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2} \tag{10.3-12}$$

производит вторую каноническую форму

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}=g\left(\xi, \eta, \Phi, \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}, \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right). \tag{10.3-13}$$

2. Параболическое дифференциальное уравнение ($a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$). $\lambda_1(x, y)$ и $\lambda_2(x, y)$ действительны и тождественны. *Существует одно однопараметрическое семейство действительных характеристик* (9); через каждую точку (x, y) рассматриваемой области проходит одна характеристика. Вводя новые координаты

$$\bar{x}=h_1(x, y), \quad \bar{y}=h_0(x, y), \tag{10.3-14}$$

где $h_0(x, y)$ есть произвольная дифференцируемая функция такая, что $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)}\neq 0$, преобразуем уравнение (1) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\bar{x}^2}=f\left(\bar{x}, \bar{y}, \Phi, \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{x}}, \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{y}}\right). \tag{10.3-15}$$

3. Эллиптическое дифференциальное уравнение ($a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$). $\lambda_1(x, y)$ и $\lambda_2(x, y)$ и, следовательно, $h_1(x, y)$ и $h_2(x, y)$ — комплексно сопряженные; *действительных характеристик не существует.* Вводя

$$\bar{x}=\frac{h_1(x, y)+h_2(x, y)}{2}, \quad \bar{y}=\frac{h_1(x, y)-h_2(x, y)}{2i}, \tag{10.3-16}$$

---

[1]) В обычных случаях дискриминант $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ не меняет знака в рассматриваемой области. Заметим, что знак $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ есть инвариант относительно непрерывно дифференцируемых преобразований координат $\bar{x}=\bar{x}(x, y)$, $\bar{y}=\bar{y}(x, y)$ с ненулевым якобианом.

* В последнее время большое значение получили задачи смешанного типа, когда дискриминант $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ меняет знак в рассматриваемой области (см. [10.7]). *

преобразуем уравнение (1) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\bar{y}^2}=f\left(\bar{x},\ \bar{y},\ \Phi,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{x}},\ \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{y}}\right). \tag{10.3-17}$$

Эти три типа уравнений с частными производными существенно отличаются друг от друга заданием краевых условий, обеспечивающих существование и единственность решения (пп. 10.3-4 и 15.6-2).

10.3-4. Типичные краевые задачи для уравнений второго порядка.

(а) Гиперболические дифференциальные уравнения. В задаче Коши (задача с начальными условиями) в п. 10.3-1, b требовалось

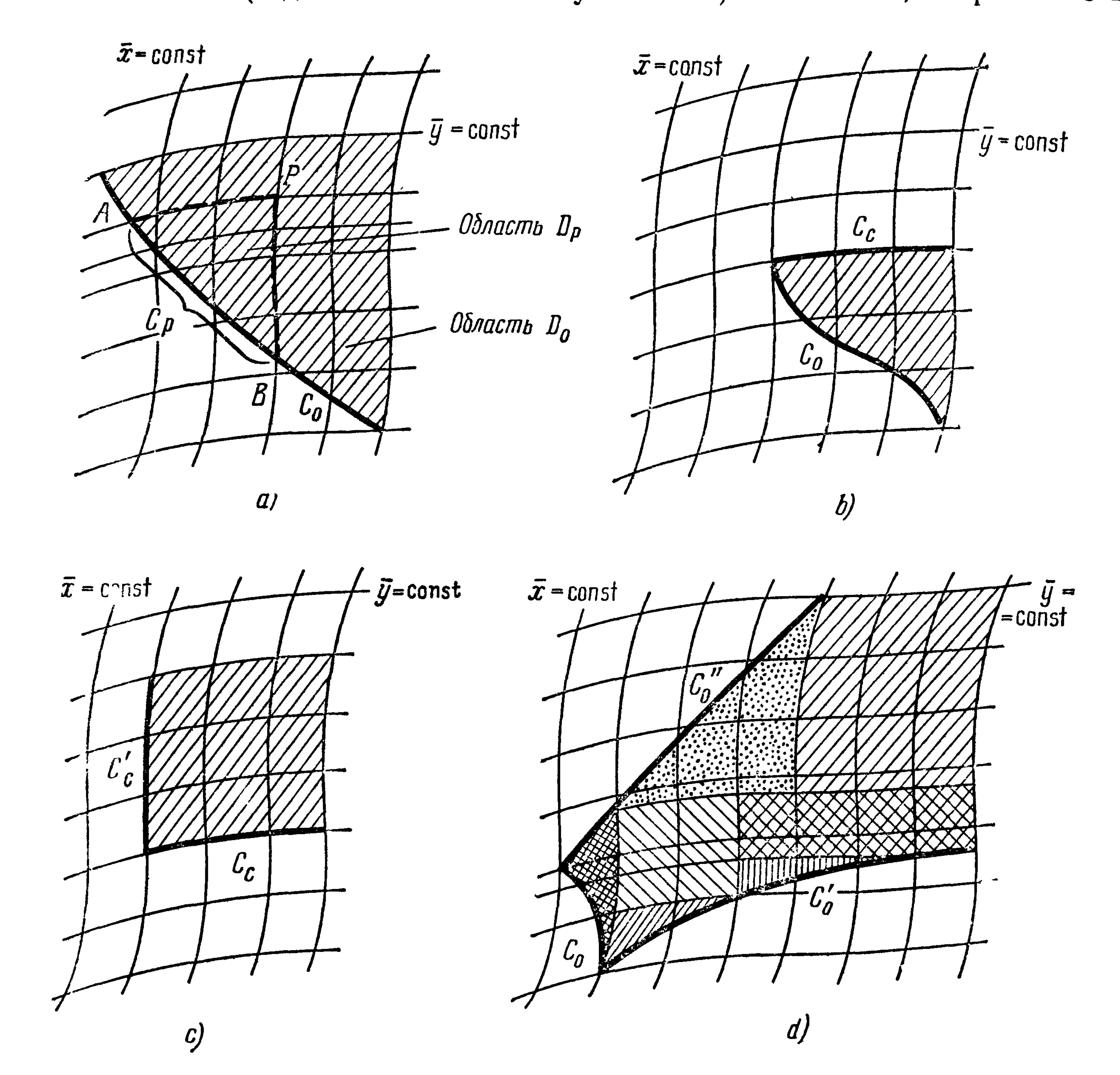


Рис. 10.3-1. Краевые задачи для гиперболических дифференциальных уравнений.

найти решение гиперболического дифференциального уравнения (1), задавая Φ, $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ на дуге C_0 регулярной кривой, которая не является характеристикой (4) и не касается характеристик. Такая кривая пересекает каждую характеристику не более чем в одной точке; *заданные начальные значения определяют Φ в треугольной области D_0, ограниченной C_0 и характеристиками каждого семейства* (рис. 10.3-1, *а*). Более точно, значения Φ в каждой точке P области D_0 определяются значениями Φ и ее производных на части C_P дуги C_0, которая ограничена характеристиками, проходящими через точку P.

Второй тип краевой задачи задает только линейное соотношение $\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \beta\Phi = b(x, y)$ на дуге C_0, определенной выше; в дополнение Φ задана на характеристике C_C, проходящей через конечную точку дуги C_0 (рис. 10.3-1, b).

Третий тип краевой задачи задает Φ на двух пересекающихся дугах характеристик C_C и C'_C (рис. 10.3-1, c) (*задача Гурса*).

Комбинации этих трех типов задач могут указывать допустимые краевые условия для более сложных границ. Так, на рис. 10. 3-1, d Φ, $\partial\Phi/\partial x$ и $\partial\Phi/\partial y$ могут быть заданы на C_0, а соотношения вида $\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \beta\Phi = b(x, y)$ — на каждой из дуг C'_0 и C''_0. Решения в разных областях, показанных на рис. 10.3-1, «склеиваются» вдоль характеристик так, что Φ непрерывна, а $\partial\Phi/\partial x$ и $\partial\Phi/\partial y$ могут быть разрывными. Заметим, что *замкнутые границы в плоскости Oxy не допускаются.*

Пример. Начальные задачи для гиперболического *одномерного волнового уравнения*, п. 10.3-5.

(b) Параболические дифференциальные уравнения. Здесь существует только одно семейство характеристик. Хотя задача Коши может опять быть разрешима для соответствующей дуги C_0, однако обычно задается Φ на характеристике $\bar{x} (= t) = 0$ и линейная комбинация $\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \beta\Phi$ на двух кривых, которые не пересекают и не касаются друг друга или характеристик. *Замкнутые границы в плоскости Oxy не допускаются.*

Пример. Допустима следующая краевая задача для параболического *уравнения диффузии* $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$: задано $\Phi(x, t) = \Phi_0(x)$ на характеристике $t = 0$ (*начальное условие*) и $\alpha(x, t)\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \beta(x, t)\Phi$ на кривых $x = \alpha$ и $x = \beta$ (*краевые условия*).

(c) Эллиптические дифференциальные уравнения (см. также пп. 10.4-1 и 15.6-2). Действительных характеристик не существует; краевые условия типа Коши не допускаются. Типичные задачи: задают линейную комбинацию $\alpha(x, y)\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \beta(x, y)\Phi$ на кривой C, окружающей ограниченную область или неограниченную область (*корректная краевая задача*).

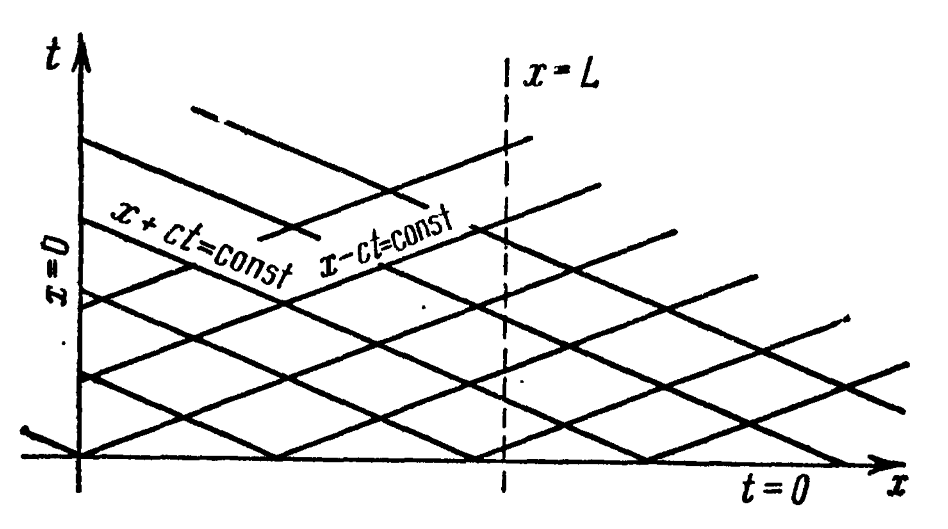


Рис. 10.3-2. Характеристики для одномерного волнового уравнения $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$.

10.3-5. Одномерное волновое уравнение (см. также пп. 10.3-4, a 10.4-8, a и 10.4-9, b). Гиперболическое дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2\Phi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

(*одномерное волновое уравнение*) (10.3-18)

имеет общее решение

$$\Phi(x, t) = \Phi_1(x - ct) + \Phi_2(x + ct), \quad (10.3\text{-}19)$$

которое представляет пару **бегущих волн**, распространяющихся соответственно вправо и влево вдоль оси Ox с **постоянной скоростью** c. Характеристики $x \pm ct = \text{const}$ есть геометрическое место точек постоянной фазы (рис. 10.3-2). В пп. 10.3-5, a, b и c приведены решения для трех типов задач с начальными условиями. На практике метод

Фурье (п. 10.4-9) может быть предпочтительнее, особенно в приложениях к неоднородным дифференциальным уравнениям (вынужденные колебания).

(а) Начальные условия

$$\Phi(x,\ 0)=\Phi_0(x),\qquad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{t=0}=v_0(x)\qquad(-\infty<x<\infty)\tag{10.3-20}$$

представляют *корректную задачу Коши* (пп. 10.3-1 и 10.3-4, а; см. также рис. 10.3-1, *а* и 10.3-2). Решение есть

$$\Phi(x,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi_0(x-ct)+\Phi_0'(x+ct)\right]+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}v_0(\xi)\,d\xi,\tag{10.3-21}$$

(*решение Даламбера*).

Возмущение начальных условий, произведенное на заданном интервале $a<x<b$, затрагивает решение в интервале $a-ct<x<b+ct$. Разрывность $\Phi_0(x)$ распространяется в оба направления.

(b) Начальные условия

$$\Phi(x,\ 0)=\Phi_0(x),\qquad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{t=0}=v_0(x)\qquad(x\geqslant 0)\tag{10.3-22}$$

и краевое условие

$$\Phi(0,\ t)=0\qquad(t\geqslant 0)\tag{10.3-23}$$

представляют смешанный тип краевой задачи (см. также п. 10.3-4, а и рис. 10.3-1, *d* и 10.3-2). Решение

$$\Phi(x,t)=\frac{1}{2}\left[P(x-ct)+P(x+ct)\right]+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}Q(\xi)\,d\xi,\tag{10.3-24}$$

$$P(x)=\begin{cases}\Phi_0(x) & (x\geqslant 0),\\ -\Phi_0(-x) & (x<0),\end{cases}\qquad Q(x)=\begin{cases}v_0(x) & (x\geqslant 0),\\ -v_0(-x) & (x<0)\end{cases}\tag{10.3-25}$$

представляет *суперпозицию прямой и отраженной волн.*

(с) Начальные условия

$$\Phi(x,\ 0)=\Phi_0(x),\qquad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{t=0}=v_0(x)\qquad(0\leqslant x\leqslant L)\tag{10.3-26}$$

и краевые условия

$$\Phi(0,\ t)=\Phi(L,\ t)=0\qquad(t\geqslant 0)\tag{10.3-27}$$

определяют другую смешанную задачу (см. также рис. 10.3-1, *d*, и 10.3-2). Решение дается формулой (24), где $P(x)$ и $Q(x)$ интерпретируются как периодические функции с периодом $2L$ и соответственно равные $\Phi_0(x)$ и $v_0(x)$ для $0\leqslant x\leqslant L$ и $-\Phi_0(-x)$ и $-v_0(-x)$ для $-L\leqslant x<0$.

10.3-6. Метод Римана — Вольтерра для линейных гиперболических уравнений (см. также пп. 10.3-4 и 15.5-1). Метод позволяет иногда получать решение задачи Коши (п. 10.3-1) для действительного гиперболического дифференциального уравнения

$$\mathsf{L}\Phi(x,\ y)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}+a(x,\ y)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+b(x,\ y)\frac{\partial\Phi}{\partial y}+c(x,\ y)\,\Phi=f(x,\ y),\tag{10.3-28}$$

где Φ и $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ заданы на граничной кривой C_0, удовлетворяющей условиям п. 10.3-1. В соответствии с рис. 10.3-1, *а* решение в каждой точке P с координатами $x=\xi$, $y=\eta$ выражается в зависимости от начальных значений

$\Phi(x, y)$, $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$ на сегменте граничной кривой C_P, ограниченном характеристиками, проходящими через точку P [1]):

$$\Phi(\xi, \eta) = G_R\Phi|_A - \int\limits_{C_P} G_R\Phi(a\,dy - b\,dx) + \int\limits_{C_P}\left(\Phi\frac{\partial G_R}{\partial y}dy + G_R\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx\right) + \iint\limits_{D_P} G_R f\,dx\,dy \equiv G_R\Phi|_B - \int\limits_{C_P} G_R\Phi(a\,dy - b\,dx) - \int\limits_{C_P}\left(\Phi\frac{\partial G_R}{\partial x}dx + G_R\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy\right) + \iint\limits_{D_P} G_R f\,dx\,dy, \quad (10.3\text{-}29)$$

где так называемая **функция Римана — Грина** $G_R(x, y; \xi, \eta)$ непрерывно дифференцируема внутри области D_P, ограниченной C_P и характеристиками, проходящими через точку P, и удовлетворяет условиям простой краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{L}G_R = \frac{\partial^2 G_R}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(aG_R) - \frac{\partial}{\partial y}(bG_R) + cG_R = 0 \quad (x, y \text{ внутри } D_P),\\ &G_R = \exp\int\limits_{\eta}^{y} a(\xi, y)\,dy \quad (x = \xi),\\ &G_R = \exp\int\limits_{\xi}^{x} b(x, \eta)\,dx \quad (y = \eta). \end{aligned}\right\} \quad (10.3\text{-}30)$$

Примеры. Для $a = b = c = 0$ функция $G_R = 1$. Для $a = b = 0$, $c = \text{const}$ функция $G_R = J_0[\sqrt{4c(x-\xi)(y-\eta)}]$, где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка нуль (п. 21.8-1). Для многих практических применений, в которых встречаются линейные гиперболические дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, предпочтительнее метод интегральных преобразований (п. 10.5-1).

10.3-7. Уравнения с тремя и более независимыми переменными. Действительное уравнение с частными производными вида

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial x_k} + B\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; \Phi; \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (10.3\text{-}31)$$

где $\Phi = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называется **эллиптическим** дифференциальным уравнением, если матрица $[a_{ik}]$ положительно определена (п. 13.5-2) всюду в рассматриваемой области.

Во многих задачах рассматриваются неэллиптические дифференциальные уравнения с неизвестной функцией Φ, зависящей от n пространственных координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и временно́й координаты t.

Дифференциальные уравнения вида

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial x_k} + B, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial x_k} + B, \quad (10.3\text{-}32)$$

где матрица $[c_{ik}] = [c_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)]$ положительно определена и B есть функция от x_i, t, Φ и $\partial\Phi/\partial x_i$, являются соответственно примерами уравнений **гиперболического** и **параболического** типов [10.7].

---

1) См. также формулу (10.3-4).

Характеристики более общих дифференциальных уравнений (31) и (32) суть поверхности или гиперповерхности, на которых краевые условия типа Коши не позволяют определить производные высших порядков искомого решения. Эллиптические дифференциальные уравнения не имеют действительных характеристик. Понятие характеристик может быть распространено на уравнения с частными производными порядка высшего, чем два, и на некоторые системы уравнений с частными производными [10.5].

10.4. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ

10.4-1. Физические основы и обзор.

(a) Многие проблемы классической физики приводят к отысканию решения $\Phi(x, t)$ или $\Phi(\mathbf{r}, t)$ линейного уравнения с частными производными в заданном интервале или области V (табл. 10.4-1). Неизвестная функция Φ и/или ее производные должны, кроме того, удовлетворять заданным *начальным условиям* при $t=0$ и линейным *краевым условиям* на границе S области V. Аналогичные задачи возникают в квантовой механике.

Каждое дифференциальное уравнение, приведенное в табл. 10.4-1, является *однородным* (п. 10.1-2, b), если $f=0$. Заданное краевое условие также однородно, если наряду с каждой функцией Φ, которая удовлетворяет краевому условию, ему удовлетворяет и функция $\alpha\Phi$. Неоднородности возникают в результате действия внешних влияний (силы, источники тепла, электрические заряды или токи) на рассматриваемую физическую систему. Для эллиптических уравнений типично описание *стационарных процессов* (стационарные температурные и электростатические поля, упругая деформация). Параболическое и гиперболическое дифференциальные уравнения описывают *переходные процессы* (свободные колебания, возникающие вследствие заданных начальных возмущений) или, если имеются неоднородности, зависящие от времени («вынуждающие» функции в дифференциальных уравнениях или краевых условиях), описывают *процессы распространения возмущений* (вынужденные колебания, излучение).

Можно связать каждую задачу обсуждаемого типа со своей аппроксимирующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений, заменяющей каждую пространственную производную разностным коэффициентом в смысле п 20.8-3 (*метод разностно дифференциальных уравнений*). Этот метод применим не только для численного решения; аналогия с дискретными проблемами типа, описанного в пп. 9.4-1 — 9.4-8, может приводить к интересным физическим аналогиям.

(b) Конструкция решения методом суперпозиции. Многие важные методы решения линейных дифференциальных уравнений основываются на фундаментальных теоремах суперпозиции, сформулированных явно в пп. 9.3-1 и 15.4-2. *Метод наложения (суперпозиции) разумно выбранной последовательности основных функций дает возможность получать решения, удовлетворяющие заданным краевым условиям и/или заданным начальным условиям, а также получать решения неоднородных уравнений. Разложения по собственным функциям* (пп. 10.4-2 и 15.4-12) *и методы интегральных преобразований* (пп. 9.3-7, 9.4-5 и 10.5-1—10.5-3) представляют систематические схемы для конструирования таких решений. *Методы функций Грина* (пп. 9.3-3, 9.4-3, 15.5-1—15.5-4, 15.6-6, 15.6-9 и 15.6-10) являются суперпозиционными схемами, которые сводят решение соответствующих задач к задачам с простыми вынуждающими функциями или краевыми условиями.

Общая теория линейных краевых задач содержится в гл. 15. Пункты 10.4-3—10.4-8 представляют применение частных методов с эвристической точки зрения элементарного курса.

(c) Выбор системы координат. Система координат x^1, x^2 или x^1, x^2, x^3, определяющая точку $\mathbf{r}$, обычно выбирается так, что, во-первых, *возможно разделение переменных* (п. 10.1-3) и/или, во-вторых, *заданная граница S представляет координатную линию или поверхность или пару координатных линий или поверхностей.*

Таблица 10.4-1

Важнейшие линейные дифференциальные уравнения математической физики

Тип	Физический смысл	Одномерное уравнение	Многомерное уравнение	Дополнительные условия
Параболический	**Уравнение теплопроводности, диффузии**	$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=f(x,\ t)$	$\nabla^2\Phi-\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=f(\mathbf{r},\ t)$	Краевые условия; начальное условие для Ф
Гиперболический	**Волны (струны, мембраны, течение жидкости), затухающие волны. Телеграфное уравнение**	$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=f(x,\ t)$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-a_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-a_1\frac{\partial\Phi}{\partial t}-a_2\Phi=f(x,\ t)$	$\nabla^2\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=f(\mathbf{r},\ t)$, $\nabla^2\Phi-a_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-a_1\frac{\partial\Phi}{\partial t}-a_2\Phi=f(\mathbf{r},\ t)$	Краевые условия; начальные условия для Ф и $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$
Эллиптический	**Статический случай**	$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=f(x)$	$\nabla^2\Phi=f(\mathbf{r})$	Только краевые условия
Уравнения 4-го порядка	**Упругие колебания**	$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=f(x,\ t)$	$\nabla^2\nabla^2\Phi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=f(\mathbf{r},\ t)$	Краевые условия; начальные условия для Ф и $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$
	Статический случай	$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}=f(x)$	$\nabla^2\nabla^2\Phi=f(\mathbf{r})$	Только краевые условия

10.4-2. Линейные краевые задачи (см. также пп. 15.4-1 и 15.4-2).

(a) Пусть V — заданная трех- или двумерная область точек (**r**) и пусть S — граничная поверхность или граничная кривая области V. Требуется найти решение данного дифференциального уравнения

$$\mathsf{L}\Phi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \qquad (\mathbf{r} \in V), \tag{10.4-1a}$$

удовлетворяющее последовательности краевых условий

$$\mathsf{B}_i\Phi(\mathbf{r}) = b_i(\mathbf{r}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N; \quad \mathbf{r} \in S), \tag{10.4-1b}$$

где $\mathsf{L}\Phi$ и $\mathsf{B}_i\Phi$ — линейные однородные функции от неизвестной функции $\Phi(\mathbf{r})$ и ее производных. *Каждое решение этой линейной краевой задачи можно записать в виде суммы* $\Phi = \Phi_A + \Phi_B$ *решений простых краевых задач*

$$\mathsf{L}\Phi_A(\mathbf{r}) = 0 \qquad (\mathbf{r} \in V), \tag{10.4-2a}$$

$$\mathsf{B}_i\Phi_A(\mathbf{r}) = b_i(\mathbf{r}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N; \qquad \mathbf{r} \in S) \tag{10.4-2b}$$

и

$$\mathsf{L}\Phi_B(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r} \in V), \tag{10.4-3a}$$

$$\mathsf{B}_i\Phi_B(\mathbf{r}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N; \quad \mathbf{r} \in S). \tag{10.4-3b}$$

Заметим, что уравнение (2) является однородным дифференциальным уравнением, в то время как уравнение (3) имеет однородные краевые условия.

(b) Однородные дифференциальные уравнения с неоднородными краевыми условиями. Частные решения, приведенные в пп. 10.4-3 — 10.4-6, обычно позволяют представить $\Phi_A(\mathbf{r})$ как сумму ряда или определенный интеграл:

$$\Phi_A(\mathbf{r}) = \sum_{\mu} \alpha_\mu \Phi_\mu(\mathbf{r}) \quad \text{или} \quad \Phi_A(\mathbf{r}) = \int_{S_\mu} \alpha(\mu)\, \Phi_\mu(\mathbf{r})\, d\mu \tag{10.4-4}$$

от подходяще выбранных частных решений $\Phi_\mu(\mathbf{r})$ уравнения (2*a*). Коэффициенты α_μ или $\alpha(\mu)$ выбираются так, чтобы удовлетворялись краевые условия (2*b*). Часто функции $\Phi_\mu(\mathbf{r})$ образуют *полную ортонормированную систему* (п. 15.2-4; например, ряды Фурье, интегралы Фурье); *тогда возможно представить данные функции* $b_i(\mathbf{r})$ *в виде* (4) *и найти неопределенные коэффициенты* α_μ *или* $\alpha(\mu)$ *методом сравнения коэффициентов* (п. 10.4-9).

(c) Неоднородные дифференциальные уравнения с однородными краевыми условиями: разложения по собственным функциям (см. также пп. 15.4-5 — 15.4-12). Для важного класса дифференциальных уравнений (1) решение $\Phi_B(\mathbf{r})$ уравнения (3) можно получить простой суперпозицией решений $\Psi(\mathbf{r})$, соответствующих однородным дифференциальным уравнениям

$$\mathsf{L}\Psi(\mathbf{r}) = \lambda\Psi(\mathbf{r}) \qquad (\mathbf{r} \in V) \tag{10.4-5a}$$

для различных возможных значений λ, при которых $\Psi(\mathbf{r})$ удовлетворяет однородным краевым условиям

$$\mathsf{B}_i\Psi(\mathbf{r}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N; \quad \mathbf{r} \in S). \tag{10.4-5b}$$

Вообще такие решения (ненулевые) существуют только при специальных значениях параметра λ (**собственные значения**); решения $\Psi = \Psi_\lambda(\mathbf{r})$, соответствующие каждому собственному значению, называются **собственными функциями** краевой задачи (5).

В пп. 10.4-3 — 10.4-8 приводятся частные решения $\Psi(\mathbf{r})$ для некоторых дифференциальных уравнений вида (5*a*). Эти функции позволяют при помощи

метода наложения получать решения соответствующих неоднородных уравнений (3). Собственные функции, соответствующие дискретной последовательности собственных значений, часто образуют удобные ортонормированные системы (п. 15.2-4) для представления правых частей и решений в виде

$$f(\mathbf{r})=\sum_{\lambda} f_{\lambda}\Psi_{\lambda}(\mathbf{r}), \qquad \Phi_B=\sum_{\lambda}\beta_{\lambda}\Psi_{\lambda}(\mathbf{r}). \tag{10.4-6a}$$

Непрерывная совокупность (непрерывный спектр) S_{λ} собственных значений λ приводит к *интегральным представлениям*

$$f(\mathbf{r})=\int\limits_{S_{\lambda}} F(\lambda)\Psi_{\lambda}(\mathbf{r})\,d\lambda, \qquad \Phi_B=\int\limits_{S_{\lambda}}\beta(\lambda)\Psi_{\lambda}(\mathbf{r})\,d\lambda. \tag{10.4-6b}$$

Подстановка выражений (6*a*) или (6*b*) в уравнение (3) позволяет найти неизвестные коэффициенты β_{λ} или $\beta(\lambda)$. Отсылаем к пп. 10.5-1 и 15.4-12 для общей теории этого метода решения и его области применения. Важный альтернативный метод решения уравнения (3), так называемый *метод функций Грина*, трактуется в пп. 15.5-1—15.5-4.

(d) Задачи, включающие зависимость от времени. В задачах, в которых искомые функции зависят и от пространственных координат и от времени, решается линейное дифференциальное уравнение

$$\mathsf{L}\Phi(\mathbf{r},t)=f(\mathbf{r},t) \qquad (\mathbf{r}\in V,\ t>0) \tag{10.4-7a}$$

при соответствующих линейных *начальных условиях*

$$\Lambda_j\Phi(\mathbf{r},0)=\beta_j(\mathbf{r}) \qquad (j=1,2,\ldots,M;\ \mathbf{r}\in V) \tag{10.4-7b}$$

и линейных *краевых условиях*

$$\mathsf{B}_i\Phi(\mathbf{r},t)=b_i(\mathbf{r},t) \qquad (i=1,2,\ldots,N;\ \mathbf{r}\in S;\ t>0). \tag{10.4-7c}$$

Так как начальные условия (7*b*) есть просто краевые условия на координатной поверхности $t=0$, то применимы методы пп. 10.4-2, а и b (п. 10.4-9). Следующие методы позволяют упростить решение задач с начальными условиями:

1. $\Phi_B=\Phi_B(\mathbf{r},t)$ может быть представлено в виде суммы функций, соответственно удовлетворяющих однородным начальным условиям и однородным краевым условиям.
2. Разделение переменных (пп. 10.1-3, 10.4-7, b и 10.4-8).
3. Преобразование Лапласа по переменной t (пп. 10.5-2 и 10.5-3, а).
4. Метод Дюамеля (п. 10.5-4).

10.4-3. Частные решения уравнения Лапласа: трехмерный случай (см. также табл. 6.5-1, пп. 10.1-3 и 15.6-1—15.6-9; решения в других координатных системах приведены в [10.7]).

(a) Прямоугольные декартовы координаты x, y, z:

$$\nabla^2\Phi\equiv\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0. \tag{10.4-8}$$

Допустимы частные решения

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_{k_1k_2k_3}(x,y,z)=e^{k_1x+k_2y+k_3z}\ (k_1,\ k_2,\ k_3\text{ — любые комплексные числа, удовлетворяющие условию } k_1^2+k_2^2+k_3^2=0),\\&\Phi_{0k_2k_3}(x,y,z)=(a+bx)\,e^{k_2y+k_3z}\quad (k_2^2+k_3^2=0),\\&\Phi_{000}(x,y,z)=(a+bx)(\alpha+\beta y)(A+Bz),\end{aligned}\right\} \tag{10.4-9}$$

которые образуют различные произведения действительных линейных, показательных, тригонометрических и/или гиперболических функций.

(b) Цилиндрические координаты ρ, φ, z. Пусть $\Phi = u(\varphi) \times v(z)\, w(\rho)$ (п. 10.1-3). Тогда

$$\nabla^2\Phi \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0. \qquad (10.4\text{-}10)$$

Разделение переменных приводит к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} u(\varphi) + m^2 u(\varphi) = 0, \qquad (10.4\text{-}11)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} v(z) - K^2 v(z) = 0, \qquad (10.4\text{-}12)$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} w(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} w(\rho) + \left(K^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) w(\rho) = 0, \qquad (10.4\text{-}13)$$

где функция $u(\varphi)$ удовлетворяет условию периодичности: $u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi)$; это будет, когда $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; K — произвольная константа (константа разделения, п. 10.1-3), которая определяется по данным краевым условиям. Уравнение (10) допускает частные решения (**цилиндрические гармоники**) вида

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{\pm Km}(\rho, \varphi, z) &= e^{\pm Kz} Z_m(K\rho)(\alpha\cos m\varphi + \beta\sin m\varphi),\\
\Phi_{\pm K0}(\rho, \varphi, z) &= e^{\pm Kz} Z_0(K\rho)(\alpha + \beta\varphi),\\
\Phi_{0m}(\rho, \varphi, z) &= (a + bz)\left(A\rho^m + \frac{B}{\rho^m}\right)(\alpha\cos m\varphi + \beta\sin m\varphi),\\
\Phi_{00}(\rho, \varphi, z) &= (a + bz)(A + B\ln\rho)(\alpha + \beta\varphi) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),
\end{aligned}\right\} \qquad (10.4\text{-}14)$$

где $Z_m(\zeta)$ — *цилиндрическая функция* (п. 21.8-1); в частности, если данная задача требует ограниченности решения Φ при $\rho = 0$, то $Z_m(\zeta)$ должна быть *функцией Бесселя первого рода* $J_m(\zeta)$ (п. 21.8-1).

Если в последнем случае положить $K = i\lambda$, то комбинации комплексно сопряженных решений $\Phi_{\pm i\lambda m}$ образуют действительные решения вида

$$(a\cos\lambda z + b\sin\lambda z) I_m(\lambda\rho)(\alpha\cos m\varphi + \beta\sin m\varphi),$$

где $I_m(\lambda\rho) = i^{-m} J_m(i\lambda\rho)$ — *модифицированная функция Бесселя* (п. 21.8-6). Заметим, что в случае *осевой симметрии*, т. е. когда Φ не зависит от φ, $m = 0$.

(c) Сферические координаты r, θ, φ. Пусть $\Phi = u(\varphi)\, v(\cos\theta)\, w(r)$. Тогда

$$r^2\nabla^2\Phi \equiv \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0. \qquad (10.4\text{-}15)$$

Разделение переменных дает

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} u(\varphi) + m^2 u(\varphi) = 0, \qquad (10.4\text{-}16)$$

$$(1 - \zeta^2)\frac{d^2}{d\zeta^2} v(\zeta) - 2\zeta\frac{d}{d\zeta} v(\zeta) + \left[j(j+1) - \frac{m^2}{1 - \zeta^2}\right] v(\zeta) = 0 \quad (\zeta = \cos\theta), \qquad (10.4\text{-}17)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} w(r) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} w(r) - \frac{j(j+1)}{r^2} w(r) = 0. \qquad (10.4\text{-}18)$$

Функция $v(\zeta)=v(\cos\theta)$ должна быть непрерывна при $\theta=0$ и $\theta=\pi$; это означает, что $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm j$ и $j=0, 1, 2\ldots$ Уравнение (15) допускает частные решения вида

$$\Phi_{jm}(r, \theta, \varphi)=\left(Ar^j+\frac{B}{r^{j+1}}\right)P_j^m(\cos\theta)(\alpha\cos m\varphi+\beta\sin m\varphi)$$
$$(j=0, 1, 2, \ldots; m=0, 1, 2, \ldots, j), \qquad (10.4\text{-}19)$$

где $P_j^m(\zeta)$ — *присоединенная функция Лежандра первого рода порядка* j (п. 21.8-10). Комбинация таких решений производит более общие частные решения

$$\Phi_j(r, \theta, \varphi)=\left(Ar^j+\frac{B}{r^{j+1}}\right)Y_j(\theta, \varphi) \qquad (j=0, 1, 2, \ldots), \qquad (10.4\text{-}20)$$

где

$$Y_j(\theta, \varphi)=\sum_{m=0}^{j}P_j^m(\cos\theta)(\alpha_m\cos m\varphi+\beta_m\sin m\varphi)=$$
$$=\sum_{m=-j}^{j}\gamma_m P_j^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi} \qquad (j=0, 1, 2, \ldots). \qquad (10.4\text{-}21)$$

Функции (21) удовлетворяют уравнению (15) для $r=\text{const}$ и называются **поверхностными сферическими гармониками степени** j (см. также п. 21.8-12).

Имеется $2j+1$ линейно независимых поверхностных сферических гармоник степени j. Для разложения в ряд по ортогональным решениям заметим, что функции

$$\sqrt{\frac{2j+1}{2\pi}\frac{(j-m)!}{(j+m)!}}P_j^m(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad \sqrt{\frac{2j+1}{2\pi}\frac{(j-m)!}{(j+m)!}}P_j^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$
$$(j=0, 1, 2, \ldots; m=0, 1, 2, \ldots, j)$$

или более удобные функции

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2j+1}{\pi}\frac{(j-|m|)!}{(j+|m|)!}}P_j^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi} \qquad (j=0, 1, 2, \ldots; m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm j)$$

образуют ортонормальную систему в смысле п. 21.8-12. Эти функции называются **тессеральными сферическими гармониками** (**секториальными сферическими гармониками** для $m=j$; см. также пп. 10.4-9, 15.2-6 и 21.8-11). Ортонормальные функции

$$\sqrt{\frac{2j+1}{2}}P_j(\cos\theta)$$

называются **зональными сферическими гармониками.**

Если допускаются решения с особенностями для $\theta=0$, $\theta=\pi$, то появляются аналогичные решения, содержащие ассоциированные функции Лежандра второго рода [21.3].

10.4-4. Частные решения для трехмерного уравнения Гельмгольца (см. также п. 10.3-5). Дифференциальное уравнение

$$\nabla^2\Phi+k^2\Phi=0 \text{ (}\textit{уравнение Гельмгольца}\text{)} \qquad (10.4\text{-}22)$$

встречается при разделении переменных в трехмерном волновом уравнении (п. 10.4-8, b) и в уравнении теплопроводности (п. 10.4-7, b). Коэффициент k^2 может быть отрицательным ($k=i\varkappa$, пространственный вид *уравнения Клейна — Гордона*).

Для заданного однородного линейного краевого условия (например, $\Phi=0$ на границе S ограниченной области V) уравнение (22) допускает решения только для соответствующей дискретной последовательности значений k^2 (*проблема собственных значений*, п. 15.4-5).

(a) Прямоугольные декартовы координаты x, y, z. Уравнение (22) имеет частные решения;

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_{k_1k_2k_3}(x, y, z)=e^{i(k_1x+k_2y+k_3z)} && (k_1^2+k_2^2+k_3^2=k^2),\\ &\Phi_{0k_2k_3}(x, y, z)=(a+bx)e^{i(k_2y+k_3z)} && (k_2^2+k_3^2=k^2),\\ &\Phi_{00k}(x, y, z)=(a+bx)(\alpha+\beta y)e^{ikz},\end{aligned}\right\} \qquad (10.4\text{-}23)$$

которые можно представить в виде различных произведений действительных линейных, показательных, тригонометрических и/или гиперболических функций.

(b) Цилиндрические координаты ρ, φ, z (см. также п. 10.4-3, *b*). Пусть $\Phi = u(\varphi)\,v(z)\,w(\rho)$; тогда уравнение (22) разделяется на уравнения (11), (12) и

$$\frac{d^2}{d\rho^2}\,w(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\,w(\rho) + \left[(K^2+k^2) - \frac{m^2}{\rho^2}\right] w(\rho) = 0, \qquad (10.4\text{-}24)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и K — произвольная константа разделения, определяемая краевыми условиями. Уравнение (22) допускает решения вида

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{\pm Km}(\rho, \varphi, z) = e^{\pm Kz} Z_m\left(\rho\sqrt{k^2+K^2}\right)(\alpha\cos m\varphi + \beta\sin m\varphi) \\ &\qquad (m = 0, 1, 2, \ldots). \\ &\text{Если } K = i\lambda, \text{ то} \\ &\Phi_{\pm i\lambda m}(\rho, \varphi, z) = e^{\pm i\lambda z} Z_m\left(\rho\sqrt{k^2-\lambda^2}\right)(\alpha\cos m\varphi + \beta\sin m\varphi), \\ &\Phi_{00}(\rho, \varphi, z) = (a+bz)\,Z_0(k\rho)\,(\alpha+\beta\varphi). \end{aligned}\right\} \qquad (10.4\text{-}25)$$

Заметим, что для осевой симметрии $m = 0$.

(c) Сферические координаты r, θ, φ (см. также п. 10.4-3, c). Пусть $\Phi = u(\varphi)\,v(\cos\theta)\,w(r)$. Тогда уравнение (22) разделяется на уравнения (16), (17) и

$$\frac{d^2}{dr^2} w(r) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} w(r) + \left[k^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}\right] w(r) = 0. \qquad (10.4\text{-}26)$$

Уравнение (22) допускает частные решения вида

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{kj}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}}\, Z_{j+1/2}(kr)\, Y_j(\theta, \varphi) \quad (j = 1, 2, \ldots), \\ &\Phi_{k0}(r, \theta, \varphi) = \frac{e^{\pm ikr}}{r} \quad (\textit{центральная симметрия}), \end{aligned}\right\} \qquad (10.4\text{-}27)$$

где $Y_j(\theta, \varphi)$ — сферическая поверхностная гармоника (21). В частности, если данная задача требует непрерывности решения для $r = 0$, то $Z_{j+1/2}(kr)/\sqrt{r}$ есть *сферическая функция Бесселя первого рода* (п. 21.8-8).

10.4-5. Частные решения двумерных задач (см. также пп. 15.6-7 и 15.6-10, b).

(а) Уравнение Лапласа

$$\nabla^2\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0 \qquad (10.4\text{-}28)$$

допускает частные решения

$$\Phi_K(x, y) = e^{\pm K(x+iy)}, \quad \Phi_0(x, y) = (a+bx)(\alpha+\beta y), \qquad (10.4\text{-}29)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_m(r, \varphi) = \left(Ar^m + \frac{B}{r^m}\right)(\alpha\cos m\varphi + \beta\sin m\varphi) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \\ &\Phi_0(r, \varphi) = A + B\ln r, \end{aligned}\right\} \qquad (10.4\text{-}30)$$

где K, а также $a, b, \alpha, \beta, A, B$ — произвольные постоянные, определяемые краевыми условиями.

(b) Двумерное уравнение Гельмгольца. Двумерное уравнение вида (22) допускает частные решения

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{k_1k_2}(x, y) = e^{i(k_1x+k_2y)} \qquad (k_1^2+k_2^2 = k^2), \\ &\Phi_{0k}(x, y) = (a+bx)\,e^{iky}, \end{aligned}\right\} \qquad (10.4\text{-}31)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{km}(r, \varphi) = Z_m(kr)\,(\alpha\cos m\varphi + \beta\sin m\varphi) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \\ &\Phi_0(r, \varphi) = Z_0(kr)\,(a+b\varphi). \end{aligned}\right\} \qquad (10.4\text{-}32)$$

(c) Комплексно сопряженные решения (29) и (31) образуют различные произведения действительных линейных, показательных, тригонометрических и/или гиперболических функций.

10.4-6. Уравнение Шредингера. Трехмерное дифференциальное уравнение

$$\nabla^2 \Phi + \left(\frac{2c}{r} - \lambda^2\right)\Phi = 0 \tag{10.4-33}$$

допускает частные решения

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{\lambda j}(r, \theta, \varphi) &= r^j e^{-\lambda r} L^{2j+1}_{\frac{c}{\lambda}+j}(2\lambda r)\, Y_j(\theta, \varphi), \\ \Phi_{\lambda, -j}(r, \theta, \varphi) &= \frac{e^{-\lambda r}}{r^{j+1}} L^{-2j-1}_{\frac{c}{\lambda}-j-1}(2\lambda r)\, Y_j(\theta, \varphi) \end{aligned}\right\} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots), \tag{10.4-34}$$

где $L_n^k(\zeta)$ — *функции Лагерра* (п. 21.7-5). Если Φ нормировано (п. 15.2-16), то оно образуется решениями первого типа (34). Нормированные решения существуют только для собственных значений (п. 15.4-5) λ^2 таких, что $c/\lambda = n = 0, 1, 2, \ldots$ В этом случае функции Лагерра сводятся к *присоединенным полиномам Лагерра* и решения (34) образуют ортогональную систему в смысле пп. 21.7-5 и 21.8-12.

10.4-7. Частные решения для уравнения теплопроводности и диффузии (см. также пп. 10.3-4, b, 10.4-9, 10.5-3, 10.5-4 и 15.5-3).

(a) Одномерное уравнение диффузии

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{10.4-35}$$

допускает частные решения

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_k(x, t) = e^{\pm ikx - k^2\gamma^2 t}, \qquad \Phi_0(x, t) = a + bx, \\ &\Phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\gamma^2 t}} \qquad (t > 0), \end{aligned}\right\} \tag{10.4-36}$$

где k — произвольная константа разделения, определяемая краевыми условиями.

(b) Двух- или трехмерное уравнение диффузии

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{10.4-37}$$

допускает частные решения

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_k(\mathbf{r})\, e^{-k^2\gamma^2 t}, \tag{10.4-38}$$

где $\Phi_k(\mathbf{r})$ — частное решение соответствующего уравнения Гельмгольца (22) (пп. 10.4-2 и 10.4-5, b); k — произвольная константа разделения, определяемая краевыми условиями. Уравнение (37) также допускает частное решение

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} e^{-\frac{r^2}{4\gamma^2 t}} & (\textit{двумерный случай}), \\ \dfrac{1}{\sqrt{t^3}} e^{-\frac{r^2}{4\gamma^2 t}} & (\textit{трехмерный случай}). \end{cases} \tag{10.4-39}$$

10.4-8. Частные решения для волнового уравнения. Синусоидальные волны (см. также пп. 4.11-4, b, 10.3-5, 10.4-9, 10.5-2 и 15.6-10).

(a) Одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{10.4-40}$$

допускает частные решения вида

$$\Phi(x, t) = e^{\pm ikx} e^{\pm i\omega t} = e^{\pm ik(x \pm ct)} \qquad (\omega = kc), \tag{10.4-41}$$

где k — произвольная константа, определяемая краевыми условиями. Функ-

ции (41) и соответствующие значения k^2 образуют собственные функции и собственные значения (пп. 10.4-2 и 15.4-5).

Решения вида (41) образуют следующие действительные решения:

$$\left.\begin{aligned}&\Phi(x,\ t)=C\cos(\omega t+\gamma_1)\cos(kx+\gamma_2)\\&(\textit{синусоидальные стоячие волны}),\\&\Phi(x,\ t)=a\cos(\omega t\mp kx)+b\sin(\omega t\mp kx)=\\&\qquad=A\cos(\omega t\mp kx+\gamma)\\&(\textit{синусоидальные волны, распространяющиеся}\\&\textit{в положительном и отрицательном направлении оси } x)\end{aligned}\right\}(\omega=kc).\qquad(10.4\text{-}42)$$

Круговая частота ω, **частота** $\nu=\omega/(2\pi)$, **волновое число** k, **длина волны** $\lambda=2\pi/k$ **и фазовая скорость** c синусоидальной волны связаны соотношениями

$$\lambda\nu=\frac{\omega}{k}=c.\qquad(10.4\text{-}43)$$

Суперпозиция синусоидальных волн (42) в виде рядов Фурье или интегралов Фурье образует более общие волны.

(b) Двух- или трехмерное волновое уравнение

$$\nabla^2\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0\qquad(10.4\text{-}44)$$

допускает частные решения вида

$$\Phi(\mathbf{r},\ t)=\Phi_k(\mathbf{r})\,e^{\pm i\omega t}\qquad(\omega=kc),\qquad(10.4\text{-}45)$$

где $\Phi_k(\mathbf{r})$ — частное решение соответствующего уравнения Гельмгольца (22) (пп. 10.4-4 и 10.4-5, b); k — произвольная константа разделения, определяемая краевыми условиями. Решения вида (45) образуют решения, содержащие действительные тригонометрические функции; в частности, отметим следующие решения:

$$\left.\begin{aligned}&\Phi(x,\ y,\ z;\ t)=A\cos[\omega t\mp(k_1x+k_2y+k_3z)+\gamma]\\&\qquad(k_1^2+k_2^2+k_3^2=k^2;\quad \omega=kc)\\&(\textit{синусоидальные плоские волны, нормаль к фронту}\\&\textit{которых имеет направление } \{k_1,\ k_2,\ k_3\}),\end{aligned}\right\}\qquad(10.4\text{-}46)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Phi(\rho,\ \varphi,\ z;\ t)=Z_m\left(\rho\sqrt{k^2-K^2}\right)\cos(\omega t\mp Kz\mp m\varphi+\gamma)\\&\qquad(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad \omega=kc)\\&(\textit{синусоидальные цилиндрические волны}),\end{aligned}\right\}\qquad(10.4\text{-}47)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Phi(r,\ \theta,\ \varphi;\ t)=\frac{1}{\sqrt{r}}Z_{j+1/2}(kr)\,Y(\theta,\ \varphi)\cos(\omega t+\gamma)\\&(j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad \omega=kc)\\&(\textit{синусоидальные сферические стоячие волны}),\end{aligned}\right\}\qquad(10.4\text{-}48)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Phi(r,\ \theta,\ \varphi,\ t)=\frac{A}{r}\cos(\omega t\mp kr+\gamma)\\&(\textit{излучение точечного источника}),\end{aligned}\right\}\qquad(10.4\text{-}49)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Phi(r,\ \theta,\ \varphi,\ t)=A\left(\frac{1}{kr^2}\cos(\omega t\mp kr)\mp\frac{1}{r}\sin(\omega t\mp kr)\right]\cos\theta\\&(\textit{излучение диполя}),\end{aligned}\right\}\qquad(10.4\text{-}50)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Phi(r,\ \varphi;\ t)=Z_m(kr)(\alpha\cos m\varphi+\beta\sin m\varphi)(a\cos\omega t+b\sin\omega t)\\&\qquad(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ \omega=kc)\\&(\textit{двумерные синусоидальные круговые стоячие волны}).\end{aligned}\right\}\qquad(10.4\text{-}51)$$

Цилиндрические волны (47) распространяются в положительном и отрицательном направлении оси Oz с *фазовой скоростью* $c' = \omega/K = kc/K$, которая, как видно, зависит от ω и K *(дисперсия)*. *Групповая скорость* в направлении оси Oz равна

$$d\omega/dK = Kc/k.$$

(с) Общее одномерное затухающее волновое уравнение (телеграфное уравнение). Уравнение передачи по линии

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - a_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - a_1\frac{\partial\Phi}{\partial t} - a_2\Phi = 0 \qquad (10.4\text{-}52)$$

допускает частные решения вида

$$\Phi(x, t) = e^{\pm ikx}e^{st}, \qquad (10.4\text{-}53)$$

где $s = \sigma + i\omega$ есть корень квадратного уравнения

$$a_0s^2 + a_1s + (a_2 + k^2) = 0. \qquad (10.4\text{-}54)$$

Комплексно сопряженные решения (53) образуют *затухающие синусоидальные волны* в смысле п. 9.4-6; в случае кратных корней уравнения (54) следует поступать так, как в п. 9.4-1, b. Уравнение (52) включает уравнения (35) и (40) как частные случаи. Аналогичные обобщения имеют место в многомерном случае.

10.4-9. Решение краевой задачи резложением в ортогональные ряды. Примеры (см. также п. 10.5-3). Следующие примеры иллюстрируют применение частных решений, приведенных в пп. 10.4-3 — 10.4-8.

(а) Задача Дирихле для сферы (см. также пп. 10.4-3, с, 15.6-2, а и 15.6-6, с). Требуется найти функцию $\Phi(r, \theta, \varphi)$, которая удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2\Phi = 0$ внутри данной сферы $r < R$ и принимает заданные краевые значения $\Phi(R, \theta, \varphi) = b(\theta, \varphi)$ на сфере. Ясно, что следует применять сферические координаты r, θ, φ (п. 10.4-1, с).

Записываем неизвестную функцию в виде суммы решений (19), которые необходимо конечны при $r = 0$ $(B = 0)$:

$$\Phi = \Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{j} r^j P_j^m(\cos\theta)(\alpha_{jm}\cos m\varphi + \beta_{jm}\sin m\varphi).$$

Неизвестные коэффициенты α_{jm}, β_{jm} вычисляются по заданным краевым условиям

$$\Phi(R, \theta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{j} R^j P_j^m(\cos\theta)(\alpha_{jm}\cos m\varphi + \beta_{jm}\sin m\varphi) = b(\theta, \varphi).$$

Согласно условиям ортогональности п. 21.8-12

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{j0} &= \frac{2j+1}{4\pi}\frac{1}{R^j}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} b(\theta, \varphi)P_j(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta,\\
\alpha_{jm} &= \frac{2j+1}{2\pi}\frac{(j-m)!}{(j+m)!}\frac{1}{R^j}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} b(\theta, \varphi)P_j^m(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta\,d\theta,\\
\beta_{jm} &= \frac{2j+1}{2\pi}\frac{(j-m)!}{(j+m)!}\frac{1}{R^j}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} b(\theta, \varphi)P_j^m(\cos\theta)\sin m\varphi\sin\theta\,d\theta\\
&(j = 0, 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots, j).
\end{aligned}\right\} \qquad (10.4\text{-}55)$$

(b) Свободные колебания упругой струны (см. также п. 10.3-5). Поперечные смещения $\Phi(x, t)$ упругой струны удовлетворяют *одномерному волновому уравнению*

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0,$$

начальным условиям

$$\Phi(x, 0) = \Phi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{t=0} = v_0(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant L)$$

и краевым условиям

$$\Phi(0, t) = \Phi_a(t), \qquad \Phi(L, t) = \Phi_b(t).$$

Рассмотрим частный случай $\Phi_a(t)=\Phi_b(t)=0$. Стоячие волны (42) одномерного волнового уравнения удовлетворяют заданным краевым условиям, когда $\gamma_2=-\pi/2$ и половина длины волны $\lambda/2=\pi/k$ целое число раз укладывается в длине струны L:

$$k=\frac{n\pi}{L},\qquad \omega=kc=\frac{n\pi c}{L}\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Записываем решение в виде ряда из частных решений

$$\Phi(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi c}{L}t+b_n\sin\frac{n\pi c}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

и определяем коэффициенты a_n и b_n из начальных условий, пользуясь формулами для коэффициентов Фурье (п. 4.11-4, b):

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L\Phi_0(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$b_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^L v_0(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Решение представляет сумму гармонических стоячих волн, возбужденных заданными начальными условиями.

(c) Свободные колебания круглой мембраны. Поперечные смещения $\Phi(\mathbf{r})$ мембраны, закрепленной по окружности $r=1$, удовлетворяют *волновому уравнению* $\nabla^2\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0$ $(r<1)$, *краевому условию* $\Phi=0$ при $r=1$ и *начальным условиям*

$$\Phi=\Phi_0(\mathbf{r}),\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial t}=v_0(\mathbf{r})\quad\text{при}\quad t=0\ (r\leqslant 1).$$

Применим полярные координаты r, φ. Так как Φ непрерывна при $r=0$, то образуем суперпозицию решений (51), содержащих только функции Бесселя первого рода, т. е. $Z_m(kr)=J_m(kr)$ (п 21.8-1). Такие решения образуют *характеристические колебания*, удовлетворяющие заданному краевому условию, если

$$k=\frac{\omega}{c}=k_{mn}\qquad (n,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где k_{mn} есть n-й действительный положительный нуль функции $J_m(\zeta)$; эта задача есть *задача о собственных значениях*.

Решение представляется в виде суммы характеристических колебаний

$$\Phi(r,\ \varphi,\ t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}J_m(k_{mn}r)(\alpha_{mn}\cos m\varphi+\beta_{mn}\sin m\varphi)\times$$
$$\times(a_{mn}\cos ck_{mn}t+b_{mn}\sin ck_{mn}t),$$

где неизвестные коэффициенты определяются как обыкновенные коэффициенты Фурье при подстановке заданных начальных условий.

10.5. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

10.5-1. Общая теория (см. также пп. 8.2-1, 8.6-1, 9.3-7, 9.4-5, 10.4-2, с и 15.4-12). Требуется найти решение $\Phi=\Phi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, удовлетворяющее заданным краевым условиям действительного линейного дифференциального уравнения с частными производными

$$(\mathsf{L}_1+\mathsf{L}_2)\,\Phi=a_0(x_n)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_n^2}+a_1(x_n)\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}+a_2(x_n)\,\Phi+\mathsf{L}_2\Phi=$$
$$=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\qquad (10.5\text{-}1)$$

где L_2 — линейный однородный дифференциальный оператор с производными и коэффициентами, содержащими $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$, но не x_n.

Для простоты примем x_n изменяющимся в некотором ограниченном или неограниченном интервале (a, b) для всех $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ так, что граница S области решения состоит из двух координатных поверхностей (см. также п. 10.4-1, с). Уравнение (1) можно часто упростить, применяя линейное интегральное преобразование

$$\bar{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; s) = \int_a^b K(x_n, s)\, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n. \tag{10.5-2}$$

Если ядро преобразования $K(x_n, s)$ выбрано так, что

$$\mathsf{L}_1^* K(x_n, s) = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}(a_0 K) - \frac{\partial}{\partial x_n}(a_1 K) + a_2 K = \lambda(s) K, \tag{10.5-3}$$

(L_1^* — оператор, сопряженный с L_1 (п. 14.4-3)), *то интегрирование по частям (обобщенная формула Грина,* п. 15.4-3) *приводит к возможно более простому дифференциальному уравнению*

$$\left.\begin{aligned} &[\mathsf{L}_2^* + \lambda(s)]\,\bar{\Phi} = \\ &= \bar{f}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; s) - P(x_1, x_2, \ldots, x_n; s)\Big|_{x_n = a}^{x_n = b}, \\ &P(x_1, x_2, \ldots, x_n; s) \equiv a_0\left(K\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} - \Phi\frac{\partial K}{\partial x_n}\right) + (a_1 - a_0')\,\Phi K \end{aligned}\right\} \tag{10.5-4}$$

относительно неизвестной функции $\bar{\Phi}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; s)$, являющейся интегральным преобразованием искомого решения. Заметим, что новое дифференциальное уравнение включает в себя краевые значения Φ и $\partial\Phi/\partial x_n$, заданные для $x_n = a$, $x_n = b$ и переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Метод интегрального преобразования предполагает существование интегралов (2) и сходимость *формулы обращения*

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_\alpha^\beta H(x_n, s)\, \bar{\Phi}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; s)\, ds, \tag{10.5-5}$$

(см. также п. 15.3-7). Табл. 8.6-1 на стр. 257 содержит некоторое число употребительных интегральных преобразований и формул обращения.

Заметим, что в решениях преобразованного дифференциального уравнения (4) константы интегрирования следует рассматривать как произвольные функции от s.

Метод интегральных преобразований можно обобщить на дифференциальные уравнения, содержащие производные высших порядков от x_n; кроме того, интегральное преобразование можно применять по двум переменным x_n, x_{n-1} одновременно. Если в выражении $H(x_n, s)$ допускается δ-функция, то формула (5) может приводить к *разложениям в ряды* для Φ в конечном интервале (a, b) (*конечные интегральные преобразования* [8.5]).

10.5-2. Преобразование Лапласа по временно́й переменной (см. также пп. 8.2-1, 8.3-1, 9.3-7 и 9.4-5). Задача с начальными условиями для гиперболических и параболических дифференциальных уравнений часто упрощается введением одностороннего преобразования Лапласа

$$\bar{\varphi}(s) = \int_0^\infty \varphi(t)\, e^{-st}\, dt,$$

которое преобразует каждое линейное дифференциальное уравнение с частными производными с постоянными коэффициентами

$$\nabla^2\Phi - a_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - a_1\frac{\partial\Phi}{\partial t} - a_2\Phi = f(\mathbf{r}, t) \tag{10.5-6}$$

в новое и, возможно, более простое дифференциальное уравнение

$$\nabla^2\bar{\Phi} - (a_0 s^2 + a_1 s + a_2)\bar{\Phi} = \bar{f}(\mathbf{r},\ s) - \left[(a_0 s + a_1)\Phi + a_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right]_{t=0+0} \quad (10.5\text{-}7)'$$

для неизвестного интегрального преобразования $\bar{\Phi}(\mathbf{r},\ s)$ решения $\Phi(\mathbf{r},\ t)$. Краевые условия преобразуются подобным же образом; заметим, что уравнение (7) включает в себя заданные начальные условия.

10.5-3. Решение краевых задач методом интегральных преобразований. Примеры (см. также п. 10.4-9). Следующие примеры иллюстрируют простейшие применения интегральных преобразований к решению краевых задач (см. также [8.5]).

(a) Одномерное уравнение теплопроводности в случае фиксированной температуры на концах: применение преобразования Лапласа. Теорема Дюамеля (п. 10.5-4) сводит важный класс одномерных задач теплопроводности к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,\ t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial \Phi(x,\ t)}{\partial t} = 0 \qquad (a < x < b,\quad t > 0),$$

$$\Phi(x,\ 0+0) = \Phi_0(x) \quad (\textit{начальное условие}),$$

$$\Phi(a,\ t) = \Phi_a = \text{const},\quad \Phi(b,\ t) = \Phi_b = \text{const} \quad (t > 0) \quad (\textit{краевые условия}).$$

Дифференциальное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}(x,\ s)}{\partial x^2} - \frac{s}{\gamma^2}\bar{\Phi}(x,\ s) = -\frac{1}{\gamma^2}\Phi_0(x) \quad (a < x < b).$$

Если, в частности, $\Phi_0(x) = \Phi_0 = \text{const}$, то

$$\bar{\Phi}(x,\ s) = C_1(s)\, e^{x\sqrt{s}/\gamma} + C_2(s)\, e^{-x\sqrt{s}/\gamma} + \frac{\Phi_0}{s},$$

где функции $C_1(s)$ и $C_2(s)$ должны быть выбраны так, чтобы выполнялись преобразованные краевые условия

$$\bar{\Phi}(a,\ s) = \frac{\Phi_a}{s}, \qquad \bar{\Phi}(b,\ s) = \frac{\Phi_b}{s};$$

$\Phi(x,\ t)$ получается как обратное преобразование Лапласа методами пп. 8.4-2 — 8.4-9. В частности, для $a = 0$, $\Phi_a = 0$, $\Phi_0 = 0$ имеем

$$\bar{\Phi}(x,\ s) = \frac{\Phi_b}{s}\,\frac{\operatorname{sh}\dfrac{x\sqrt{s}}{\gamma}}{\operatorname{sh}\dfrac{b\sqrt{s}}{\gamma}},\quad \Phi(x,\ t) = \Phi_b\left[\frac{x}{b} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j}\, e^{-(j\pi\gamma/b)^2 t}\sin\frac{j\pi x}{b}\right].$$

Заметим, что эта задача может быть решена методом п. 10.4-9.

(b) Задача теплопроводности в случае бесконечного интервала. Применение синус- и косинус-преобразований Фурье. Методы п. 10.5-3, а также применимы, если $a = 0$, $b = \infty$:

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,\ t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial \Phi(x,\ t)}{\partial t} = 0 \qquad (x > 0;\ t > 0),$$

$$\Phi(x,\ 0+0) = \Phi_0(x) \qquad (x > 0)\ (\textit{начальное условие}),$$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(0,\ t) = \Phi_a(t),\\ \displaystyle\int_0^{\infty} |\Phi(x,\ t)|^2\, dx \text{ существует}\end{array}\right\} \quad (t > 0) \quad (\textit{краевые условия}).$$

Применяя *синус-преобразование Фурье*

$$\bar{\varphi}(s,\ t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(x,\ t)\sin sx\, dx$$

(п. 4.11-3), можно, как в п. 4.11-5, с. получить преобразованное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial \bar{\Phi}(s,\ t)}{\partial t} + s^2\bar{\Phi}_0(s,\ t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, s\,\Phi_a(t)$$

и преобразованное начальное условие $\overline{\Phi}(s, 0+0) = \overline{\Phi}_0(s)$. Преобразованная задача имеет решение

$$\overline{\Phi}(s, t) = \overline{\Phi}_0(s)\, e^{-\gamma^2 s^2 t} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \gamma^2 s \int_0^t \Phi_a(t)\, e^{-\gamma^2 s^2 (t-\tau)}\, d\tau,$$

откуда

$$\Phi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \overline{\Phi}(s, t) \sin sx\, ds.$$

Если, в частности, задано $\Phi_a(t) = \text{const} = \Phi_a$ и $\Phi_0(x) \equiv 0$, то $\overline{\Phi}_0(s) \equiv 0$ и

$$\overline{\Phi}(s, t) = \Phi_a \frac{1 - e^{-\gamma^2 s^2 t}}{s} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \qquad \Phi(x, t) = \Phi_a \left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\gamma\sqrt{t}}\right).$$

Если задано краевое условие

$$\left.\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x}\right|_{x=0+0} = 0 \qquad (t \geqslant 0)$$

(теплоизолированный конец), то применяется *косинус-преобразование Фурье*

$$\overline{\varphi}(s, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi(x, t) \cos sx\, dx.$$

10.5-4. Формулы Дюамеля (см. также п. 9.4-3).

(a) Пусть L — однородный линейный оператор с производными и коэффициентами, не содержащими переменную t. Пусть $\Phi(x, t)$ есть решение задачи с начальными и краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} &\mathsf{L}\Phi + A_0(x)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + A_1(x)\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 && (0 < x < L;\ t > 0),\\ &\Phi(x, 0+0) = 0,\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{0+0} = 0 && (0 < x < L),\\ &\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \beta\Phi = b(t) && (x = 0,\ t > 0), \end{aligned}\right\} \qquad (10.5\text{-}8)$$

и пусть $\Psi(x, t)$ — решение этой задачи для $b(t) = 1$ $(t > 0)$. Тогда

$$\Phi(x, t) = \Psi(x, t)\, b(0+0) + \int_0^t \Psi(x, t-\tau)\, b'(\tau)\, d\tau = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \Psi(x, t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau$$
$$(0 < x < L;\ t > 0). \qquad (10.5\text{-}9)$$

(b) Решение $\Phi(\mathbf{r}, t)$ общего уравнения диффузии

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\cdot[k(\mathbf{r})\nabla]\Phi + a(\mathbf{r})\Phi - \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = f(\mathbf{r}, t) && (\mathbf{r} \in V,\ t > 0),\\ &\Phi(\mathbf{r}, 0) = \Phi_0(\mathbf{r}) && (\mathbf{r} \in V),\\ &\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial n} + \beta\Phi = b(\mathbf{r}, t) && (\mathbf{r} \in S,\ t > 0) \end{aligned}\right\} \qquad (10.5\text{-}10)$$

с зависящими от времени возмущающей функцией $f(\mathbf{r}, t)$ и краевым условием $b(\mathbf{r}, t)$ связано с решением $\Psi(\mathbf{r}, t; \lambda)$ более простой задачи

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\cdot[k(\mathbf{r})\nabla]\Psi + a(\mathbf{r})\Psi - \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = f(\mathbf{r}, \lambda) && (\mathbf{r} \in V,\ t > 0),\\ &\Psi(\mathbf{r}, 0; \lambda) = \Phi_0(\mathbf{r}) && (\mathbf{r} \in V),\\ &\alpha\frac{\partial\Psi}{\partial n} + \beta\Psi = b(\mathbf{r}, \lambda) && (\mathbf{r} \in S,\ t > 0), \end{aligned}\right\} \qquad (10.5\text{-}11)$$

где $f(\mathbf{r}, \lambda)$ и $b(\mathbf{r}, \lambda)$ зависят от параметра λ и не зависят от времени t. Решение $\Phi(\mathbf{r}, t)$ получаем из формулы

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \Psi(\mathbf{r}, t-\lambda; \lambda)\, d\lambda. \qquad (10.5\text{-}12)$$

ГЛАВА 11

МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ

11.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Очень широкий класс задач составляют экстремальные задачи, в которых требуется найти значения параметров или функций, реализующих максимум или минимум некоторой зависящей от них величины. Во многих инженерных задачах, например, желательно найти максимум меры выполнения или минимум стоимости. Кроме того, можно по крайней мере приблизить решения многих задач, выбрав неизвестные значения параметров или функций так, чтобы они давали минимум ошибки в пробных решениях; иногда такой прием позволяет применить для решения данной задачи мощные методы численных приближений.

Примеры: решение задач о собственных значениях в теории колебаний и квантовой механике (пп. 15.4-7 и 15. 4-8, b); принципы Гамильтона и Якоби в динамике.

11.2 ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

11.2-1. Локальные максимумы и минимумы (см. также п. 4.3-3). Действительная функция $f(x)$, определенная при $x=a$, имеет в точке a **(локальный) максимум** или **(локальный) минимум** $f(a)$, если существует такое положительное число δ, что при всех $\Delta x = x - a$, для которых выполняются неравенства $0 < |\Delta x| < \delta$ и существует значение $f(a+\Delta x)$, соответственно [1])

$$\Delta f \equiv f(a+\Delta x) - f(a) < 0$$

или

$$\Delta f \equiv f(a+\Delta x) - f(a) > 0.$$

Если в каждом из этих случаев выполняются нестрогие неравенства ($\leqslant$ или $\geqslant$), то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке a *нестрогий максимум* (*минимум*).

Локальный максимум (минимум) называется **внутренним максимумом (внутренним минимумом)** или **граничным максимумом (граничным минимумом)**, если соответственно точка a является внутренней точкой или граничной точкой области определения функции $f(x)$ (п. 4.3-6, a) [2]).

11.2-2. Условия существования внутренних максимумов и минимумов.

(a) *Если существует производная $f'(a)$, то функция $f(x)$ может иметь в точке a внутренний максимум или минимум лишь в том случае, когда при $x=a$*

$$f'(a) = 0 \qquad (11.2\text{-}1)$$

(*необходимое условие экстремума*).

(b) *Если существует вторая производная $f''(a)$, то функция $f(x)$ имеет в точке a*

$$\text{максимум при } f'(a)=0 \text{ и } f''(a)<0,$$
$$\text{минимум при } f'(a)=0 \text{ и } f''(a)>0.$$

---

[1]) Δf есть приращение данной функции $f(x)$, соответствующее приращению Δx независимого переменного x. Приращение Δf есть функция от a и от Δx; его не следует смешивать с *вариацией* δf, вводимой в п. 11.4-1.

[2]) В формулировке задачи должна быть точно указана область определения функции $f(x)$. Например, функция $f_1(x) = x\ (-\infty < x < +\infty)$ не имеет максимума, а функция $f_2(x) = x\ (x \leqslant 1)$ имеет при $x = 1$ граничный максимум.

(c) Более общее утверждение: *если существует производная* $f^{(n)}(a)$ *и если* $f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$, *то функция* $f(x)$ *имеет в точке* a

максимум при n четном и $f^{(n)}(a)<0$,
минимум при n четном и $f^{(n)}(a)>0$.

Если n нечетно, то функция $f(x)$ в точке a не имеет ни минимума, ни максимума, а имеет *точку перегиба* (п. 17.1-5).

(Условия, сформулированные в b и с, являются *достаточными условиями экстремума*.) Если $f'(a)=0$, то во всех случаях говорят, что функция $f(x)$ при $x=a$ имеет **стационарное значение.**

Примеры. Каждая из функций x^2, x^4, x^6, ... имеет при $x=0$ минимум, а каждая из функций x^3, x^5, x^7, ... имеет $x=0$ точкой перегиба.

11.3. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ ДВУХ И БОЛЬШЕГО ЧИСЛА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

11.3-1. Локальные максимумы и минимумы[1]. Действительная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная при $x_1=a_1$, $x_2=a_2, \ldots, x_n=a_n$, имеет в точке $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ **(локальный) максимум** или **(локальный) минимум** $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, если существует такое положительное число δ, что при всех $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, для которых выполняются неравенства $0<\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\ldots+\Delta x_n^2}<\delta$ и существует значение $f(a_1+\Delta x_1,\ a_2+\Delta x_2, \ldots, a_n+\Delta x_n)$, приращение функции

$$\Delta f \equiv f(a_1+\Delta x_1,\ a_2+\Delta x_2, \ldots, a_n+\Delta x_n)-f(a_1, a_2, \ldots, a_n), \qquad (11.3\text{-}1)$$

соответственно меньше нуля или больше нуля. Локальный максимум (минимум) называется **внутренним максимумом (внутренним минимумом)** или **граничным максимумом (граничным минимумом)**, если точка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ является соответственно внутренней точкой или граничной точкой области определения функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (п. 4.3-6, a).

Определение *строгого и нестрогого экстремума* аналогично п. 11.2-1.

11.3-2. Формула Тейлора для приращения функции. Приращение функции Δf, определяемое соотношением (1), является функцией от $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и от $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в некоторой окрестности точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то

$$\Delta f=\sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(a_1, a_2, \ldots, a_n)} \Delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k}\right|_{(a_1, a_2, \ldots, a_n)} \Delta x_i \Delta x_k + o(\rho^2), \qquad (11.3\text{-}2)$$

где $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\ldots+\Delta x_n^2}$ (*локальная формула Тейлора*, см. п. 4.10-5). Члены порядка 1 и 2 относительно Δx_i в этой формуле соответственно составляют **первый дифференциал** df и половину **второго дифференциала** d^2f функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (см. также п. 4.5-3, b).

11.3-3. Условия существования внутренних максимумов и минимумов.

(a) *Если функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *дифференцируема в точке* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *то она может иметь в точке* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *внутренний максимум или минимум*

[1]) См. сноски к п. 11.2-1.

лишь в том случае, когда ее первый дифференциал df обращается в этой точке в нуль, т. е. когда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=0, \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}=0 \tag{11.3-3}$$

при $x_1=a_1,\ x_2=a_2, \ldots,\ x_n=a_n$ *(необходимые условия экстремума).*

(b) *Если функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *имеет в некоторой окрестности точки* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *непрерывные вторые частные производные и если в этой точке выполняются необходимые условия* (3), *то в случае, когда второй дифференциал*

$$d^2f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k}\right|_{(a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n)}\Delta x_i \Delta x_k \tag{11.3-4}$$

есть отрицательно определенная квадратичная форма (п. 13.5-2), *функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *имеет в точке* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *максимум, а в случае, когда этот дифференциал есть положительно определенная квадратичная форма, функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *имеет в этой точке минимум (достаточные условия экстремума).*

Если условия (3) выполняются в точке $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то во всех случаях говорят, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в этой точке **стационарное значение**; сама точка называется **стационарной.**

Пример. Найти максимумы и минимумы функции

$$z = 3x^3 - x + y^3 - 3y^2 - 1.$$

Необходимые условия

$$\frac{\partial z}{\partial x}=9x^2-1=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-6y=0$$

удовлетворяются здесь при

$$x=1/3,\ y=0;\qquad x=-1/3,\ y=0;\qquad x=1/3,\ y=2;\qquad x=-1/3,\ y=2.$$

Но, рассматривая характеристическое уравнение квадратичной формы (4) (см. пп. 13.4-5 и 13.5-6)

$$(18x-\mu)(6y-6-\mu)=0,$$

видим, что единственными экстремальными значениями являются *максимум* ($\mu_1=-6$, $\mu_2=-6$) $z=-7/9$ при $x=-1/3$ и $y=0$ и *минимум* ($\mu_1=6$, $\mu_2=6$) $z=-47/9$ при $x=1/3$ и $y=2$.

(c) Если первый дифференциал df достаточное число раз непрерывно дифференцируемой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обращается в точке $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ в нуль, а второй дифференциал d^2f есть *полуопределенная* квадратичная форма (п. 13.5-2), то характер стационарного значения зависит от дифференциалов более высокого порядка. Если же d^2f есть *неопределенная* форма, то функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не имеет в точке $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ни максимума, ни минимума.

Если из уравнений (3) получена система значений $x_1=a_1,\ x_2=a_2, \ldots,\ x_n=a_n$, то характер квадратичной формы (4) можно определить любым из методов, перечисленных в п. 13.5-6. Можно также исследовать функцию на максимум и минимум, фактически вычислив значения $f(a_1+\Delta x_1,\ a_2+\Delta x_2, \ldots,\ a_n+\Delta x_n)$ для разумным образом выбранных комбинаций приращений $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

11.3-4. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа. Максимумы и минимумы действительной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, подчиненных достаточно гладким *дополнительным условиям* в виде $m<n$ *уравнений связи*

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0, \ldots,\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0, \tag{11.3-5}$$

в принципе можно найти по способу п. 11.3-3, исключив m из n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с помощью уравнений (5). Если непосредственное исключение

m переменных невозможно или нецелесообразно, то применяют следующее *необходимое условие максимума* или *минимума функции при ограничениях* (5):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0, \qquad (11.3\text{-}6)$$

где

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

m параметров λ_j называются **множителями Лагранжа;** $n+m$ неизвестных $x_i = a_i$ и λ_j находят из $n+m$ уравнений (5) и (6).

Заметим, что уравнения (6) представляют собой необходимые условия экстремума функции $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ считать *независимыми* переменными.

Пример. Найти стороны прямоугольника максимальной площади, вписанного в окружность:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Площадь A прямоугольника можно записать в виде

$$A = 4xy.$$

Тогда

$$\Phi(x, y) = 4xy + \lambda(x^2 + y^2 - r^2).$$

Необходимые условия экстремума дают

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4y + 2\lambda x = 0 \text{ и } \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 4x + 2\lambda y = 0,$$

так что искомый максимум дают значения $\lambda = -2$ и $x = y = r/\sqrt{2}$.

11.3-5. Численные методы. Если, как это часто бывает, при отыскании максимумов и минимумов функций многих переменных получают сложную систему уравнений или если явное дифференцирование затруднено или невозможно, то экстремумы находятся при помощи последовательного применения метода проб. Некоторые важные численные методы для решения такого рода задач описаны в пп. 20.2-6 и 20.3-2.

11.4. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ, ИГРЫ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

11.4-1. Задача линейного программирования.

(а) Постановка задачи. **Задача линейного программирования** заключается в нахождении r переменных $X_1, X_2, \ldots, X_r$, минимизирующих данную **линейную функцию (целевую функцию)**

$$z = F(X_1, X_2, \ldots, X_r) \equiv C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_rX_r \qquad (11.4\text{-}1a)$$

(или максимизирующую $-z$) при **линейных ограничениях-равенствах**

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \ldots + a_{ir}X_r = A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (11.4\text{-}1b)$$

и линейных ограничениях-неравенствах

$$A_{j1}X_1 + A_{j2}X_2 + \ldots + A_{jr}X_r \geqslant B_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \qquad (11.4\text{-}1c)$$

Заметим, что не каждая задача указанного типа имеет решение. Рис. 11.4-1 иллюстрирует один простой пример.

В типичных приложениях это — задача о нахождении необходимо положительных величин $X_1, X_2, \ldots, X_r$, т. е. r видов сырьевых материалов («входные» данные), мини-

мизирующих общую стоимость $F(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ (1a) соответствующих величин m «выходных» продуктов

$$q_i = A_{i1}X_1 + A_{i2}X_2 + \ldots + A_{ir}X_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

с нижними уровнями $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Имея в виду r условий $X_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ и m ограничений $q_i \geqslant B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, мы получаем $n = r + m$ ограничений-неравенств. Большое количество примеров, рассмотрено в [11.1], [11.2].

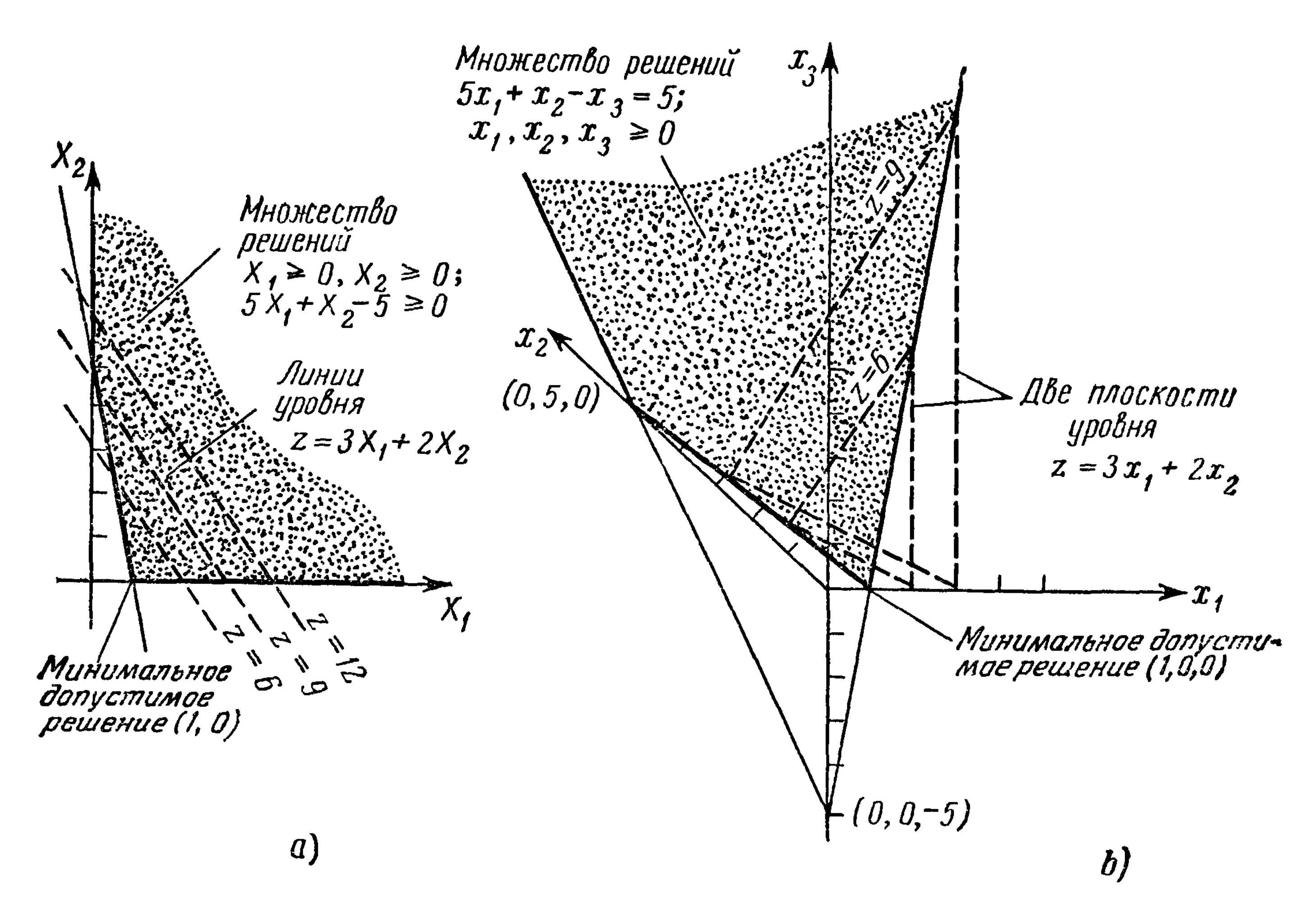


Рис. 11.4-1. Множество решений a) на плоскости (X_1, X_2), и b) в пространстве (x_1, x_2, x_3) для задачи линейного программирования

$$z = 3X_1 + 2X_2 = \min$$

при условиях

$$x_1 \equiv X_1 \geqslant 0, \; x_2 \equiv X_2 \geqslant 0, \; x_3 \equiv 5X_1 + X_2 - 5 \geqslant 0$$

или

$$z = 3x_1 + 2x_2 = \min$$

при условиях

$$5x_1 + x_2 - x_3 = 5, \; x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0, \; x_3 \geqslant 0.$$

(b) **Задача линейного программирования в стандартной форме. Допустимые решения.** Задача линейного программирования, сформулированная в п. 1, может быть путем введения в случае необходимости вспомогательных переменных сведена к **стандартной форме (основная задача линейного программирования):**

Требуется минимизировать целевую функцию

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{11.4-2a}$$

при $m < n$ линейных ограничениях-равенствах

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{11.4-2b}$$

и n линейных ограничениях-неравенствах

$$x_k \geqslant 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{11.4-2c}$$

Допустимое решение (план) задачи линейного программирования, данной в стандартной форме, есть упорядоченное множество чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих ограничениям (2b) и (2c); это — точка в n-мерном пространстве.

Допустимое решение, минимизирующее целевую функцию (2*a*), называется **оптимальным решением (оптимальным планом).**

Чаще всего оптимальное решение, если оно существует, единственно, однако возможны случаи, когда оптимальных решений бесчисленное множество.

Для существования допустимого решения необходимо (но не достаточно!), чтобы система (2*b*) была совместна. В дальнейшем считается, что это выполняется; ранг матрицы системы $r \leqslant m < n$. Тогда r линейно независимых уравнений системы (2*b*) определяют некоторые r неизвестных как линейные функции остальных $n-r$ неизвестных — *свободных неизвестных* (см. п. 1.9-4).

Фактически выражая все переменные через свободные неизвестные, можно прийти к задаче линейного программирования, содержащей $n-r$ переменных и n линейных ограничений-неравенств, выражающих неотрицательность исходных n переменных.

Допустимое решение, соответствующее нулевым значениям свободных неизвестных, называется **базисным допустимым решением (опорным планом), невырожденным,** если все остальные переменные *положительны,* и **вырожденным,** если среди них есть хоть одно нулевое.

Если существует какое-либо допустимое решение для задачи линейного программирования, то существует и базисное допустимое решение. Если, кроме того, целевая функция имеет нижнюю границу на множестве решений, т. е. существует оптимальное решение, то существует и оптимальное базисное решение.

Множество всех допустимых решений данной задачи линейного программирования есть **выпуклое множество** в n-мерном пространстве решений; это значит, что каждая точка $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ прямолинейного отрезка, соединяющего два допустимых решения $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$:

$$\xi_k = \alpha x_k + (1-\alpha) x'_k \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

см. также п. 3.1-7), есть также допустимое решение.

Более точно, *множество допустимых решений есть выпуклый многоугольник* или многогранник в плоскости или гиперплоскости, определяемый уравнениями (2*b*) с граничными линиями, плоскостями или гиперплоскостями (2*c*), как это указано в простом примере на рис. 11.4-1, *b*.

Если существует конечное оптимальное решение, то задача линейного программирования либо имеет единственное оптимальное решение в одной из вершин многогранника решений, либо минимальное значение z достигается на всем выпуклом множестве, порождаемом двумя или более вершинами (вырожденное решение).

(c) **Двойственность.** Задача минимизации

$$\left.\begin{aligned} &z = F(X_1, X_2, \ldots, X_r) \equiv C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_rX_r = \min \\ &\text{с ограничениями} \\ &A_{i1}X_1 + A_{i2}X_2 + \ldots + A_{ir}X_r - B_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \\ &X_k \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r) \end{aligned}\right\} \qquad (11.4\text{-}3)$$

и соответствующая задача максимизации

$$\left.\begin{aligned} &w = G(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m) \equiv B_1Y_1 + B_2Y_2 + \ldots + B_mY_m = \max \\ &\text{с ограничениями} \\ &A_{1k}Y_1 + A_{2k}Y_2 + \ldots + A_{mk}Y_m - C_k \leqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \\ &Y_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}\right\} \qquad (11.4\text{-}4)$$

называются **двойственными задачами линейного программирования.**

Если одна из задач (3) *или* (4) *имеет конечное оптимальное решение, то то же имеет место для второй задачи, причем*

$$\min z = \max w. \qquad (11.4\text{-}5)$$

Если одна из задач имеет неограниченное решение, то вторая задача не имеет допустимых решений.

Теорема двойственности позволяет заменить данную задачу линейного программирования другой, имеющей меньшее количество неизвестных или меньшее количество ограничений-неравенств, и поэтому используется в некоторых численных методах решений.

11.4-2. * Симплекс-метод.

(a) Задачи линейного программирования могут быть решены численными методами наискорейшего спуска, указанными в п. 20.2-6, однако симплекс-метод извлекает выгоду из линейности выражений (1) и (2).

В дальнейшем предполагается, что система уравнений (2*b*) линейно независима, т. е. что $r=m$. Если решение задачи линейного программирования существует, то оно достигается в одной из вершин многогранника решений; последние могут быть найдены совместным решением m линейных уравнений (2*b*) и каких-то $n-m$ уравнений $x_k=0$. Очевидно, что при большом числе переменных и ограничений этот процесс практически неосуществим ввиду крайне большого числа возможных вершин многогранника решений; симплекс-метод доставляет вычислительную схему перехода от вершины к вершине (от одного базисного решения к другому) в направлении наименьшего значения z.

(b) Применение симплекс-метода начинается с выбора какого-либо допустимого базисного решения. В принципе это можно сделать так: выбираются $n-m$ свободных переменных (свободных неизвестных), а остальные m переменных **(базисные переменные)** с помощью последовательного исключения переменных (п. 1.9-1 и 20.3-1) выражаются через них. Если базисные переменные обозначены через $x_1, x_2, \ldots, x_m$, то уравнения (2*a*) и (2*b*) в результате исключения могут быть записаны в следующей канонической форме:

$$\left.\begin{aligned} x_1+(\alpha_{1,\,m+1}x_{m+1}+\ldots+\alpha_{1n}x_n)&=\beta_1,\\ x_2+(\alpha_{2,\,m+1}x_{m+1}+\ldots+\alpha_{2n}x_n)&=\beta_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ x_m+(\alpha_{m,\,m+1}x_{m+1}+\ldots+\alpha_{mn}x_n)&=\beta_m,\\ z=(\gamma_{m+1}x_{m+1}+\ldots+\gamma_n x_n)+z_0&. \end{aligned}\right\} \qquad (11.4\text{-}6)$$

Если все β_i *неотрицательны, то*

$$x_i=\begin{cases}\beta_i, & i=1,\,2,\,\ldots,\,m,\\ 0, & i=m+1,\,m+2,\,\ldots,\,n\end{cases} \qquad (11.4\text{-}7)$$

образуют базисное допустимое решение.

Произведенный выбор свободных и базисных переменных далеко не очевиден; процедура, облегчающая выбор начального решения, будет описана в (d).

Если в выражении для целевой функции z *в* (6) *все* γ_i *неотрицательны, то решение* (7) *есть оптимальное решение* (никакое допустимое изменение свободных переменных не может уменьшить z). Это оптимальное решение единственно, если все γ_k положительны.

(c) Рассмотрим теперь случай, когда решение (7) является невырожденным базисным допустимым решением (т. е. $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m>0$, см. п. 11.4-1), которое *не оптимально*, т. е. среди γ_k есть отрицательные.

Пусть, для определенности, γ_K — наибольшее по абсолютной величине из отрицательных γ_k. Для получения улучшенного базисного допустимого решения в следующий итерационный цикл в качестве базисной переменной вводится x_K, заменяющее предшествующую базисную переменную x_I, которая в соответствии с уравнениями

$$x_i=\beta_i-\alpha_{iK}x_K \qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,m)$$

первой убывает до нуля, когда x_K возрастает от нулевого значения (это

возможно тогда, когда среди α_{iK} есть положительные). Значит, индекс I ассоциируется с наименьшей возможной величиной (обязательно положительной)

$$x_K = \frac{\beta_I}{\alpha_{IK}}. \qquad (11.4\text{-}8a)$$

Улучшенное базисное решение дается равенством (8*a*) и

$$x_i = \begin{cases} \beta_i - \alpha_{iK} x_K \geqslant 0 & (i = 1, 2, \ldots, m; \text{ заметим, что } x_I = 0), \\ 0 & (i = m+1, m+2, \ldots, n, \quad i \neq K). \end{cases} \qquad (11.4\text{-}8b)$$

При этом

$$z = z_0 + \gamma_K x_K = z_0 + \gamma_K \frac{\beta_I}{\alpha_{IK}} < z_0.$$

Теперь введение

$$x_K = \frac{\beta_I}{\alpha_{IK}} - \frac{1}{\alpha_{IK}} \left(x_I + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq K}}^{n} \alpha_{Ij} x_j \right) \qquad (11.4\text{-}9)$$

в систему (6) приводит ее к канонической форме относительно новых базисных переменных.

З а м е ч а н и е. Симплекс-метод не реализуем, если все α_{IK} *неположительны*; тогда целевая функция z не имеет нижней границы на множестве решений.

Полный симплекс-алгоритм можно удобным образом табулировать в виде симплекс-таблицы и осуществить с помощью электронных вычислительных машин; обычно оптимальное решение достигается за конечное число шагов.

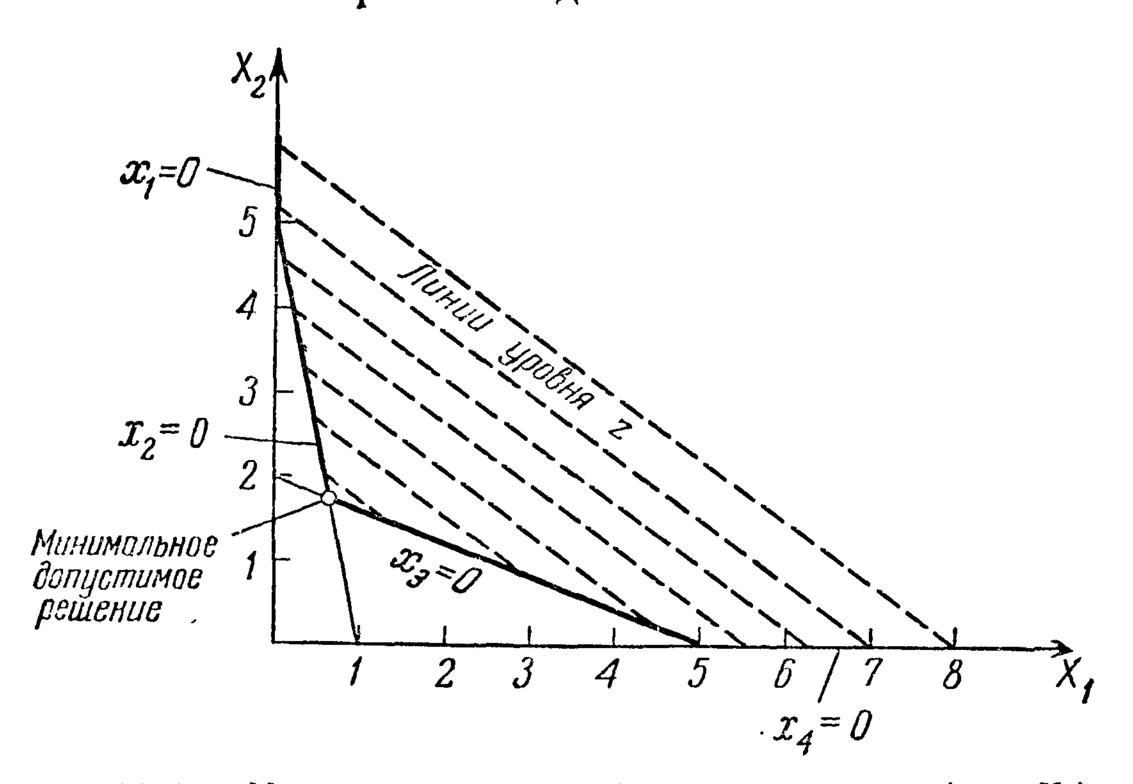


Рис. 11.4-2. Множество решений в пространстве (X_1, X_2).

Если в процессе вычислений базисные переменные соответствуют *вырождающемуся* базисному допустимому решению (т. е. одна из базисных переменных возвращается к нулевому значению, см. п. 11.4-1, b), дальнейшее уточнение значения целевой функции, в принципе, прекращается; однако в практических задачах это встречается редко.

Можно распространить симплекс-метод на случаи вырождения посредством малых изменений данных коэффициентов (метод возмущений).

П р и м е р (рис. 11.4-2). Задача минимизации функции

$$z = \frac{1}{4} X_1 + \frac{1}{3} X_2$$

с ограничениями-неравенствами

$$5X_1+X_2-5\geqslant 0, \qquad X_1\geqslant 0,$$
$$2X_1+5X_2-10\geqslant 0, \qquad X_2\geqslant 0$$

путем введения вспомогательных переменных

$$x_1=X_1, \quad x_2=5X_1+X_2-5, \quad x_3=2X_1+5X_2-10, \quad x_4=X_2$$

преобразуется к стандартной форме

$$z=\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{3}x_4=\min,$$
$$5x_1-x_2+x_4=5,$$
$$2x_1-x_3+5x_4=10,$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

Отправляясь от x_1 и x_2 как базисных переменных (первая вершина справа на рис. 11.4-2), получаем каноническую форму задачи:

$$x_1-\frac{1}{2}x_3+\frac{5}{2}x_4=5>0,$$
$$x_2-\frac{5}{2}x_3+\frac{23}{2}x_4=20>0,$$
$$24z=3x_3-7x_4+30.$$

Коэффициент при x_4 в последнем выражении отрицателен, целевая функция убывает при возрастании x_4. При этом возрастании первой обращается в нуль переменная x_2. Таким образом, x_4 заменяет базисную переменную x_2, $K=4$, $I=2$ и

$$x_4=\frac{20}{\frac{23}{2}}=\frac{40}{23}, \qquad x_1=\frac{15}{23}, \qquad x_2=x_3=0.$$

Новая каноническая форма задачи относительно x_1, x_4 есть

$$x_1-\frac{5}{23}x_2+\frac{1}{23}x_3=\frac{15}{23}>0,$$
$$x_4+\frac{2}{23}x_2-\frac{5}{23}x_3=\frac{40}{23}>0,$$
$$12\cdot 23z=7x_2+17x_3+205.$$

В целевой функции коэффициенты при свободных переменных x_2, x_3 положительны; значит, получено единственное оптимальное решение

$$z_{\min}=\frac{205}{12\cdot 23}=\frac{205}{276}.$$

(d) Использование искусственных переменных для начала симплекс-процедуры. Симплекс-метод, как описано, предполагает, что подходящий выбор начальных базисных переменных x_1, x_2, ..., x_m образует некоторое базисное допустимое решение с β_1, β_2, ..., $\beta_m\geqslant 0$.

Указанный выбор не очевиден. Нижеследующая процедура может быть применена для начала решения; она же позволяет установить существование допустимых решений.

Рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной форме (2) и будем считать, что уравнения (2b) записаны так, что все $b_i\geqslant 0$. Введем m искусственных переменных x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} и решим вспомогательную задачу о минимизации линейной формы

$$w=x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots+x_{n+m} \tag{11.4-10a}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+x_{n+1}&=b_1\geqslant 0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+x_{n+2}&=b_2\geqslant 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n+x_{n+m}&=b_m\geqslant 0,\\ x_k\geqslant 0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n+m).& \end{aligned}\right\} \tag{11.4-10b}$$

Принимая $x_1, x_2, \ldots, x_n$ за свободные переменные, а $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ — за базисные, получаем базисное допустимое решение вспомогательной задачи: $x_i=0$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ и $x_{n+j}=b_j$ для $1 \leqslant j \leqslant m$. Применяя симплекс-метод, находим оптимальное решение вспомогательной задачи. Если это решение таково, что $w_{\min}=0$, т. е. все $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ равны нулю, то оно определяет допустимое решение исходной задачи. Если же для оптимального решения $w_{\min}>0$, то исходная задача не имеет допустимых решений.

11.4-3. Нелинейное программирование. Теорема Куна — Такера. Если линейная целевая функция и/или одно или более линейных ограничений в задаче линейного программирования (1) заменены нелинейными относительно переменных X_k, то имеет место **задача нелинейного программирования.** Такая задача возникает, например, если границы множества решений и/или линии уровня z на рис. 11.4-1, *а* заменены кривыми.

Задачи нелинейного программирования представляют практический интерес, но, за малым исключением, поддаются лишь численным методам решения (п. 20.2-6).

Необходимое (но не достаточное) условие максимума функции

$$z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{11.4-11}$$

при условиях-неравенствах

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

заключается в существовании $m+1$ *неотрицательных множителей Лагранжа* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (см. п. 11.3-4), *не равных одновременно нулю и таких, что*

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_i \geqslant 0 && (i=0, 1, \ldots, m), \\ &\lambda_i\varphi_i=0 && (i=1, 2, \ldots, m), \\ &\lambda_0 \frac{\partial f}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}=0 && (k=1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{11.4-12a}$$

(*Теорема Ф. Джона*; функции f и φ_i предполагаются дифференцируемыми.)

В условиях (12*a*) λ_0 *положительно и может считаться равным единице всякий раз, когда существуют* n *действительных чисел* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *таких, что для рассматриваемых значений* $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} y_k \begin{cases} \leqslant 0, \text{ если } \varphi_i \text{ — линейная функция в некоторой окрестности } (x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ <0 \text{ в остальных случаях} \end{cases} \quad i=1, 2, \ldots, m \tag{11.4-12b}$$

(формулировка Эйбеди теоремы Куна — Такера).

11.4-4. Введение в конечные игры двух партнеров с нулевой суммой.

(а) Игры с чистыми стратегиями. **Конечная игра двух партнеров с нулевой суммой** есть модель конфликтной ситуации, характеризуемой конечной **матрицей выигрышей**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \tag{11.4-13}$$

где a_{ik} — (положительные или отрицательные) выигрыши игрока A у игрока B, если A выбирает i-ю из n **чистых стратегий** $S_1, S_2, \ldots, S_n$, удобных для него, а B выбирает k-ю из m чистых стратегий $S_1', S_2', \ldots, S_m'$, возможных для него. Ни один из игроков не знает выбора другого.

Заметим, что сумма выигрышей обоих игроков равна нулю при каждом ходе (отсюда и название — игра с нулевой суммой). Игра **симметрична**, когда $m=n$ и $a_{ki}=-a_{ik}$ для всех i, k.

Для выигрыша **максимизирующий игрок** A выбирает i-ю строку матрицы выигрышей с тем, чтобы максимизировать $\min\limits_k a_{ik}$, тогда как **минимизирующий игрок** B должен минимизировать $\max\limits_i a_{ik}$. *Для каждой заданной матрицы* (13)

$$\max_i \min_k a_{ik} \leqslant \min_k \max_i a_{ik}. \qquad (11.4\text{-}14)$$

Если обе величины в (14) *равны* для (не обязательно единственной) пары $i=I$, $k=K$, то говорят, что игра имеет **седловую точку** или **решение** I, K и (единственную) цену a_{IK}.

Оптимальные стратегии для такой игры не имеют смысла, если игрок A знает предстоящий ход B, и обратно.

(b) Игры со смешанными стратегиями. Смешанные стратегии определяются с помощью *вероятностей* (п. 18.2-2) $p_1, p_2, \ldots, p_n$, приписываемых игроком A его n возможным стратегиям $S_1, S_2, \ldots, S_n$, и вероятностей $p'_1, p'_2, \ldots, p'_m$, приписываемых игроком B его стратегиям $S'_1, S'_2, \ldots, S'_m$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{j=1}^{m} p'_j = 1\right).$$

В игре со смешанными стратегиями A стремится максимизировать минимум *математического ожидания* (п. 18.3-3)

$$\min_{p'_1, p'_2, \ldots, p'_m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} p_i p'_k$$

посредством выбора $p_1, p_2, \ldots, p_n$, тогда как B стремится минимизировать

$$\max_{p_1, p_2, \ldots, p_n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} p_i p'_k$$

путем выбора $p'_1, p'_2, \ldots, p'_m$.

Для любой заданной матрицы выигрышей (13)

$$\max_{p_1, p_2, \ldots, p_n} \left[\min_{p'_1, p'_2, \ldots, p'_m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} p_i p'_k\right] =$$

$$= \min_{p'_1, p'_2, \ldots, p'_m} \left[\max_{p_1, p_2, \ldots, p_n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} p_i p'_k\right] \qquad (11.4\text{-}15)$$

(*теорема минимакса для конечной игры двух партнеров с нулевой суммой выигрыша*). Общая величина (15) называется **ценой** v игры.

Каждая конечная игра двух партнеров с нулевой суммой имеет по меньшей мере одно **решение**, *определяемое оптимальными стратегиями* $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $p'_1, p'_2, \ldots, p'_m$.

Возможны и несколько решений, но цена игры необходимо единственна. Безобидная игра двух партнеров с нулевой суммой имеет цену, равную нулю.

Пример. Известная игра «герб-решка» имеет матрицу выигрышей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

в которой стратегия 1 для каждого игрока есть решка-герб, а стратегия 2 — герб-решка. Игра симметричная, безобидная и не имеет седловых точек.

Решение: $p_1 = p'_1 = 1/2$, $p_2 = p'_2 = 1/2$.

(c) Связь с линейным программированием. Игры со смешанными стратегиями привели к развитию некоторых приближенных методов, однако наиболее важные приложения связаны с линейным программированием.

Решение данной матричной игры не изменяется от прибавления ко всем a_{ik} одной и той же положительной константы a, так что не будет ограничением рассматривать игры с положительной ценой $v > 0$. В этом случае *оптимальные стратегии* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *и* $p'_1, p'_2, \ldots, p'_m$ *и цена* v *конечной игры двух партнеров с нулевой суммой с заданной матрицей выигрышей* (13) *есть*

$$\left.\begin{aligned} &p_i = vX_i \quad (i=1, 2, \ldots, n),\\ &p'_k = vY_k \quad (k=1, 2, \ldots, m),\\ &v = \frac{1}{z_{\min}} = \frac{1}{w_{\max}}, \end{aligned}\right\} \qquad (11.4\text{-}16)$$

где $z_{\min}$, $w_{\max}$, X_i, Y_k *определяются как решения двойственных задач линейного программирования* (п. 11.4-1):

$$z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \min$$

с ограничениями

$$a_{1k}X_1 + a_{2k}X_2 + \ldots + a_{nk}X_n \geqslant 1 \qquad (k=1, 2, \ldots, m),$$
$$X_i \geqslant 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

и

$$w = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_m = \max$$

с ограничениями

$$a_{i1}Y_1 + a_{i2}Y_2 + \ldots + a_{im}Y_m \leqslant 1 \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$
$$Y_k \geqslant 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, m).$$

11.5. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

11.5-1. Вариации.

(a) **Вариация** δy функции $y(x)$ переменного x есть функция от x, определяемая при каждом значении x как разность $\delta y \equiv Y(x) - y(x)$ новой функции $Y(x)$ и функции $y(x)$.

Вариацию δy, вызывающую *изменение функционального отношения между* y и x, не следует смешивать с приращением Δy *значения* данной функции $y(x)$, вызываемым приращением Δx независимого переменного x (п. 11.2-1).

(b) Если дана функция $F[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x); x]$, то ее приращение, соответствующее вариациям $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_n$ функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, есть

$$\Delta F \equiv F(y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2, \ldots, y_n + \delta y_n; x) - F(y_1, y_2, \ldots, y_n; x). \qquad (11.5\text{-}1)$$

Если функции $y(x)$ и δy дифференцируемы, то вариация $\delta y'$ производной $y'(x)$, вызываемая вариацией δy, есть

$$\delta y' \equiv \delta \frac{dy}{dx} \equiv \frac{d}{dx}(\delta y) \equiv Y'(x) - y'(x). \qquad (11.5\text{-}2)$$

Если дана функция $F[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x); y'_1(x), y'_2(x), \ldots, y'_n(x); x]$, то ее приращение, соответствующее вариациям $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_n$, есть

$$\Delta F \equiv F(y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2, \ldots, y_n + \delta y_n; y'_1 + \delta y'_1, y'_2 + \delta y'_2, \ldots, y'_n + \delta y'_n; x) - F(y_1, y_2, \ldots, y_n; y'_1, y'_2, \ldots, y'_n; x). \qquad (11.5\text{-}3)$$

(c) Если функция F имеет в некоторой области непрерывные частные производные второго порядка, то ее приращение, определяемое равенством (3), можно представить в виде

$$\Delta F = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y'_i} \delta y'_i \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k} \delta y_i \, \delta y_k + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y'_k} \delta y_i \, \delta y'_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \, \partial y'_k} \delta y'_i \, \delta y'_k \right\} + o(\rho^2), \quad (11.5\text{-}4)$$

где

$$\rho = \sqrt{\delta y_1^2 + \delta y_1'^2 + \delta y_2^2 + \delta y_2'^2 + \ldots + \delta y_n^2 + \delta y_n'^2} \quad (\text{п. } 4.10\text{-}5).$$

Члены степени 1 и 2 относительно δy и $\delta y'$ в формуле Тейлора (4) соответственно составляют **первую вариацию** δF функции F и половину **второй** ее **вариации** $\delta^2 F$.

(d) Определения и формулы пп. 11.5-1.a, b и c без изменений переносятся на функции y, y_i и F двух и большего числа независимых переменных x_1, x_2, ...

11.5-2. Максимумы и минимумы определенных интегралов. В то время как теория обыкновенных максимумов и минимумов (пп. 11.2-1 — 11.3-5) имеет дело с *неизвестными значениями независимых переменных* x или x_i, соответствующими максимумам и минимумам заданных функций, предметом **вариационного исчисления** является отыскание *неизвестных функций* $y(x)$ или $y_i(x)$, *реализующих максимум или минимум определенных интегралов вида*

$$I = \int_{x_0}^{x_F} F[y(x), \; y'(x), \; x] \, dx \quad (11.5\text{-}5a)$$

или

$$I = \int_{x_0}^{x_F} F[y_1(x), \; y_2(x), \; \ldots, \; y_n(x); \; y'_1(x), \; y'_2(x), \; \ldots, \; y'_n(x); \; x] \, dx, \quad (11.5\text{-}5b)$$

где F — данная функция, причем заданы конечные пределы интегрирования x_0, x_F и граничные значения $y(x_0)$, $y(x_F)$ или $y_i(x_0)$, $y_i(x_F)$. В других задачах пределы интегрирования и/или граничные значения также неизвестны и нуждаются в определении. I есть **функционал** (п. 12.1-4), определенный на соответствующем множестве функций.

Определенный интеграл (5) имеет **сильный максимум** или **сильный минимум** для данной функции $y(x)$ или данной системы функций $y_i(x)$, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что

$$\Delta I \equiv \Delta \int_{x_0}^{x_F} F \, dx \equiv \int_{x_0}^{x_F} \Delta F \, dx < 0 \quad \text{или} \quad \Delta I > 0 \quad (11.5\text{-}6)$$

для всех вариаций δy или для всех систем вариаций δy_i, для которых соответственно $0 < |\delta y| < \varepsilon$ или $0 < \sqrt{\delta y_1^2 + \delta y_2^2 + \ldots + \delta y_n^2} < \varepsilon$ при $x_0 \leqslant x \leqslant x_F$.

Интеграл I имеет **слабый максимум** или **слабый минимум**, если неравенство (6) выполняется для всех вариаций δy или δy_i, для которых соответственно $0 < \sqrt{\delta y^2 + \delta y'^2} < \varepsilon$ или $0 < \sqrt{\delta y_1^2 + \delta y_1'^2 + \ldots + \delta y_n^2 + \delta y_n'^2} < \varepsilon$ при $x_0 \leqslant x \leqslant x_F$.

Условия слабого экстремума сужают множество допустимых функций сравнения; поэтому *сильный максимум (или минимум) является в то же время и слабым максимумом (или минимумом).*

Пусть область значений допустимых функций $y(x)$ или $y_i(x)$ удовлетворяет неравенствам типа

$$y(x) \leqslant a, \qquad f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \geqslant 0.$$

Тогда, если значения функций $y(x)$ или $y_i(x)$, реализующих экстремум интеграла I, лежат внутри области значений, то говорят о **внутреннем экстремуме**; если же эти значения полностью или частично лежат на границе области значений, то говорят о **граничном экстремуме**.

В большинстве приложений функции $y(x)$ или $y_i(x)$, дающие максимум или минимум интегралу (5), должны выбираться не среди множества *всех* возможных функций от x, а лишь среди множества функций определенного класса. **В дальнейшем всюду, где это необходимо, предполагается, что рассматриваемые интегралы существуют и что 1) функции, дающие максимум или минимум интегралу, выбираются среди множества всех функций, имеющих на рассматриваемом промежутке или области непрерывные вторые производные, и 2) каждая подынтегральная функция F имеет непрерывные вторые производные.**

11.5-3. Решение вариационных задач. Функции $y(x)$ или $y_i(x)$, реализующие максимум или минимум данного определенного интеграла, могут быть найдены 1) как *решения дифференциальных уравнений,* получающихся из условия $\delta F=0$ (пп. 11.6-1 — 11.6-7), или же 2) *«прямыми» методами*, описанными в пп. 11.7-1 — 11.7-3.

Нетривиально замечание, что *задача рассматриваемого здесь типа может не иметь решения.* Для каждого решения, полученного с помощью необходимых (но не достаточных) условий пп. 11.6-1 — 11.6-7, *должно быть проверено, действительно ли оно обладает свойствами максимума или минимума.* Некоторые *достаточные* условия существования экстремума определенных интегралов рассмотрены в п. 11.6-9.

11.6. ЭКСТРЕМАЛИ КАК РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ: КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

11.6-1. Необходимые условия максимумов и минимумов.

(а) *Необходимым условием существования максимума или минимума определенного интеграла*

$$I=\int_{x_0}^{x_F} F\,[y(x),\ y'(x),\ x]\,dx \tag{11.6-1}$$

при фиксированных x_0 и x_F является равенство

$$\delta I=\int_{x_0}^{x_F}\delta F\,dx=\frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y\,\Bigg|_{x_0}^{x_F}-\int_{x_0}^{x_F}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}\right]\delta y\,dx=0$$

для произвольно малой вариации δy. Поэтому каждая функция $y(x)$, реализующая максимум или минимум этого интеграла, должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}\equiv\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0 \tag{11.6-2}$$

(*уравнение Эйлера*).

Общее решение уравнения (2) содержит две произвольные постоянные (если $F_{y'y'}\neq 0$); они определяются из того, что функция $y(x)$ либо принимает заданные граничные значения $y(x_0)$ и/или $y(x_F)$, либо же удовлетворяет каким-либо другим условиям, определяющим ее граничные значения (п. 11.6-5).

Приведенное условие является необходимым условием слабого экстремума, а значит, и сильного. Отметим, что достаточные условия слабого экстремума менее ограничительны, чем сильного (п. 11.6-10).

(b) Точно так же *каждая система из n функций* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, *реализующая максимум или минимум определенного интеграла*

$$I = \int_{x_0}^{x_F} F[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x); y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x); x]\,dx, \qquad (11.6\text{-}3)$$

должна удовлетворять системе n дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ (уравнения Эйлера)} \qquad (11.6\text{-}4)$$

и некоторым заданным граничным условиям (см. также п. 11.6-1, c).

Функции $y(x)$ или $y_i(x)$, удовлетворяющие уравнению или уравнениям Эйлера для данной вариационной задачи, называются **экстремалями** рассматриваемой задачи; они образуют $2n$-параметрическое семейство.

(c) *Дальнейшим необходимым (но не достаточным) условием максимума или минимума I является то, что на экстремали матрица* $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'}\right]$ *соответственно неположительна или неотрицательна* (п. 13.5-2) (*условие Лежандра*). В одномерном случае эти условия сводятся соответственно к $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \leqslant 0$ или $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geqslant 0$ (см. пп. 11.6-7 и 11.6-10).

Вообще говоря, необходимые условия п. 11.6-1, a и b предполагают, что функции $y(x)$ или $y_i(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы, однако это не является каким-либо дополнительным ограничением. *Если интегрируемая функция F имеет непрерывные вторые производные, то все непрерывно дифференцируемые функции $y(x)$ или $y_i(x)$, реализующие экстремум интеграла I, необходимо имеют непрерывные вторые производные во всех точках интервала (x_0, x_F), в которых $\partial^2 F/\partial y'^2 \neq 0$ или соответственно матрица* $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'}\right]$ — *положительно или отрицательно определенная* (п. 13.5-2) (*теорема Дюбуа — Реймона*).

(d) Получение условий (2) и (4) из $\delta I = 0$ основано на *фундаментальных леммах вариационного исчисления:*

1. *Если $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[x_0, x_F]$ и* $\int_{x_0}^{x_F} f(x)\,g(x)\,dx = 0$ *для любой функции $g(x)$, имеющей непрерывную производную и такой, что $g(x_0) = g(x_F) = 0$, то $f(x) \equiv 0$ на $[x_0, x_F]$.*

2. *Если $f(x)$ непрерывна на $[x_0, x_F]$ и* $\int_{x_0}^{x_F} f(x)\,g(x)\,dx = 0$ *для любой непрерывной функции $g(x)$ такой, что* $\int_{x_0}^{x_F} g(x)\,dx = 0$, *то $f(x)$ является константой.*

Примеры приложений, в которых рассматриваются вариационные задачи: геодезические в римановых пространствах (п. 17.4-3); вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона. См. также п. 15.4-7.

Пример. *Брахистохрона в трехмерном пространстве.* Если в трехмерном пространстве задана прямоугольная декартова система координат, причем ось Ox направлена вертикально вниз, то эта классическая задача состоит в определении пространственной кривой $y = y(x)$, $z = z(x)$, для которой материальная точка, скользя по этой кривой без трения под действием силы тяжести из начала координат, достигает некоторой заданной точки $[x_F > 0, y(x_F), z(x_F)]$ за наименьшее время. Так как в силу закона сохранения энергии

$$gx = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$

где g — ускорение силы тяжести, то нужно найти минимум интеграла

$$t\sqrt{2g} = \int_0^{x_F} \frac{1}{x^{1/2}} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\, dx.$$

Уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x^{1/2}\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{x^{1/2}\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}}\right) = 0$$

или

$$\frac{y'}{x^{1/2}\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = c_1, \qquad \frac{z'}{x^{1/2}\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = c_2,$$

где c_1 и c_2 — константы. Так как $\frac{dy}{dz} = \frac{c_1}{c_2}$, то кривая должна лежать в вертикальной плоскости, которая, если задать граничные условия

$$y(x_F) = y_F, \qquad z(x_F) = 0,$$

будет плоскостью Oxy. В этом случае $z' = 0$ и $\frac{y'}{x^{1/2}\sqrt{1 + y'^2}} = c_1$. Положив, $y' = \operatorname{tg}(t/2)$, найдем

$$x = a(1 - \cos t), \qquad \text{где } a = \frac{1}{2c_1^2}.$$

Далее

$$dy = y'\,dx = \operatorname{tg}(t/2)\, a \sin t\, dt = a(1 - \cos t)\, dt$$

и

$$y = a(t - \sin t) + k.$$

Поскольку $y = 0$ при $x = 0$, постоянная k должна быть равна нулю. Постоянная a будет зависеть от значений x_F и y_F. Искомая кривая является циклоидой (п. 2.6-2, е) с основанием на оси Oy и точкой возврата в начале координат.

Замечание. Задача о брахистохроне, как и задача из п. 11.6-3, представляет пример задачи на минимум криволинейного интеграла (п. 4.6-10). Задачи этого типа всегда можно свести к случаю, когда интегрирование производится лишь по одной независимой переменной.

11.6-2. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа. Требуется найти систему функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, реализующую максимум или минимум определенного интеграла (3) и, кроме того, подчиняющуюся $m < n$ достаточно гладким *дополнительным условиям* или *уравнениям связи*

$$\varphi_j(y_1, y_2, \ldots, y_n;\, x) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots;\, m < n). \tag{11.6-5}$$

Если невозможно непосредственно исключить m из n переменных y_i, воспользовавшись соотношениями (5), то искомую систему функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ получают как решение системы дифференциальных уравнений (*уравнений Эйлера*)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{11.6-6}$$

подчиненное условиям (5), где

$$\Phi \equiv F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x)\, \varphi_j. \tag{11.6-7}$$

Неизвестные функции $\lambda_j(x)$ называются **множителями Лагранжа** (см. также п. 11.3-4). Если задача имеет решение, то $n + m$ функций y_i и λ_j определя-

ются из $n+m$ уравнений (6) и (5) и из заданных граничных условий. Дифференциальные уравнения (6) являются необходимыми, но не достаточными условиями максимума или минимума.

Метод множителей Лагранжа можно применять и в случае достаточно гладких *неголономных условий* вида

$$\varphi_j(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ y'_1, y'_2, \ldots, y'_n;\ x) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \qquad (11.6.\text{-}8)$$

11.6-3. Изопериметрические задачи. *В изопериметрической задаче* требуется найти систему функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, реализующую максимум или минимум определенного интеграла (3) и подчиняющуюся условиям

$$\int_{x_0}^{x_F} \Psi_k(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ y'_1, y'_2, \ldots, y'_n;\ x)\,dx = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \qquad (11.6\text{-}9)$$

где c_k — заданные постоянные. Если функции Ψ_k достаточно гладкие, то применим метод множителей Лагранжа: неизвестные функции $y_i(x)$, подчиненные условиям (9), должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений (6), где в этом случае

$$\Phi \equiv F + \sum_{k=1}^{r} \mu_k \Psi_k. \qquad (11.6\text{-}10)$$

r множителей Лагранжа μ_k являются *постоянными* и их вместе с n неизвестными функциями $y_i(x)$ находят из $r+n$ уравнений (9) и (6) и заданных граничных условий.

Пример. Площадь плоской области, ограниченной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, можно найти с помощью формулы

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt,$$

где t — подходящим образом выбранный параметр. Чтобы найти максимум площади I при дополнительном условии

$$\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]dt = R^2,$$

где R — отличная от нуля постоянная, положим

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + \mu\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right].$$

Уравнения Эйлера (6) имеют вид

$$-\frac{dy}{dt} + 2\mu\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{dx}{dt} + 2\mu\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Заданное дополнительное условие и эти уравнения удовлетворяются при

$$x = R\cos\frac{t}{2\mu} + x_0, \qquad y = -R\sin\frac{t}{2\mu} + y_0, \qquad \text{где}\quad \mu = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

т. е. искомая кривая есть окружность радиуса R (см. также п. 11.7-1).

Замечание. Чтобы найти максимум или минимум интеграла (3), подчиненного m дополнительным условиям (5) и r условиям (9), пользуются уравнениями (6), где

$$\Phi \equiv F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x)\,\varphi_j + \sum_{k=1}^{r} \mu_k \Psi_k.$$

11.6-4. Решение вариационных задач в случае, когда подынтегральная функция содержит производные высших порядков. Чтобы найти максимум или минимум определенных интегралов вида

$$I=\int\limits_{x_0}^{x_F} F(y_1, y_2, \ldots, y_n;\; y_1', y_2', \ldots, y_n';\; y_1'', y_2'', \ldots, y_n'';\; \ldots;\; x)\, dx, \qquad (11.6\text{-}11)$$

можно все производные выше первого порядка ввести в качестве новых независимых переменных, связав их друг с другом и с y_i условиями $y_i''=dy_i'/dx$, $y_i'''=dy_i''/dx$, ... В результате необходимые условия максимума и минимума интеграла (14) принимают вид

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i''}\right)-\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'''}\right)+\ldots=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n); \qquad (11.6\text{-}12)$$

при этом предполагается, что подынтегральная функция является достаточно гладкой. Для того чтобы решить задачу полностью, следует еще задать граничные значения всех производных до $(n-1)$-го порядка включительно каждой из функций y_i, входящих в F.

11.6-5. Вариационные задачи с неизвестными граничными значениями и неизвестными пределами интегрирования.

(a) Даны пределы интегрирования, неизвестны граничные значения. Чтобы найти максимум или минимум определенного интеграла (3) в случае, когда одно или несколько граничных значений $y_i(x_0)$ и/или $y_i(x_F)$ не заданы и не связаны какими-либо условиями (см. п. 11.6-5c), каждое отсутствующее условие заменяется соответствующим *естественным граничным условием*

$$\frac{\partial F}{\partial y_i'}=0 \qquad (x=x_0 \text{ и/или } x=x_F). \qquad (11.6\text{-}13)$$

Общее число условий по-прежнему равно $2n$ и позволяет найти $2n$ произвольных постоянных, содержащихся в общем решении уравнений Эйлера.

(b) Даны граничные значения, неизвестны пределы интегрирования. Если один из пределов интегрирования, например, x_F, не дан, но граничные значения $y_i(x_F)$ даны, то экстремаль $y_i(x)$ должна удовлетворять соотношению

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_k'} y_k' - F = 0 \qquad (x=x_F). \qquad (11.6\text{-}14)$$

(c) Общее условие трансверсальности. Часто один из пределов интегрирования, например, x_F и/или одно или несколько значений $y_i(x_F)$ не даны явно, но известно, что «точка» $[x_F, y_1(x_F), y_2(x_F), \ldots, y_n(x_F)]$ удовлетворяет n непрерывно дифференцируемым соотношениям

$$G_j[x;\; y_1(x), \ldots, y_n(x)]=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n_1 \leqslant n). \qquad (11.6\text{-}15)$$

Предел интегрирования x_F и неизвестные функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, максимизирующие или минимизирующие интеграл (3), удовлетворяют уравнениям Эйлера (4), граничным условиям (15) и *условиям трансверсальности.*

$$\frac{\partial F}{\partial y_i'}+\sum_{j=1}^{n_1} \Lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial y_i}=0 \qquad (x=x_F) \qquad (11.6\text{-}16a)$$

для каждого значения $y_i(x_F)$, не заданного явно, и

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_k'} y_k' - F\right] - \sum_{j=1}^{n_1} \Lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial x} = 0 \qquad (x = x_F), \qquad (11.6\text{-}16b)$$

если x_F неизвестно. Λ_j суть n_1 множителей Лагранжа, подлежащие определению вместе с $n+1$ неизвестными $y_i(x_F)$ и/или x_F из $n+n_1+1$ соотношений (15) и (16).

Заметим, что уравнения (13) и (14) являются частными случаями уравнений (16*a*) и (16*b*).

В простейшем частном случае $n=1$ и $G(x, y) \equiv y - \varphi(x) = 0$ условие рансверсальности имеет вид

$$F(x, y, y') + [\varphi'(x) - y'] F_{y'}(x, y, y') = 0 \qquad (x = x_F).$$

(**d**) Аналогичные методы используются в случае, когда заданы не все граничные условия, соответствующие $x = x_0$.

Пример. Минимизировать интеграл

$$I = \int_{t_0}^{t_F} G[x(t), y(t), z(t)]\, ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t_F} G(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$[G(x, y, z) > 0],$$

где (x_0, y_0, z_0) и (x_F, y_F, z_F) лежат на двух подходящих (выпуклых) непересекающихся регулярных поверхностях S_0 и S_F, определенных уравнениями

$$B_0(x, y, z) = 0, \qquad B_F(x, y, z) = 0.$$

Здесь условия трансверсальности имеют вид

$$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} : \frac{dz}{dt} = \begin{cases} \dfrac{\partial B_0}{\partial x} : \dfrac{\partial B_0}{\partial y} : \dfrac{\partial B_0}{\partial z} & (t = t_0), \\[2ex] \dfrac{\partial B_F}{\partial x} : \dfrac{\partial B_F}{\partial y} : \dfrac{\partial B_F}{\partial z} & (t = t_F), \end{cases}$$

т. е. экстремаль пересекает поверхности S_0 и S_F ортогонально.

Если, в частности, $G(x, y, z) \equiv 1$, то I есть расстояние между поверхностями и экстремаль есть прямая.

Существование минимума зависит от специальных свойств (выпуклости) данных поверхностей.

11.6-6. Задачи Больца и Майера. Функционал вида

$$J = \int_{x_0}^{x_F} F\left[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x);\ y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x);\ x\right] dx +$$

$$+ h\left[y_1(x_F), y_2(x_F), \ldots, y_n(x_F);\ x_F\right], \qquad (11.6\text{-}17)$$

который максимизируется на некотором классе функций $y_i(x)$ (*задача Больца*), удовлетворяющих заданным граничным условиям (15), может быть записан в виде

$$J = \int_{x_0}^{x_F} \left(F + y_{n+1}'\right) dx, \qquad (11.6\text{-}18)$$

где y_{n+1} — дополнительная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению-связи

$$y'_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial y_k} y'_k + \frac{\partial h}{\partial x} \qquad (x_0 \leq x \leq x_F) \tag{11.6-19}$$

и граничным условиям

$$y_{n+1}(x_0) = 0, \quad y_{n+1}(x_F) = h[y_1(x_F), y_2(x_F), \ldots, y_n(x_F); x_F]; \tag{11.6-20}$$

y_i удовлетворяют уравнениям Эйлера для интеграла (18), составленным с учетом наложенных связей (см. п. 11.6-2). Аналогичная процедура используется, если дополнительно даны условия, связывающие граничные значения на конце $x = x_0$.

Если $y_i(x)$ удовлетворяет заданным дифференциальным связям, но $F \equiv 0$, так что минимизируется или максимизируется только граничная функция h, то такая задача называется *задачей Майера*, которая будет рассмотрена в пп. 11.8-1 — 11.8-6, посвященных теории управления.

11.6-7. Ломаные экстремали. Отражение, преломление и односторонние экстремумы. Функции $y(x)$ или $y_i(x)$, максимизирующие или минимизирующие определенный интеграл (1) или (3), могут предполагаться принадлежащими классу непрерывных функций, обладающих кусочно-непрерывной производной (п. 11.5-2).

Они могут иметь *угловые точки* для значений x, таких, что $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0$ или матрица $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \, \partial y'_k}\right]$ — полуопределенная для некоторых y, y' или $y_1, y_2, \ldots, y_n; y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ или же когда F имеет разрывы (п. 11.6-1 и 13.5-2).

Угловые точки, в частности, могут встречаться:

1. Для некоторых x на интервале значений x, как это показано на рис. 11.6-1, a.

2. На кривой, поверхности, гиперповерхности

$$S(x, y) = 0 \quad \text{или} \quad S(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \tag{11.6-21}$$

пересекаемых экстремалями («преломление» экстремалей, рис. 11.6-1, b).

3. На границе некоторой области, из которой экстремали исключены посредством ограничений-неравенств

$$S(x, y) \leq 0 \quad \text{или} \quad S(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) \leq 0 \tag{11.6-22}$$

(рис. 11.6-1, c и d).

В каждой «свободной» угловой точке $[x_1, y(x_1)]$ *или* $[x_1; y_1(x_1), y_2(x_1), \ldots, y_n(x_1)]$ (см. рис. 11.6-1, a, но не b, c, d) *экстремали должны удовлетворять соотношениям*

$$\left.\begin{aligned} &F_{y'}(x_1 - 0) = F_{y'}(x_1 + 0), \quad [F_{y'}y' - F]_{x = x_1 - 0} = [F_{y'}y' - F]_{x = x_1 + 0}; \\ &\text{или} \\ &F_{y'_i}(x_1 - 0) = F_{y'_i}(x_1 + 0), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \\ &\left[\sum_{k=1}^{n} F_{y'_k} y'_k - F\right]_{x = x_1 - 0} = \left[\sum_{k=1}^{n} F_{y'_k} y'_k - F\right]_{x = x_1 + 0} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(условия Вейерштрасса — Эрдмана).} \end{aligned}\right\} \tag{11.6-23}$$

Разбор примеров, соответствующих рис. 11.6-1, a — d, см. [9.3].

В случае отражения (рис. 11.6-1, b) и преломления (рис. 11.6-1, c) экстремалей линия, поверхность или гиперповерхность, определенные уравнениями (21) или (22), являются промежуточными границами, в точках пересечения с которыми экстремали должны удовлетворять угловым условиям

$$\left.\begin{aligned} &F_{y'}(x_1 + 0) - F_{y'}(x_1 - 0) = -\Lambda \left\{ \left.\frac{\partial S}{\partial y_i}\right|_{x_1 + 0} - \left.\frac{\partial S}{\partial y_i}\right|_{x_1 - 0} \right\} i = 1, 2, \ldots, n, \\ &\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y'_k} y'_k - F\right]_{x = x_1 + 0} - \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y'_k} y'_k - F\right]_{x = x_1 - 0} = \\ &\qquad = \Lambda \left\{ \left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{x_1 + 0} - \left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{x_1 - 0} \right\}, \end{aligned}\right\} \tag{11.6-24}$$

где постоянная Λ — множитель Лагранжа.

В каждом случае угловые условия дополняют заданные граничные условия для нахождения угловых точек.

В случае граничного (одностороннего) экстремума, показанного на рис. 11.6-1, d, *экстремум может достигаться лишь на кривых, состоящих из дуг экстремалей и частей границы указанной выше области, причем в точках перехода экстремалей на границу они имеют общую касательную* (см. также п. 11.8-5).

Замечание. В частном случае $I = \int_{t_0}^{t_F} G(x, y, z)\, ds$, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, угловые условия соответствуют законам отражения и преломления в оптике, если $G(x, y, z)$ интерпретировать как величину, обратную скорости распространения света.

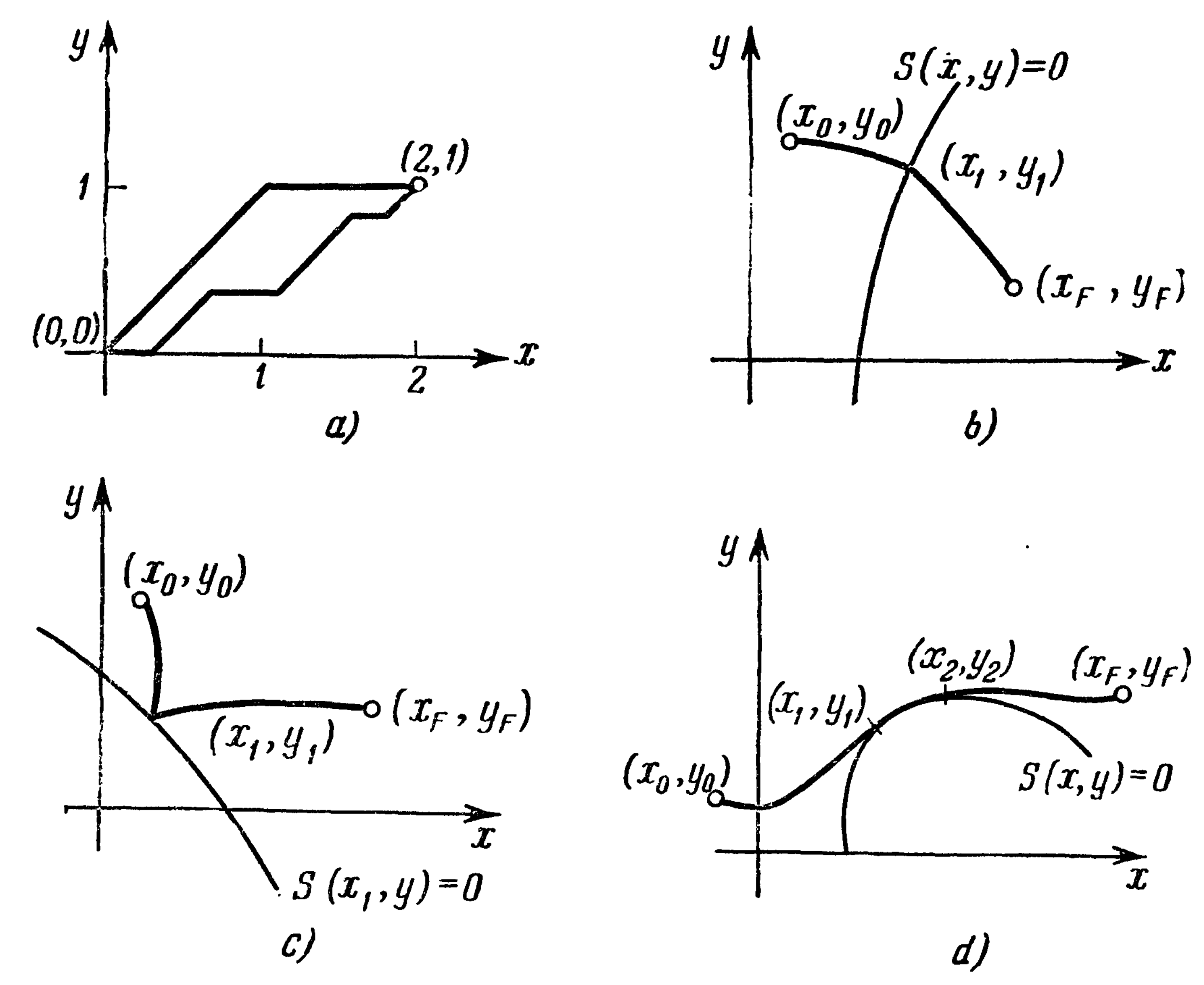


Рис. 11.6-1. Экстремали с угловыми точками.

a) Две бесконечные последовательности кусочно-линейных экстремалей минимизируют

$$I = \int_0^2 (1 - y')^2\, y'^2\, dx, \qquad y(0) = 0,\ y(2) = 1.$$

Уравнение Эйлера — Лагранжа определяет семейство экстремалей $y = ax + b$, где a и b находятся из граничных условий и условий Вейерштрасса — Эрдмана, откуда следует, что a равно либо 0, либо 1. Заметим, что

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 12y'^2 - 12y' + 2$$

не может обращаться в нуль на (0, 2) и $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0$ каждой минимизирующей экстремали. Заметим также, что не существует гладкой экстремали, доставляющей наименьшее значение I.

b) Преломление экстремалей.

c) Отражение экстремалей от граничной линии.

d) Экстремаль, частично совпадающая с граничной линией.

11.6-8. Канонические уравнения и уравнение Гамильтона — Якоби.

(a) n уравнений Эйлера (4), соответствующих вариационной задаче п. 11.6-1, b, эквивалентны $2n$ уравнениям первого порядка:

$$y'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (11.6\text{-}25a)$$

относительно $2n$ функций y_i и $p_i = \partial F/\partial y_i'$, где

$$\left.\begin{aligned} &H(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n;\ x) \equiv \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n} p_i y_i' - F\left(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ y_1', y_2', \ldots, y_n';\ x\right), \\ &\det\left[F_{y_i' y_k'}\right] \neq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (11.6\text{-}25b)$$

(контактные преобразования, см. также п. 10.2-6 и 10.2-7). Система (11.6-25 *а*) называется *канонической системой уравнений Эйлера* или кратко *каноническими уравнениями.*

Заметим, что условия трансверсальности (13), (14), (16) *и угловые условия* (23), (24) *значительно упрощаются введением функций* p_i *и* H. В классической динамике **канонически сопряженные или присоединенные переменные** p_i интерпретируются как обобщенные моменты, а **гамильтонова функция** H имеет размерность энергии. В пп. 11.8-1 — 11.8-6, в связи с теорией управления, задачи вариационного исчисления переформулированы в терминах канонических уравнений.

Иногда можно упростить решение задачи введением $2n+1$ новых переменных $\bar{y}_i, \bar{p}_i$ $\bar{H}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n;\ \bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n;\ x)$ посредством *канонических преобразований* (п. 10.2-6), из которых следуют новые канонические уравнения

$$\bar{y}_i' = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i}, \qquad \bar{p}_i' = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{y}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

(b) Предполагая, что минимум

$$\begin{aligned} \min_{y_1(x),\, y_2(x),\, \ldots,\, y_n(x)} I &= \min \int_{x_0}^{x_F} F(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ y_1', y_2', \ldots, y_n';\ x)\, dx \equiv \\ &\equiv S[x_0, y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0);\ y_1(x_F), y_2(x_F), \ldots, y_n(x_F)] \equiv \\ &\equiv S[x_0, y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)] \equiv S(X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \end{aligned}$$

определяет единственную экстремаль при фиксированных x_F, $y_i(x_F)$ и переменных $x_0 = X$, $y_i(x_0) = Y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, функция $S(X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ удовлетворяет уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial S}{\partial X} + H\left(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n;\ \frac{\partial S}{\partial Y_1}, \frac{\partial S}{\partial Y_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial Y_n};\ X\right) = 0 \qquad (11.6\text{-}26)$$

(*уравнение Гамильтона — Якоби*).

Обыкновенные дифференциальные уравнения (25*а*) являются уравнениями характеристик для (26) (см. также п. 10.2-7).

11.6-9. Вариационные задачи в случае нескольких независимых переменных; максимумы и минимумы кратных интегралов. Часто требуется найти систему n функций $y_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y_2(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\ldots$, $y_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ от m независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, реализующую максимум или минимум кратного интеграла

$$I = \int\int_V \ldots \int F\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m, \qquad (11.6\text{-}27)$$

где F — данная функция $n+m+mn$ переменных y_i, x_k и $y_{i,k} \equiv \partial y_i/\partial x_k$. При этом граница S области интегрирования V и граничные значения функций y_i могут быть как заданы, так и не заданы. Предполагается, что функции y_i выбираются среди множества всех функций, имеющих в V непрерывные вторые частные производные (см. также п. 11.5-2).

Если подынтегральная функция F является достаточно гладкой, то *каждая система функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, реализующая максимум или минимум*

интеграла (18), *должна удовлетворять системе уравнений с частными производными*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{i,k}}\right)-\frac{\partial F}{\partial y_i}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{11.6-28}$$

и надлежащим граничным условиям. Для решения вариационных задач с уравнениями связи применим метод множителей Лагранжа, описанный в пп. 11.6-2 и 11.6-3.

Если граничные значения одной или нескольких неизвестных функций y_i не заданы, то следует с помощью условия $\delta I=0$ получить *естественные граничные условия*, аналогичные уравнениям (13). Пусть, например, в случае двух независимых переменных x_1, x_2 граница S есть регулярная замкнутая кривая, задаваемая уравнениями $x_1=x_1(s)$, $x_2=x_2(s)$, где s — длина дуги. Тогда естественные граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial y_{i,1}}\frac{dx_1}{ds}-\frac{\partial F}{\partial y_{i,2}}\frac{dx_2}{ds}=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{11.6-29}$$

Пример. Малые смещения струны длины L могут быть описаны функцией $y(x,\ t)$ координаты x, измеряемой вдоль струны, и времени t. Кинетическая и потенциальная энергия всей струны соответственно равны

$$T=\frac{m}{2}\int_0^L y_t'^2\,dx, \qquad U=\frac{Q}{2}\int_0^L y_x'^2\,dx,$$

где m — масса единицы длины, а Q — натяжение струны. Чтобы интеграл

$$\int_{t_0}^{t_F}(T-U)\,dt=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_F}\int_0^L\left(my_t'^2-Qy_x'^2\right)dx\,dt$$

имел минимум (принцип Гамильтона), должно выполняться соотношение

$$y''_{tt}=\frac{Q}{m}\,y''_{xx},$$

являющееся уравнением колебаний струны.

***11.6-10. Достаточные условия для максимума и минимума в простейшей задаче.** Пусть функция

$$y=y(x) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\equiv p\right) \tag{11.6-30}$$

является экстремалью интеграла

$$I=\int_{x_0}^{x_F}F(x,\ y,\ y')\,dx \tag{11.6-31}$$

при заданных x_0, x_F и $y(x_0)=y_0$, $y(x_F)=y_F$.

Дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}z'\right)+\left(\frac{d}{dx}F_{yy'}-F_{yy}\right)z=0, \tag{11.6-32}$$

где вместо y и y' подставлены их выражения из (30), называется **уравнением Якоби.**

Если существует решение уравнения Якоби, равное нулю при $x=x_0$ и не обращающееся в нуль при $x_0<x\leqslant x_F$, то говорят, что *экстремаль* (30) *удовлетворяет* **условию Якоби.**

Геометрически это означает, что существует однопараметрическое семейство экстремалей, включающее данную экстремаль, выходящих из точки

(x_0, y_0) и не пересекающихся при $x_0 < x \leqslant x_F$, — **поле экстремалей** с центром в точке (x_0, y_0).

Если для экстремали (30) *условие Якоби выполняется и функция*

$$E(x, y, y', p) \equiv F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p) F_{y'}(x, y, p) \qquad (11.6\text{-}33)$$

(*функция Вейерштрасса*)

неположительна во всех точках (x, y), *близких к точкам экстремали* $y = y(x)$, *и при значениях* y', *близких к* $p = dy/dx$ *на той же экстремали, то эта экстремаль реализует слабый максимум интеграла* (31). Это, в частности, выполняется, если вдоль выбранной экстремали

$$F_{y'y'} < 0 \text{ (усиленное условие Лежандра)}. \qquad (11.6\text{-}34)$$

Если экстремаль удовлетворяет условию Якоби и функция E неположительна при всех (x, y), *близких к точкам экстремали, и при всех* y', *то эта экстремаль реализует сильный максимум.*

Достаточное условие минимума получается при выполнении неравенства $E \geqslant 0$ (соответственно $F_{y'y'} > 0$).

Достаточные условия экстремума в многомерном случае приведены в [11.12], [11.13].*

11.7. РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПРЯМЫМИ МЕТОДАМИ

11.7-1. Прямые методы. В каждом из так называемых *прямых методов* нахождения максимума или минимума данного определенного интеграла

$$I = \int_{x_0}^{x_F} F[y(x), y'(x), x]\, dx \qquad (11.7\text{-}1)$$

искомую функцию $y(x)$ пытаются приблизить последовательностью функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., выбираемых так, чтобы все они удовлетворяли граничным условиям, наложенным на $y(x)$. Каждая функция $u_r(x)$ должна быть дифференцируемой функцией от x и r параметров $\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \ldots, \alpha_{rr}$. Последние определяются так, чтобы они давали максимум или минимум *функции*

$$I_r(\alpha_{r_1}, \alpha_{r_2}, \ldots, \alpha_{rr}) \equiv \int_{x_0}^{x_F} F[u_r(x), u_r'(x), x]\, dx, \qquad (11.7\text{-}2)$$

т. е. удовлетворяли уравнениям

$$\frac{\partial I_r}{\partial \alpha_{ri}} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r;\ r = 1, 2, \ldots) \qquad (11.7\text{-}3)$$

(см. п. 11.3-3, а).

Для каждой функции $y(x)$, *полученной таким путем в качестве предела последовательности приближающих функций* $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., *требуется еще доказать, что она действительно реализует максимум или минимум определенного интеграла* (1).

Аналогичными методами можно решать вариационные задачи и в случае нескольких неизвестных функций (п. 11.6-1, b) и/или нескольких независимых переменных (п. 11.6-9). Если заданы уравнения связи (пп. 11.6-2 и 11.6-3), то им подчиняют каждую приближающуюся функцию; максимумы и минимумы приближающих интегралов можно тогда находить с помощью метода множителей Лагранжа из п. 11.3-4 (см. пример).

Прямые методы могут давать числовые приближения и/или точные решения. Так как при условиях, перечисленных в п. 11.5-2, решения вариацион-

ных задач должны удовлетворять дифференциальным уравнениям, выражающим условие $\delta I = 0$, *то каждый прямой метод решения вариационной задачи является также приближенным методом решения дифференциальных уравнений.*

Пример. Решить изопериметрическую задачу, рассмотренную в качестве примера в п. 11.6-3, приближая $x(t)$ и $y(t)$ соответственно последовательностями

$$u_r(t) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{r} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

$$v_r(t) \equiv \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{r} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

так что

$$I_r = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(u_r \frac{dv_r}{dt} - v_r \frac{du_r}{dt}\right) dt = \pi \sum_{k=1}^{r} k (a_k\beta_k - b_k\alpha_k) \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Чтобы найти максимум интеграла I_r при дополнительном условии

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{du_r}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_r}{dt}\right)^2\right] dt = \pi \sum_{k=1}^{r} k^2 \left(a_k^2 + b_k^2 + \alpha_k^2 + \beta_k^2\right) = R^2,$$

применим метод множителей Лагранжа из п. 11.3-4 и найдем

$$\left.\begin{aligned} \beta_k + 2\lambda_r k a_k &= 0, & a_k + 2\lambda_r k\beta_k &= 0, \\ -\alpha_k + 2\lambda_r k b_k &= 0, & -b_k + 2\lambda_r k\alpha_k &= 0, \end{aligned}\right\} (k = 1, 2, \ldots, r)$$

при $r = 1, 2, \ldots$ Начиная с $k = 1$, получим $\lambda_r = 1/2$, $\beta_1 = -a_1$ $\alpha_1 = b_1$; при $k > 1$ $a_k = b_k = \alpha_k = \beta_k = 0$. В этом примере прямой метод дает точное решение

$$x = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t, \qquad y = \frac{\alpha_0}{2} - b_1 \cos t + a_1 \sin t,$$

где $a_1^2 + b_1^2 = R^2$.

11.7-2. Метод Релея—Ритца. В этом методе искомое решение $y(x)$ пытаются разложить в ряд по полной системе функций $\Psi_i(x)$ (п. 15.2-4) так, чтобы приближающие функции

$$u_r(x) \equiv \sum_{j=0}^{r} \alpha_{rj} \Psi_j(x)$$

удовлетворяли заданным граничным условиям. Как правило, функции $\Psi_j(x)$ ортогональны, и таким образом, параметры $\alpha_{rj} = \alpha_j$ не зависят от r (п. 15.2-4), в точности так же, как в примере п. 11.7-1.

Метод Релея — Ритца оказывается полезным для численных решений некоторых задач о собственных значениях в теории колебаний и квантовой механике (см. также п 15.4-7).

11.7-3. Приближение $y(x)$ полигональными функциями. Решение $y(x)$ можно приблизить полигональными функциями $u_r(x)$, каждая из которых определяется, например, r своими значениями $\alpha_{r1} = u_r(x_0 + \Delta x)$, $\alpha_{r2} = u_r(x_0 + 2\Delta x)$, ..., $\alpha_{rr} = u_r(x_0 + r\Delta x) = u_r(x_F - \Delta x)$. В этом случае условия (3) дают дифференциальное уравнение (п. 20.4-3), приближающее уравнение Эйлера (11.6-2) данной вариационной задачи.

11.8. ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ И ПРИНЦИП МАКСИМУМА

11.8-1. Постановка задачи.

(а) Уравнения состояния, управления и критерий. В *задачах управления* состояние динамической (механической, электрической, химической и т. д.) системы характеризуется n **переменными состояния (фазовыми переменными)** $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, удовлетворяющими n

дифференциальным уравнениям первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad (\textit{уравнение состояния}). \qquad (11.8\text{-}1)$$

Типичные переменные состояния — обобщенные координаты и скорости в механике, электрические токи и напряжения, концентрации в химии (п. 11.8-3); независимая переменная t обычно является временем.

Задача состоит в определении r **управляющих переменных (управления)** $u_k=u_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots, r)$ *как функций от* t *в интервале* $t_0 \leqslant t \leqslant t_F$, *минимизирующих заданный* **критерий-функционал** (*критерий качества*)

$$x_0(t_F)=\int_{t_0}^{t_F} f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r)\,dt \qquad (11.8\text{-}2)$$

(например, цену, среднеквадратическую ошибку, время достижения цели и т. д.) *и удовлетворяющих неравенствам*

$$Q_j(u_1, u_2, \ldots, u_r) \leqslant 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, N), \qquad (11.8\text{-}3)$$

определяющим замкнутую **область допустимых управлений** U.

Возможные ограничения фазовых координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будут рассмотрены в пп. 11.8-1, d и 11.8-5.

Оптимальное управление $u_k(t)$ определяет оптимальную траекторию $x_i=x_i(t)$ в n-мерном фазовом пространстве. Решение такой задачи управления требует задания подходящих граничных условий для определения начальных и конечных значений $x_i(t_0)$, $x_i(t_F)$; начальное и конечное время t_0, t_F могут быть неизвестными (п. 11.8-1, с).

(b) Задача оптимального управления и вариационное исчисление. Методы пп. 11.8-2 — 11.8-5 могут рассматриваться как обобщенное вариационное исчисление, применяемое для решения важного класса задач, поставленных в п. 11.8-1. На языке предыдущих пунктов $x_i(t)$ и $u_k(t)$ являются неизвестными переменными.

Например, все задачи пп. 11.6-1 — 11.6-7, связанные с максимизацией или минимизацией интегралов

$$I=\int_{x_0}^{x_F} F\left[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x); y_1'(x), \ldots, y_n'(x); x\right]dx$$

при соответствующих ограничениях и/или граничных условиях, формулируются как задачи оптимального управления, если произвести замену

$$x \equiv t, \quad x_0 \equiv t_0, \quad x_F \equiv t_F,$$

$$I=x_0(t_F), \; y_i(x) \equiv x_i(t), \; \frac{dx_i}{dt} \equiv u_i(t) \equiv y_i'(x) \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

В этом частном случае теория п. 11.8-2 приводит к классическим каноническим уравнениям п. 11.6-8; этот подход иногда может упростить данную задачу.

Уравнения состояния (1) являются дифференциальными связями, переменные p_i, определяемые в п. 11.8-2, суть соответствующие множители Лагранжа.

Сопряженные уравнения и принцип максимума, введенный в п. 11.8-2, образуют необходимые (но не достаточные) условия для оптимальных u_k, x_i и в существенном эквивалентны уравнению Эйлера (11.6-4) вместе с условием $E \geqslant 0$ (п. 11.6-10), когда последние применимы.

Принцип максимума устанавливает условия оптимизации в элегантной, удобной и наиболее общей форме, позволяющей непосредственное исследование систем с разрывными управлениями (п. 11.8-3).

(c) Многообразия начальных и конечных состояний. Во многих задачах управления вместо задания начального момента времени t_0 и начальных значений $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$, ..., $x_n(t_0)$ указывается, что **начальное состояние** $[x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0)]$ принадлежит $(n-n_0)$-мерному *многообразию начальных состояний* (гиперповерхность, линия или точка в пространстве состояний), задаваемому уравнениями

$$B_j[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]=0 \quad (j=1, 2, \ldots, n_0 \leqslant n). \tag{11.8-4a}$$

Конечное состояние $[x_1(t_F), x_2(t_F), \ldots, x_n(t_F)]$ аналогичным образом) принадлежит $(n-n_F)$-мерному *многообразию конечных состояний*

$$G_j[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]=0 \quad (j=1, 2, \ldots, n_F \leqslant n) \tag{11.8-4b}$$

В дополнение могут быть даны ограничения-неравенства, определяющие соответствующие области в каждом многообразии (4).

Заметим, что каждое неравенство

$$G[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] \leqslant 0, \tag{11.8-5}$$

содержащее, например, конечные состояния внутри данной n-мерной области пространства состояний, в существенном эквивалентно соответствующему ограничению-равенству, так как каждая траектория, входящая в область конечных состояний, должна пересечь ее границу.

(d) Непрерывность, дифференцируемость и условия независимости (см. также п. 11.5-2). Если не оговорено противное, то относительно x_i, u_k и t предполагается:

1. Данные функции f_0, f_1, ..., f_n непрерывно дифференцируемы по переменным состояния x_i и непрерывны относительно переменных управления u_k.
2. Функции Q_j непрерывно дифференцируемы и имеют ненулевые градиенты.
3. n_0 функций B_i и n_F функций G_j, определяющие многообразия начальных и конечных состояний, непрерывно дифференцируемы; их функциональная независимость выражается в том, что ранги (п. 13.2-7) матриц $[\partial B_j/\partial x_i(t_0)]$ и $[\partial G_j/\partial x_i(t_F)]$ соответственно равны n_0 и n_F.

Все допустимые управления $u_k(t)$ *принадлежат классу функций с ограниченной вариацией на интервале* (t_0, t_F) *(односторонние пределы существуют почти всюду*; п. 4.4-8) *и кусочно-непрерывно дифференцируемы там, где они непрерывны.*

Соответствующие $x_i(t)$ кусочно-непрерывно дифференцируемы. Возможны менее ограничительные предположения, однако результирующие теоремы становятся более громоздкими.

(e) Обобщения (см.также пп. 11.8-4 и 11.8-5). *Оптимизационные методы, введенные в* пп. 11.8-1 — 11.8-5, *могут быть применены к более общим задачам.*

В частности,

1. Если одна или несколько данных функций f_i, Q_j, φ_j, Ψ_j явно зависят от независимой переменной t («неавтономные» системы), то можно свести задачу к более простой посредством введения новой переменной состояния $t=x_{n+1}$, для которой

$$\frac{dx_{n+1}}{dt}=1\equiv f_{n+1}, \quad x_{n+1}(t_0)=t_0, \quad x_{n+1}(t_F)=t_F. \tag{11.8-6}$$

Этот же способ применим и в случаях, когда некоторые B_j или G_j зависят явно соответственно от t_0 и t_F.

2. Если заданы непрерывно дифференцируемые ограничения-равенства, содержащие переменные состояния

$$\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0 \quad (j=1, 2, \ldots, m) \tag{11.8-7}$$

и изопериметрические условия

$$\int_{t_0}^{t_F} \Psi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dt = c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m') \tag{11.8-8}$$

с кусочно-непрерывно дифференцируемыми Ψ_j, то задача может изучаться с помощью метода множителей Лагранжа (пп. 11.6-2, 11.6-3). При этом функция f_0 в критерии-функционале (2) заменяется на

$$F_0 \equiv f_0 + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\, \varphi_j + \sum_{k=1}^{m'} \mu_k \Psi_k, \tag{11.8-9}$$

где $\lambda_j(t)$ и μ_k суть соответственно переменные и постоянные множители Лагранжа.

Ограничения на переменные-состояния, включающие также и управление, рассматриваются в п. 11.8-5.

3. Критерий-функционал

$$x_0(t_F) = \int_{t_0}^{t_F} F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ u_1, u_2, \ldots, u_r)\, dt + h[x_1(t_F), \ldots, x_n(t_F)] \tag{11.8-10}$$

приводится к простейшей форме (2), если ввести

$$f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ u_1, u_2, \ldots, u_r) = F + \dot{h}(t) - \dot{h}(t_0),$$

где

$$\dot{h}(t) \equiv \frac{d}{dt} h[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i \tag{11.8-11}$$

(см. также п. 11.6-6).

4. Если ограничения (4) на управляющие переменные u_k явно зависят от переменных состояния x_i (включая, возможно, $t = x_{n+1}$), то эту зависимость обычно можно исключить путем введения новых управляющих переменных.

Пример. Ограничение (4) вида

$$|u_k| \leqslant q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

приводится к форме

$$|v| \leqslant 1,$$

если ввести новую переменную управления v, полагая $u_k = v\, q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

11.8-2. Принцип максимума Понтрягина.

(a) Сопряженные переменные и оптимальный гамильтониан. Удобно трактовать критерий-функционал (2) как конечное значение $x_0(t_F)$ дополнительной переменной состояния $x_0(t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ u_1, u_2, \ldots, u_r) \tag{11.8-12}$$

и начальному условию

$$x_0(t_0) = 0. \tag{11.8-13}$$

Необходимое условие оптимального управления выражается *принципом максимума Понтрягина*. Определим $n+1$ **сопряженных переменных** $p_0(t)$, $p_1(t), \ldots, p_n(t)$ *как решения* $(n+1)$ *дифференциальных уравнений первого порядка*

$$\frac{dp_i}{dt} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} p_k \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n;\ t_0 < t < t_F), \text{ (сопряженные уравнения)}, \tag{11.8-14}$$

причем

$$p_0(t) = \text{const} \leqslant 0. \tag{11.8-15}$$

Тогда оптимальное управление, минимизирующее функционал (2), *реализуется допустимыми управляющими переменными* $u_k = u_k(t)$, *которые максимизируют* **гамильтонову функцию**

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ p_0, p_1, \ldots, p_n;\ u_1, u_2, \ldots, u_r) = \sum_{i=0}^{n} p_i f_i, \qquad (11.8\text{-}16)$$

для каждого t *между* t_0 *и* t_F; *более того,*

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ p_0, p_1, \ldots, p_n) \equiv$$
$$\equiv \max_{(u_1, u_2, \ldots, u_r) \subset U} H(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n;\ u_1, u_2, \ldots, u_r) = 0$$
$$(t_0 \leqslant t \leqslant t_F). \qquad (11.8\text{-}17)$$

Кроме того, оптимальные $x_i(t)$ *и* $u_k(t)$ *должны удовлетворять данным условиям* (1) *и* (4) *и условиям трансверсальности*

$$p_i + \sum_{j=1}^{n_0} \Lambda'_j \frac{\partial B_j}{\partial x_i} = 0 \qquad (t = t_0;\ i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (11.8\text{-}18a)$$

$$p_i + \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial x_i} = 0 \qquad (t = t_F;\ i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (11.8\text{-}18b)$$

соответствующим условиям (4); Λ'_j, Λ_j — неизвестные константы (см. также пп. 11.6-5, 11.6-8, 11.8-2, b).

В предположениях, указанных в п. 11.8-1, c, сопряженные переменные $p_i(t)$ должны быть кусочно-непрерывно дифференцируемыми функциями. Они остаются непрерывными и тогда, когда f_0 и/или $f_1, f_2, \ldots, f_n$ претерпевают разрывы на гиперповерхности S, определенной уравнением

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

где g — непрерывно дифференцируемая функция и f_i имеют односторонние производные по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с каждой стороны S («отражение» оптимальных траекторий, см. также п. 11.6-7).

При этих условиях оптимальный гамильтониан остается непрерывным на S.

(b) Краевая задача. Условия принципа максимума имеют своим следствием соотношения, выражающие каждую управляющую переменную через x_i и p_i:

$$u_k = \hat{u}_k(x_0, x_1, \ldots, x_n;\ p_0, p_1, \ldots, p_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \qquad (11.8\text{-}19)$$

Эти соотношения могут быть получены посредством *решения задачи на максимум* [возможно, с ограничениями-неравенствами (3)] для каждого t.

Задача оптимального управления сводится к решению $2n+2$ дифференциальных уравнений (1), (12) и (14) или

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n), \qquad (11.8\text{-}20)$$

следующих из уравнения (17), при указанных выше краевых условиях. Так как сопряженные уравнения (14) однородны относительно p_i, можно произвольным образом выбрать константу в уравнении (15) так, что

$$p_0(t) = -1 \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_F). \qquad (11.8\text{-}21)$$

Таким образом, имеется точно $2n+n_0+n_F+2$ краевых условий (4), (13), (18) и (21) для определения $2n+2$ неизвестных постоянных интегрирования, n_0+n_F неизвестных множителей Λ'_j, Λ_j и неизвестного интервала t_F-t_0.

Недостающие краевые условия получаются подстановкой $t=t_F$ в уравнение (17). Если t_0 или t_F не даны явно, то вводится дополнительная переменная состояния x_{n+1}:

$$\frac{dx_{n+1}}{dt}=1, \qquad x_{n+1}(t_0)=t_0$$

(см. также п. 11.8-1, е).

Замечание. Если некоторое краевое условие (4), например $G_J=0$, позволяет явно выразить или исключить какое-либо краевое значение, например, $x_I(t_F)$, то $p_I(t_F)$ не определяется из (4) и (18). В этом случае J-е уравнение (4*b*) (и, следовательно, Λ_J) и I-е уравнение (18*b*) просто пропускаются. Если, с другой стороны, краевое условие переменной состояния, например, $x_I(t_F)$, остается «свободным» или неопределенным посредством соотношений (4*b*), то I-е уравнение (18*b*) влечет соответствующее «естественное условие» — $p_I(t_F)=0$ (см. также п. 11.6-5).

Аналогичные частные случаи связаны с уравнениями (4*a*) и (18*a*).

(с) Так как принцип максимума выражает лишь необходимые (но не достаточные) условия оптимальности управления (по этому вопросу см. [11.17]), то метод Понтрягина может давать несколько кандидатур оптимального решения, либо же решения не существует.

Решение двухточечной краевой задачи обычно достигается численными итерационными методами (см. также п. 20.9-2 и 20.9-3). Помимо этого получение максимизирующих функций (19) может быть достигнуто последовательными приближениями.

11.8-3. Примеры.

(а) Навигационная задача Цермело. В стационарном поле скоростей $\mathbf{v}\,\{v_1(x_1, x_2),\ v_2(x_1, x_2)\}$, где x_1 и x_2 — прямоугольные декартовы координаты, движется точка с постоянной по величине скоростью V $(v_1^2+v_2^2=V^2)$. Дано: $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0$; требуется минимизировать время

$$x_0(t_F)=t_F=\int_0^{t_F} dt \qquad (f_0\equiv 1),$$

необходимое для достижения заданной конечной точки $(x_{1F},\ x_{2F})$ посредством выбора $u(t)$ угла между направлением скорости V точки и осью x_1.

Уравнения состояния ($|\mathbf{v}|=V$):

$$\frac{dx_1}{dt}=v_1(x_1, x_2)+V\cos u, \qquad \frac{dx_2}{dt}=v_2(x_1, x_2)+V\sin u, \qquad \frac{dx_0}{dt}=1 \qquad (x_0=t).$$

Отсюда

$$H\equiv p_1(v_1+V\cos u)+p_2(v_2+V\sin u)-1,$$

где принято $p_0=-1$.

Для максимума H необходимо выполнения равенств

$$\cos u=-\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}, \qquad \sin u=-\frac{p_2}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}};$$

p_1 и p_2 должны удовлетворять сопряженным уравнениям

$$\frac{dp_1}{dt}=-\left(p_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+p_2\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right), \qquad \frac{dp_2}{dt}=-\left(p_1\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)$$

и

$$M=\max_u H=p_1v_1+p_2v_2-V\sqrt{p_1^2+p_2^2}-1=0.$$

Если, в частности, v_1 и v_2 постоянны, то таковы же p_1, p_2, u; их значения, вместе с t_F, удовлетворяют условиям

$$x_1(0)=0, \qquad x_2(0)=0, \qquad x_1(t_F)=x_{1F}, \qquad x_2(t_F)=x_{2F}.$$

(b) П р о с т е й ш а я з а д а ч а р е г у л и р о в а н и я п о б ы с т р о д е й с т в и ю. Даны $x_1(0)$, $x_2(0) = \dot{x}_1(0)$ и уравнения состояния

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = u(t) \qquad \left(\text{т. е. } \frac{d^2x_1}{dt^2} = u(t)\right).$$

Требуется минимизировать время

$$x_0(t_F) = t_F = \int_0^{t_F} dt \qquad (f_0 \equiv 1),$$

необходимое для достижения заданного конечного состояния $x_1(t_F) = x_2(t_F) = \dot{x}_1(t_F) = 0$. посредством оптимального управления такого, что

$$|u(t)| \leqslant 1.$$

Максимизация гамильтониана

$$H \equiv p_1 x_2 + p_2 u - 1$$

при условии $|u| \leqslant 1$ приводит к управлению

$$u = \operatorname{sign} p_2 = \begin{cases} 1 & (p_2 > 0), \\ -1 & (p_2 < 0) \end{cases}$$

и

$$\frac{dp_1}{dt} = 0, \qquad \frac{dp_2}{dt} = -p_1 = \text{const},$$

так что

$$p_1 = p_1(0), \qquad p_2 = p_2(0) - t\,p_1(0).$$

Оптимальные траектории в плоскости x_1, x_2 суть дуги парабол, соответствующих $u = 1$ и $u = -1$. Эти дуги пересекают «кривую переключений», соответствующую $p_2 = 0$, и каждая траектория продолжается к началу координат вдоль этой кривой (рис. 11.8-1).

Каждая траектория зависит от параметров $p_1(0)$, $p_2(0)$, которые должны выбираться так, чтобы удовлетворялись заданные граничные условия $x_1(t_F) = x_2(t_F) = 0$.

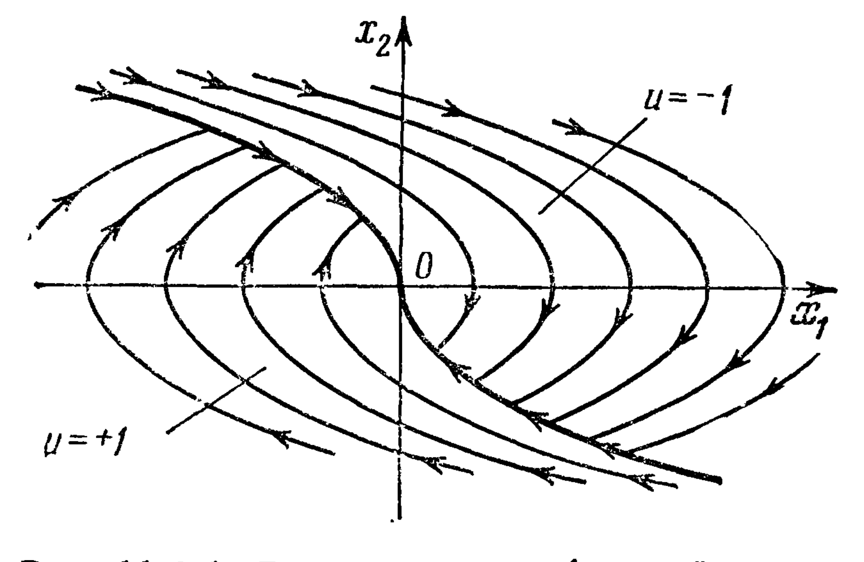


Рис. 11.8-1. Траектории на фазовой плоскости для простейшей задачи регулирования.

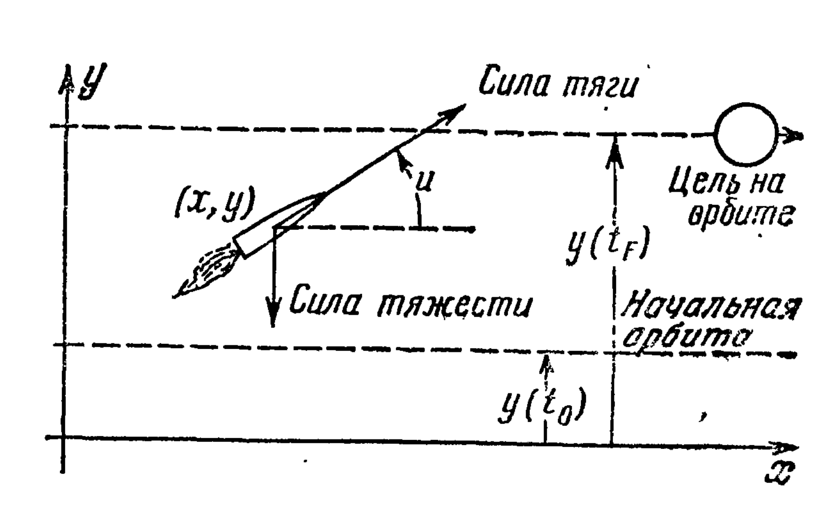


Рис. 11.8-2. Геометрия задачи перевода ракеты с одной орбиты на другую.

(c) П р о с т е й ш и е з а д а ч и о п е р е х о д е с о д н о й о р б и т ы н а д р у г у ю и о в с т р е ч е з а м и н и м а л ь н о е в р е м я. Соответственно рис. 11.8-2 движение ракеты в вертикальной плоскости в предположении постоянства ускорения силы тяжести ($-g$) и отсутствия сопротивления воздуха задается четырьмя уравнениями состояния

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \qquad \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{T\cos u}{m_0 + \dot{m}(t - t_0)},$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}, \qquad \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{T\sin u}{m_0 + \dot{m}(t - t_0)} - g.$$

$x \equiv x_1$, $\dot{x} = x_2$, $y \equiv x_3$, $\dot{y} = x_4$ — переменные состояния; g, T (тяга), m_0 (масса ракеты на старте), $\dot{m} < 0$ (постоянная скорость расхода горючего) — данные постоянные.

Требуется перевести ракету с данной горизонтальной *стартовой орбиты*

$$x(t_0) = v_0 t_0, \qquad \dot{x}(t_0) = v_0,$$
$$y(t_0) = y_0, \qquad \dot{y}(t_0) = 0$$

на заданную горизонтальную орбиту некоторой цели так, чтобы

$$x(t_F) = v_F t_F + a, \qquad \dot{x}(t_F) = v_F;$$
$$y(t_F) = y_F, \qquad \dot{y}(t_F) = 0.$$

Таким образом, решение задачи завершается программированием управляющей переменной — угла $u = u(t)$ так, чтобы минимизировать общий расход горючего $\dot{m}(t_F - t_0)$ или просто $\int_{t_0}^{t_F} dt$.

Так как *многообразия начальных и конечных состояний зависят явно от* t_0 *и* t_F, *то полагаем* $x_5 = t$, $dx_5/dt = 1$, $x_5(t_0) = t_0$, $x_5(t_F) = t_F$.

Максимизация гамильтониана

$$H = p_1 \dot{x} + p_2 \frac{T \cos u}{m_0 + \dot{m}(t - t_0)} + p_3 \dot{y} + p_4 \left[\frac{T \sin u}{m_0 + \dot{m}(t - t_0)} - g\right] + p_5 - 1$$

дает $\partial H/\partial u = 0$ или

$$-p_2 \sin u + p_4 \cos u = 0$$

и

$$\cos u = -\frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + p_4^2}}, \qquad \sin u = -\frac{p_4}{\sqrt{p_2^2 + p_4^2}}.$$

Сопряженные уравнения

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{dp_3}{dt} = \frac{dp_5}{dt} = 0, \qquad \frac{dp_2}{dt} = -p_1, \qquad \frac{dp_4}{dt} = -p_3$$

дают

$$p_1(t) = p_1(t_0), \qquad p_2(t) = -p_1(t_0)(t - t_0) + p_2(t_0),$$
$$p_3(t) = p_3(t_0), \qquad p_4(t) = -p_3(t_0)(t - t_0) + p_4(t_0), \qquad p_5(t) = p_5(t_0).$$

Так как начальные и конечные значения $\dot{x}$, y, $\dot{y}$ фиксированы, то представляют интерес лишь *условия трансверсальности* (18). Имеем

$$x(t_0) - v_0 t_0 = 0, \qquad x(t_F) - v_F t_F - a = 0,$$
$$p_1(t_0) + \Lambda_1' = 0, \qquad p_1(t_F) + \Lambda_1 = 0,$$

или

$$p_5(t_0) - \Lambda_1' v_0 = 0, \qquad p_5(t_F) - \Lambda_1 v_F = 0.$$

Учитывая, что p_1 и p_5 постоянны, получаем $p_1 = p_5 = 0$. Кроме того, максимальное значение гамильтониана равно нулю при $t = t_F$:

$$-\frac{T}{m_0 - \dot{m}(t - t_0)} \left[p_2^2(t_0) + p_4^2(t_0) + p_3^2(t_0)(t_F - t_0)^2 - 2p_3(t_0)\, p_4(t_0)(t_F - t_0)\right]^{1/2} +$$
$$+ g p_3(t_0)(t_F - t_0) - g p_4(t_0) - 1 = 0.$$

Последнее, вместе с восемью данными начальными и конечными условиями, определяют девять величин t_0, t_F, $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$, $y(t_0)$, $\dot{y}(t_0)$, $p_2(t_0)$, $p_3(t_0)$, $p_4(t_0)$ и тем самым все решение.

11.8-4. Матричные обозначения в задачах управления. Для задач управления удобно использовать матричные обозначения п. 13.6-1 (а также соответствующие тензорные обозначения, п. 14.7-7).

Введем:

$x = x(t) \equiv \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — *матрица-столбец* $(n+1)\times 1$, представляющая **вектор состояния**,

$u = u(t) \equiv \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ — *матрица-столбец* $r \times 1$, представляющая **вектор управления**,

$p = p(t) \equiv (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ — *матрица-строка* $1 \times (n+1)$, представляющая **сопряженный вектор**

(см. также п. 14.5-2). Соотношения п. 11.8-1 и 11.8-2 можно записать теперь в более компактной форме; заметим, что $\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right]$ есть матрица размера $(n+1)\times(n+1)$.

В частности, имеем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(x,u) \equiv \frac{\partial H}{\partial p} && (\textit{уравнения состояния}),\\ &\frac{dp}{dt} = -p\frac{\partial f}{\partial x} \equiv -\frac{\partial H}{\partial x} && (\textit{сопряженные уравнения}),\\ &H(p, x, u) \equiv pf && (\textit{гамильтониан}). \end{aligned}\right\} \qquad (11.8\text{-}22)$$

Критерий-функционал (2) может рассматриваться как матричное произведение (внутреннее произведение п.14.7-1) $x_0 = cx$ матрицы-столбца x и матрицы-строки $c=(1, 0, 0, \ldots, 0)$ размера $1 \times (n+1)$.

В [11.14] рассмотрен случай, когда критерий-функционал определен как cx с более общей матрицей-строкой c.

11.8-5. Ограничения-неравенства для переменных состояния. Угловые условия (см. также п. 11.6-6).

(a) Если область X допустимых систем состояний $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ ограничена неравенствами

$$S_j(x_0, x_1, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r) \leqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad (11.8\text{-}23)$$

S_j — непрерывно дифференцируемые функции, *зависящие от управления* в процессе образования оптимальной траектории (см. также п. 11.8-1, е), то теория п. 11.8-2 остается без изменения для траекторий или их частей, находящихся *внутри замкнутой области X, определенной уравнениями* (23).

Для траекторий и частей траекторий, находящихся *на границе* X, по меньшей мере одно из ограничений (23) превращается в равенство. Для простоты рассмотрим граничную область D_S, определенную единственным уравнением

$$S(x_0, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r) = 0. \qquad (11.8\text{-}24)$$

В этой области применим метод множителей Лагранжа пп. 11.6-2 и 11.8-1,е; таким образом, каждая оптимальная траектория удовлетворяет уравнению (24) и соотношениям п. 11.8-2,а с заменой f_0 на

$$F_0 \equiv f_0 + \lambda(t)\, S, \qquad [(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in D_S], \qquad (11.8\text{-}25)$$

где λ — множитель Лагранжа.

Аналогично f_0 может быть заменена в D_S одним из следующих выражений:

$$F_0 \equiv f_0 + \mu(t)\, S^{(k)} \equiv f_0 + \mu(t) \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial S^{(k-1)}}{\partial x_i} f_i$$

$$[(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in D_S,\ k = 1, 2, \ldots, n], \qquad (11.8\text{-}26)$$

где

$$S^{(0)} = S = 0, \qquad S^{(1)} \equiv \frac{dS}{dt} \equiv \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i = 0, \ \ldots \qquad (11.8\text{-}27)$$

$\mu(t)$ — множитель Лагранжа.

(b) Если $S^{(K)}$ есть первая из функций (27), содержащая управляющую переменную u явно, то неравенство $S \leqslant 0$ называют **ограничением-неравенством K-го порядка.**

В этом случае оптимальная траектория, *входящая* в граничную область D_S, определенную уравнением (24), изнутри X в момент $t = t_1$ должна удовлетворять *угловым условиям* (*условиям скачка*)

$$\left.\begin{aligned} &p_i(t_1 - 0) = p_i(t_1 + 0) + \sum_{k=0}^{K-2} \nu_k \left.\frac{\partial S^{(k)}}{\partial x_i}\right|_{t=t_1} + (\nu_{K-1} + b) \left.\frac{\partial S^{(K-1)}}{\partial x_i}\right|_{t=t_1}\\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, n),\\ &H|_{t_1 - 0} = H|_{t_1 + 0}, \end{aligned}\right\} \qquad (11.8\text{-}28)$$

где постоянные ν_k — множители Лагранжа, b — произвольная постоянная.

Оптимальная траектория, *покидающая* граничную область состояний в момент $t = t_2$ в первый раз после вхождения в нее при $t = t_1$, должна удовлетворять угловым условиям

$$\left.\begin{aligned} &p_i(t_2 - 0) = p_i(t_2 + 0) - b \left.\frac{\partial S^{(K-1)}}{\partial x_i}\right|_{t=t_2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),\\ &H|_{t=t_2 - 0} = H|_{t=t_2 + 0}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.8\text{-}29)$$

Произвольную постоянную b, встречающуюся в обоих уравнениях (28) и (29), обычно полагают равной нулю, так что $p_i(t)$ непрерывны в точке выхода. Если оптимальная траектория *преломляется* в граничной области D_S, соответствующей единственному ограничению (24), то $t_1 = t_2$ и угловое условие (28) выполняется с $b = 0$.

Если единственное ограничение (24) заменяется двумя или более такими ограничениями, члены, соответствующие новым ограничениям (с дополнительными множителями), прибавляются к каждой сумме в уравнениях (25), (26), (28) и (29). Случаи явной зависимости от времени изучаются способом п. 11.8-1,е.

Замечание. Относительно угловых условий (28), (29) в специальных случаях см. [11.14].

11.8-6. Метод динамического программирования (см. также п. 11.9-2). Если задача оптимального управления, поставленная в п. 11.8-1, определяет единственную оптимальную экстремаль для фиксированных $x_i(t_F)$ и переменных

$$x_i(t_0) = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то минимум критерия-функционала

$$\min_{u_1(t),\, u_2(t),\, \ldots,\, u_r(t)} \int_{t_0}^{t_F} f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r)\, dt \equiv$$
$$\equiv S\left[x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0); x_1(t_F), x_2(t_F), \ldots, x_n(t_F)\right] \equiv$$
$$\equiv S(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad (11.8\text{-}30)$$

удовлетворяет уравнению с частными производными первого порядка

$$M\left(X_1, X_2, \ldots, X_n; \frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (\textit{уравнение Гамильтона—Якоби}), \qquad (11.8\text{-}31)$$

где M — оптимальная (максимизированная) функция Гамильтона из уравнения (17) (см. также п. 11.6-8).

Обыкновенные дифференциальные уравнения (20) суть соответствующие уравнения характеристик, и способ получения их решений из полного интеграла уравнения (31) известен (п. 10.2-4).

Динамическое программирование «погружает» данную задачу оптимального управления в класс аналогичных задач с различными начальными координатами.

Уравнение с частными производными (31), которое дает решение для всего указанного множества задач, выражает тот факт, что *каждая часть оптимальной траектории оптимизирует критерий-функционал для соответствующих начальных и конечных точек* (*принцип оптимальности Беллмана*).

Из принципа оптимальности можно получить цельную теорию оптимального управления при весьма общих предположениях.

Вообще же численное решение уравнения (31) при $n > 2$ затруднительно (см. [11.16] [11.17], где динамическое программирование рассмотрено в более общем виде).

11.9. ШАГОВЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

11.9-1. Постановка задачи. Важный класс оптимизационных задач, включающих шаговое управление (что содержит управление непрерывными системами посредством вычислительных машин) или шаговую оптимизацию ресурсов, может быть сформулирован следующим образом:

Система описывается множеством переменных состояния $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, образующих последовательность ${}^0x, {}^1x, \ldots, {}^nx, \ldots$, так что каждое изме-

нение состояния дается *уравнениями состояния* (в этом случае конечно-разностными, см. также п. 20.4-3)

$$\left.\begin{aligned} &{}^{k+1}x_i = f_i\left({}^kx_1,\ {}^kx_2,\ \ldots,\ {}^kx_n;\ {}^{k+1}u_1,\ {}^{k+1}u_2,\ \ldots,{}^{k+1}u_r\right) \\ &\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \\ \text{или} \\ &{}^{k+1}x = f\left({}^kx,\ {}^{k+1}u\right), \end{aligned}\right\} \qquad (11.9\text{-}1)$$

где «управляющая переменная» ${}^{k+1}u \equiv \{{}^{k+1}u_1,\ {}^{k+1}u_2,\ \ldots,\ {}^{k+1}u_r\}$ определяет последовательность решений (**стратегий**), изменяющих k-ю систему состояний в $(k+1)$-ю.

Если задано начальное состояние ${}^0x$ (и, возможно, некоторое множество ограничений-равенств или неравенств для переменных состояния и управления), то задача заключается в нахождении **оптимальной стратегии** ${}^1u$, ${}^2u$, ..., ${}^Nu$, минимизирующей данный критерий

$$^Nx_0 = \sum_{k=0}^{N-1} f_0\left({}^kx,\ {}^{k+1}u\right) + h\left({}^Nx\right) = {}^Nx_0\left({}^0x\right), \qquad (11.9\text{-}2)$$

где $N = 1,\ 2,\ \ldots$ — количество рассматриваемых шагов (**динамическое программирование**). Как и в случае непрерывных задач оптимального управления, начальные и конечные состояния могут быть либо заданными, либо не заданными, возможно также обобщить постановку задачи способом, указанным в п. 11.8-1, е.

11.9-2. Принцип оптимальности Беллмана (см. также п. 11.8-6). *Если* ${}^1u$, ${}^2u$, ..., ${}^Nu$ — *некоторая оптимальная стратегия для последовательности состояний* ${}^0x$, ${}^1x$, ..., ${}^Nx$ *в некоторой задаче динамического программирования с начальным состоянием* ${}^0x$, *то* ${}^2u$, ${}^3u$, ..., ${}^Nu$ *есть оптимальная стратегия для тех же критерия-функции и конечного состояния* ${}^Nx$, *но с начальным состоянием* ${}^1x$. Если обозначить $\min\limits_u {}^Nx_0(X)$ через ${}^NS(X)$, то принцип оптимальности выражается рекуррентным соотношением (уравнением с частными конечными разностями, п. 20.4-3, b)

$$\left.\begin{aligned} &{}^NS(X) = \min_{{}^1u}\left\{f_0\left(X,{}^1u\right) + {}^{N-1}S\left[f\left(X,{}^1u\right)\right]\right\} \quad (N=2,\ 3,\ \ldots), \\ &{}^1S(X) = \min_{{}^1u} f_0\left(X,\ {}^1u\right), \end{aligned}\right\} \qquad (11.9\text{-}3)$$

где минимум определяется в соответствии с заданными ограничениями.

Численное решение этого функционального уравнения с неизвестными функциями ${}^NS(X)$ заключается в шаговой конструкции класса оптимальных стратегий для некоторого класса начальных состояний.

Ожидаемая оптимальная стратегия «погружена» в этом классе.

Решение обычно использует вычислительные устройства, но даже в этом случае решение задачи с более чем двумя или тремя переменными состояния x_i практически возможно лишь в частных случаях. Ряд примеров и приближенных методов содержится в [11.16], [11.17] в [11.20] рассмотрено шаговое управление, аналогичное принципу максимума.

ГЛАВА 12

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ: СОВРЕМЕННАЯ (АБСТРАКТНАЯ) АЛГЕБРА И АБСТРАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

12.1. ВВЕДЕНИЕ

12.1-1. Математические модели. Физические процессы, вообще говоря, описываются в терминах *операций* (наблюдений, экспериментов), связывающих физические *объекты.*

Сложность подлинных физических ситуаций требует упрощенных описаний с помощью словесных, символических и даже физических **моделей**, которые «абстрагируют» подходящим образом выбранные «существенные» свойства физических объектов и ситуаций.

Математика в самом общем смысле слова имеет дело с определением и использованием символических моделей. **Математическая модель** охватывает класс неопределяемых (абстрактных, символических) **математических объектов** таких, как числа или векторы, и отношения между этими объектами.

Математическое отношение — это гипотетическое правило, связывающее два или более символических объекта (см. также пп. 12.1-3 и 12.8-1). Многие отношения могут быть описаны при помощи **математических операций**, связывающих один или несколько объектов (**операнд, операнды**) с другим объектом или множеством объектов (**результатом операции**). Абстрактная модель с ее объектами произвольной природы, отношениями и операциями *определяется* непротиворечивым набором правил (**определяющих аксиом**), вводящих операции, которыми можно пользоваться, и устанавливающих общие отношения между их результатами (**аксиоматическое определение** математической модели с помощью ее свойств; примеры см. в пп. 12.2-1, 12.3-1, 12.4-1, 12.5-2, 12.6-1, 12.8-1 и 1.1-2). **Конструктивное определение** вводит новую математическую модель, пользуясь уже известными математическими понятиями (например, определение сложения и умножения матриц в терминах сложения и умножения чисел, п. 13.2-2).

Непротиворечивость аксиоматического определения должна быть доказана конструктивным построением примера, удовлетворяющего определяющим аксиомам (*доказательство существования*, см. также пп. 4.2-1 и 9.1-4). Кроме того, обычно проверяют взаимную независимость определяющих аксиом.

Математическая модель будет воспроизводить подходящим образом выбранные стороны физической ситуации, если можно установить **правила соответствия**, связывающие специфические физические объекты и отношения с определенными математическими объектами и отношениями. Поучительным и/или интересным может также быть и построение математических моделей, для которых в физическом мире аналогов не существует. Наиболее общеизвестными математическими моделями являются системы целых и действительных чисел (п. 1.1-2) и евклидова геометрия; определяющие свойства этих моделей представляют собой более или менее непосредственные абстракции физических процессов (счет, упорядочение, сравнение, измерение).

Объекты и операции более общих математических моделей часто ассоциируются с множествами действительных чисел, которые могут быть соотнесены с результатами физических измерений. Получающиеся таким образом представления математических моделей с помощью числовых операций специально рассматриваются в главах 14 и 16.

12.1-2. Обзор. Современная (абстрактная) **алгебра**[1]) имеет дело с математическими моделями, определяемыми в терминах бинарных операций («алгебраических» операций, обычно представляющих собой различные типы «сложения» и «умножения»), которые связывают *пары* математических объектов (операнды или оператор и операнд) с соответствующими результатами операций. В пп. 12.2-1 — 12.4-2 вводятся некоторые из наиболее общеупотребительных моделей такого рода, именно: *группы, кольца, поля, векторные пространства и линейные алгебры; булевы алгебры* отдельно рассматриваются в пп. 12.8-1 — 12.8-6.

Важный вопрос о *линейных преобразованиях* (*линейных операторах*) и их собственных векторах и собственных значениях излагается в гл. 14. Представление векторов и операторов *с помощью числовых компонент и матриц* подробно обсуждается в главах 14, 15 и 16.

Пункты 12.5-1 — 12.6-3 служат кратким введением к теории математических моделей, позволяющих определить *предельные процессы и порядок*, в частности, в пп. 12.5-2 — 12.5-4 рассматриваются метрические пространства. В пп. 12.7-1 — 12.7-5 указаны простые схемы комбинирования математических моделей (*прямые произведения и прямые суммы*).

12.1-3. «Равенство» и отношения эквивалентности.

(а) Предполагается, что аксиоматическое определение каждого класса математических объектов, рассматриваемых в этой главе, влечет за собой существование правила, устанавливающего, являются ли два данных математических объекта a и b «равными» (эквивалентными или неразличимыми с точки зрения модели, $a=b$) или нет; это правило должно быть таким, что:

1) $a=a$ (*рефлексивность отношения равенства*),
2) из $a=b$ следует $b=a$ (*симметрия*),
3) из $a=b$, $b=c$ следует $a=c$ (*транзитивность*).

В пп. 13.2-2 и 16.3-1 приводятся примеры определения равенства в *конструктивно определяемых моделях*.

(b) Вообще любое отношение $a \overset{r}{\sim} b$ между двумя объектами a, b класса C называется **отношением эквивалентности** в том и только в том случае, если оно *рефлексивно* ($a \overset{r}{\sim} a$), *симметрично* (из $a \overset{r}{\sim} b$ следует $b \overset{r}{\sim} a$) и *транзитивно* (из $a \overset{r}{\sim} b$, $b \overset{r}{\sim} c$ следует $a \overset{r}{\sim} c$). *Любое отношение эквивалентности определяет* **разбиение** класса C, т. е. подразделение класса C на подклассы без общих элементов. Элементы одного и того же такого подкласса *эквивалентны* в смысле свойств, определяющих отношение эквивалентности.

Примеры. Равенство, тождественность функций (п. 1.1-4), равенство и подобие треугольников, изоморфизм (п. 12.1-6).

12.1-4. Преобразования, функции, операции (см. также пп. 4.2-1, 14.1-3 и 14.3-1). Набор правил $x \to x'$, ставящих каждому объекту x класса C в соответствие некоторые объекты x' класса C', называется **преобразованием (отображением) класса C в класс C'; x' есть функция**

$$x'=x'(x)=f(x) \qquad (12.1\text{-}1)$$

аргумента x с областью определения C и множеством значений, содержащимся в C'. Классы C и C' могут быть различными, но могут и совпадать. Соотношение (1) можно рассматривать как **операцию** над **операндом** x, дающую **результат** x'. Если в классах C и C' даны удовлетворяющие нужным условиям определения равенства (п. 12.1-3), то операция (преобразование, функция) (1) **определена корректно**, если из $x=y$ следует $x'=y'$. **Предполагается, что если специально не будет оговорено противное, это условие всегда будет выполняться.**

Отображение (1) называется **однозначным** [$f(x)$ — **однозначная** функция x], если каждому объекту x соответствует единственный объект x'. **Все отобра-**

---

[1]) Слово *алгебра* имеет три слабо связанных между собой значения: 1) общий предмет, как в данном случае (*абстрактная алгебра, элементарная алгебра*); 2) теория алгебраических операций, используемая в связи со специфической моделью (*матричная алгебра, тензорная алгебра*); 3) тип математической модели (*линейная алгебра, булева алгебра*).

жения в дальнейшем всегда предполагаются однозначными, и это специально не оговаривается. Отображение класса C на класс C' называется **взаимно однозначным (взаимно однозначным соответствием классов** C и C'), если оно отображает класс C на весь класс C' и определяет однозначное **обратное отображение (обратное преобразование)** $x' \to x$. Многие авторы категорически настаивают на том, что *каждое* отображение по определению должно быть однозначно (см. также сноску к п. 4.2-2). Множество пар (x, x') называется *графиком* функции $f(x)$. Каждый объект x в равенстве (1) может сам быть множеством некоторых объектов $x_1, x_2, \ldots$; таким путем можно определить функции $x' = f(x_1, x_2, \ldots)$ двух и более аргументов.

Числовая (действительная или комплексная) функция, определенная на некотором множестве функций, называется **функционалом** (например, интеграл $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$, наибольшее значение функции $\varphi(x)$ на $[a, b]$ и т. д.).

Сами преобразования (функции, операции) можно рассматривать как новые математические объекты (см., например, п. 14.3-1).

12.1-5. Инвариантность (см. также пп. 12.2-8, 13.14-1, 14.4-5, 16.1-4 и 16.4-1). Если дано преобразование (1) класса (пространства) C в себя, то любая функция $F(x, y, \ldots)$ такая, что $F[f(x), f(y), \ldots] = F(x, y, \ldots)$ для всех $x, y, \ldots$ из C, и любое соотношение $O(x, y, \ldots) = A$ такое, что $O[f(x), f(y), \ldots] = A$ для всех $x, y, \ldots$ из C, называются **инвариантными относительно преобразования** (1).

12.1-6. Представление одной модели другой: гомоморфизмы и изоморфизмы. Пусть M — математическая модель (п. 12.1-1), состоящая из объектов $a, b, \ldots$ и включающая операции $O, P, \ldots$, результаты которых $O(a, b, \ldots)$, $P(a, b, \ldots), \ldots$ являются элементами модели M[1]), и M' — вторая модель с операциями $O'(a', b', \ldots)$, $P'(a', b', \ldots), \ldots$ Отображение $a \to a'$ множества элементов модели M в множество элементов модели M' называется **гомоморфизмом** модели M в модель M' (относительно указанных операций), если при этом отображении $O(a, b, \ldots) \to O'(a', b', \ldots)$, $P(a, b, \ldots) \to P'(a', b', \ldots), \ldots$ Гомоморфизм сохраняет все отношения, основанные на рассматриваемых операциях, т. е. каждое такое отношение между элементами $a, b, \ldots$ модели M порождает соответствующее отношение между элементами $a', b', \ldots$ модели M'. Гомоморфизм, отображающий модель M в себя, называется **эндоморфизмом.** Если гомоморфизм отображает модель M на всю модель M', то M' называется **гомоморфным образом** модели M.

Изоморфизм — это взаимно однозначный гомоморфизм. Если существует изоморфизм модели M на модель M', то модели M и M' называются **изоморфными** относительно рассматриваемых операций; в этом случае как отображение $M \to M'$, так и обратное отображение $M' \to M$ являются гомоморфизмами. Изоморфизм, отображающий M на себя, называется **автоморфизмом** модели M.

Понятие гомоморфизма и родственные с ним понятия изоморфизма и автоморфизма имеют огромное практическое значение, так как они позволяют представлять одну модель другой моделью. Можно, в частности, представлять математические объекты некоторыми множествами действительных чисел (аналитическая геометрия, матричное и тензорное представления). Заметим, что изоморфизм есть отношение эквивалентности (п. 12-1-3, b) между моделями: свойства целого класса изоморфных моделей можно выводить из (или рассматривать на примере) свойств любой модели этого класса.

Некоторые авторы требуют, чтобы каждый гомоморфизм $M \to M'$ отображал M на всю модель M'. В этом случае гомоморфизм определяет изоморфизм между моделью, состоящей из непересекающихся классов элементов модели M, и моделью M'.

---

1) Элементы $a, b, \ldots$ не обязательно должны принадлежать одному классу математических объектов (например, они могут быть векторами и скалярами, п. 12.4-1).

12.2. АЛГЕБРА МОДЕЛЕЙ С ОДНОЙ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ОПЕРАЦИЕЙ: ГРУППЫ

12.2-1. Определение и основные свойства группы.

(a) Класс G объектов (элементов) $a, b, c, \ldots$ называется **группой**, если определена бинарная операция, которая каждой паре элементов a, b класса G ставит в соответствие некоторый объект (результат операции) $a \odot b$ так, что:

1) $a \odot b$ является элементом класса G (*замкнутость* по отношению к определяющей операции);
2) $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ (*ассоциативный закон*);
3) G содержит (левую) **единицу** E такую, что для каждого элемента a из G, $E \odot a = a$;
4) для каждого элемента a из G в G существует (левый) **обратный** элемент a^{-1} такой, что $a^{-1} \odot a = E$.

Два элемента a, b некоторой группы **перестановочны**, если $a \odot b = b \odot a$. Если все элементы a, b группы G перестановочны, то определяющая операция называется **коммутативной**, а группа G — **коммутативной** или **абелевой группой.** Группа G, содержащая конечное число g элементов, называется **конечной группой** (группой **порядка** g); в противном случае G — **бесконечная** группа. В этом последнем случае группа G может быть счетной или несчетной.

(b) *Каждая группа G имеет единственную левую и единственную правую единицу, и эти единицы равны* ($E \odot a = a \odot E = a$). *Каждый элемент a имеет единственный левый и единственный правый обратный элемент, и эти элементы равны* ($a^{-1} \odot a = a \odot a^{-1} = E$).

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} &\text{из } c \odot a = c \odot b \text{ следует } a = b, \\ &\text{из } a \odot c = b \odot c \text{ следует } a = b \end{aligned}\right\} \text{ (законы сокращения).} \qquad (12.2\text{-}1)$$

Группа G содержит единственное решение x любого уравнения $c \odot x = b$ или $x \odot c = b$, т. е. в группе возможны однозначно определенные правое и левое «деление».

(c) Операцию, определяющую группу, часто называют (абстрактным) *умножением* (см., однако, п. 12.2-10); тогда ее результат записывается как *произведение* ab, а элемент, обратный элементу a, — как a^{-1}. Это соглашение свободно используется в следующих пунктах.

Кратные произведения aa, aaa, ... записывают в виде *целых степеней* a^2, a^3, ..., причем $(a^{-1})^n = a^{-n}$, $a^0 = E$. Заметим, что

$$(a^{-1})^{-1} = a, \; a^m a^n = a^{m+n}, \; (a^m)^n = a^{mn}, \; (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}. \qquad (12.2\text{-}2)$$

12.2-2. Подгруппы.

Подмножество G_1 группы G называется ее **подгруппой,** если G_1 является группой в смысле определяющей операции группы G. Это справедливо *в том и только в том случае, если* 1) *множество G_1 содержит все произведения принадлежащих ему элементов и все элементы, обратные его элементам* *), *или* 2) *для любой пары элементов a, b из G_1 множество G_1 содержит и произведение ab^{-1}.*

Пересечение (п. 4.3-2, а) *двух подгрупп группы G есть подгруппа группы G.* Сама группа G и E называются **несобственными подгруппами** группы G; все остальные подгруппы — **собственные.** *Если G — группа конечного порядка g* (п. 12.2-1), *то порядок g_1 любой ее подгруппы G_1 является делителем порядка группы* (теорема Лагранжа); число g/g_1 называется **индексом** подгруппы G_1 (в группе G).

---

*) В случае конечной группы второе требование излишне, так как оно следует из первого.

12.2-3. Циклические группы. Порядок элемента группы. Циклическая группа состоит из степеней $a^0 = E$, a, a^2, ... одного элемента a и обязательно коммутативна. *Любая группа простого порядка и любая подгруппа циклической группы являются циклическими.*

Каждый элемент a любой группы G порождает в G циклическую подгруппу, состоящую из всех его степеней. Порядок этой подгруппы называется **порядком элемента** a; если он конечен, то он равен такому наименьшему натуральному числу m, что $a^m = E$; в противном же случае a называется *элементом бесконечного порядка.*

12.2-4. Произведения подмножеств. Смежные классы.

(a) Произведение [1]) C_1C_2 двух подмножеств C_1 и C_2 группы G есть множество, состоящее из всех (различных) произведений a_1a_2 элементов a_1 из C_1 и элементов a_2 из C_2. *Произведение C_1C_2 двух подгрупп группы G является подгруппой в G в том и только в том случае, если $G_1G_2 = G_2G_1$.*

(b) **Левым смежным классом** xG_1 в группе G по ее подгруппе G_1 называется множество всех произведений xa_1 данного элемента x из G и любых элементов a_1 из G_1. Аналогично **правый смежный класс** G_1x есть множество всех произведений вида a_1x. *Смежный класс по подгруппе G_1 сам является подгруппой в том и только в том случае если x есть элемент из G_1*; при этом условии $xG_1 = G_1x = G_1$. *Два левых смежных класса, по G_1 либо совпадают, либо не имеют ни одного общего элемента; то же самое справедливо и для двух правых смежных классов. Каждая подгруппа G_1 группы G определяет разбиение* (п. 12.1-3) *группы G на конечное или бесконечное число n_1 левых смежных классов и разбиение G на n_1 правых смежных классов*; *если G — группа конечного порядка g, то n_1 равняется индексу g/g_1 подгруппы G_1* (п. 12.2-2). *Два элемента a, b группы G принадлежат одному и тому же левому смежному классу по подгруппе G_1, если G_1 содержит $a^{-1}b$ одному и тому же правому смежному классу по G_1, если G_1 содержит ba^{-1}.*

12.2-5. Сопряженные элементы и подгруппы. Нормальные делители. Фактор-группы.

(a) Два элемента x и x' группы G называются **сопряженными**, если они связаны преобразованием (п. 12.1-4)

$$x' = a^{-1}xa \qquad (\text{или } x = ax'a^{-1}), \tag{12.2-3}$$

где a — некоторый элемент группы G. Тогда говорят, что x' является **результатом трансформирования элемента** x **элементом** a. *Сопряженность является отношением эквивалентности* (п. 12.1-3) *и определяет разбиение группы G на* **классы** *сопряженных элементов.*

(b) Преобразование (3) переводит каждую подгруппу G_1 группы G в **сопряженную подгруппу** $G_1' = a^{-1}G_1a$. *Подгруппа G_1 отображается сама на себя ($G_1' = G_1$) для любого элемента a из G в том и только в том случае, если* 1) *элементы a_1 подгруппы G_1 перестановочны с любым элементом a группы G ($aG_1 = G_1a$) или* 2) *подгруппа G_1 содержит все элементы, сопряженные с ее элементами.* Подгруппа, отличающаяся этими свойствами, называется **нормальной подгруппой (нормальным делителем, инвариантной подгруппой)** группы G.

Любая подгруппа индекса 2 (п. 12.2-2) *является нормальным делителем группы G.* **Простая группа** не содержит никаких нормальных делителей, кроме себя самой и E.

(c) *Левые смежные классы* (п. 12.2-4, b) *по нормальному делителю совпадают с соответствующими правыми смежными классами и образуют группу по отношению к операции умножения, определенной* в п. 12.2-4, a; эта группа называется **фактор-группой** G/G_1 **группы** G **по нормальному делителю** G_1. *Если G — группа конечного порядка, то порядок фактор-группы G/G_1 равен индексу g/g_1 подгруппы G_1* (п. 12.2-2).

12.2-6. Нормальный ряд. Композиционный ряд. Для любой группы G **нормальным рядом** называется такая (конечная) последовательность подгрупп $G_0 = G$, G_1, G_2, ..., $G_m = E$, что каждая подгруппа G_i является нормальным делителем подгруппы G_{i-1}. Нормальный ряд называется **композиционным рядом** группы G, если G_i при любом i есть собственный нормальный делитель подгруппы G_{i-1} и если между G_{i-1} и G_i нельзя вставить никакого другого нормального делителя, т. е. если каждый **композиционный**

---

[1]) Произведение C_1C_2 двух подмножеств не следует смешивать с их *пересечением* (*логическим произведением*, п. 4.3-2) $C_1 \cap C_2$, а также с *прямым произведением* (п. 12.7-2).

фактор G_{i-1}/G_i — простая группа (п. 12.2-5). *Между любыми двумя композиционными рядами одной и той же группы G существует такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие их элементы являются изоморфными группами (теорема Жордана — Гельдера).* Группа G называется **разрешимой**, если все ее композиционные факторы являются циклическими группами (п. 12.2-3).

12.2-7. Центр. Нормализаторы.

(a) *Множество всех элементов группы G, перестановочных с любым элементом этой группы, является нормальным делителем группы G; он называется* **центром** *группы G.*

(b) *Множество всех элементов группы G, перестановочных с данным элементом a из G, является подгруппой группы G* (**нормализатором элемента** *a*), *которая содержит циклическую подгруппу, порожденную элементом a* (п. 12.2-3), *в качестве своего нормального делителя.*

Множество элементов группы G, перестановочных с каждым элементом данной подгруппы G_1 группы G, является подгруппой группы G (**нормализатором подгруппы** G_1), *которая содержит G_1 в качестве нормального делителя.*

Число различных элементов или подгрупп группы G, сопряженных (п. 12.2-5) *с некоторым ее элементом или подгруппой, равно индексу* (п. 12.2-2) *нормализатора этого элемента (или соответственно этой подгруппы) в группе G.*

12.2-8. Группы преобразований или операторов (см. также пп. 12.1-4, 14.9-1 — 14.10-7 и 16.1-2). *Множество G всех взаимно однозначных преобразований $x' = f(x)$ любого класса C на себя образует группу,* определяющей операцией в которой является последовательное применение двух преобразований (*умножение преобразований или операторов*).

Если G_1 — произвольная подгруппа группы преобразований G, то два объекта x, x', связанные каким-либо преобразованием $x' = f(x)$ из подгруппы G_1, называются **эквивалентными относительно подгруппы** G_1. Это отношение есть отношение эквивалентности (п. 12.1-3), так что каждая подгруппа G_1 определяет разбиение (классификацию) множества C. *Каждое свойство, инвариантное* (п. 12.1-5) *по отношению к G_1 (ко всем преобразованиям из G_1), присуще всем объектам x, эквивалентным относительно G_1.* Множество (обычно числовых) функций $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., инвариантных по отношению к G_1, называется **полной системой инвариантов** группы G_1, если множество значений этих функций однозначно определяет класс эквивалентности любого данного объекта x из C.

Примеры групп преобразований: все $n!$ подстановок из n элементов (**симметрическая группа степени** n); все $n!/2$ четных подстановок, соответствующих четным числам транспозиций из n элементов (**знакопеременная группа степени** n). Любая подстановка счетного множества объектов S может быть выражена как произведение циклических подстановок некоторых подмножеств множества S так, что никакие два таких цикла не действуют на одни и те же элементы из S.

12.2-9. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп. Представление групп (см. также пп. 12.2-4, 12.2-5 и 14.9-1 — 14.10-7).

(a) Гомоморфизм или изоморфизм (по отношению к определяющей операции, п. 12.1-6) переводит элементы a, b, ... данной группы G в элементы a', b', ... некоторой группы G' так, что $(ab)' \to a'b'$. Единица группы G переходит в единицу группы G'; обратные элементы переходят в обратные.

При каждом гомоморфизме группы G на группу G' множество элементов группы G, отображающихся в единицу группы G', есть нормальный делитель G_E группы G, а множество элементов, отображающихся в произвольный элемент группы G', есть некоторый смежный класс по G_E; фактор-группа G/G_E изоморфна группе G'. Нормальный делитель G_E называется **ядром** гомоморфизма. *Каждый нормальный делитель G_1 группы G является ядром гомоморфизма, переводящего G в фактор-группу G/G_1.*

Класс всех автоморфизмов любой группы G образует группу; класс всех преобразований вида (3) *группы G* (**внутренних автоморфизмов** *группы G*) *есть подгруппа группы автоморфизмов.*

Сопряженные подгруппы обязательно изоморфны.

(b) *Всякая группа G изоморфна некоторой подгруппе (может быть* **представлена** *такой подгруппой,* **реализована** *в виде такой подгруппы) группы всех взаимно однозначных преобразований некоторого класса объектов на себя (теорема Кэли,* см. также п. 12.2-8). В частности, *каждая конечная группа изоморфна некоторой группе подстановок (регулярное представление конечной группы,* п. 14.9-1,a). Представления групп с помощью линейных преобразований и матриц см. в пп. 14.9-1 — 14.10-7.

12.2-10. Аддитивные группы. Классы вычетов и сравнимость.

(a) На определяющую операцию в *коммутативной* группе (абелевой группе, п. 12.2-1, a) часто смотрят как на (абстрактное) сложение. Ее результат можно записывать в виде *суммы* $a+b$, а единицу и элемент, обратный данному элементу a, соответственно как 0 (*нуль* или *нулевой элемент*) и $-a$; при этом пишут

$$a+(-b)=a-b.$$

Группу в этом случае называют **аддитивной (группой по сложению)**, а выражения вида $a+a$, $a+a+a$, $-a-a$, ... обозначают символами $2a$, $3a$, $-2a$, ...

(b) *Каждая подгруппа коммутативной группы есть нормальный делитель.* Смежные классы по подгруппе G_1 аддитивной группы G называются **классами вычетов по модулю** G_1; два элемента a, b группы G, принадлежащие одному и тому же классу вычетов (т. е. для которых G_1 содержит $a-b$; см. также п. 12.2-4,b), называются **сравнимыми по модулю** G_1 $[a \equiv b\ (G_1)]$. Сравнимость есть отношение эквивалентности (п. 12.1-3, см. также п. 12.2-4, b). Фактор-группа G/G_1 аддитивной группы G является группой классов вычетов по модулю G_1 и может быть обозначена символом $G\ [\mathrm{mod}\ G_1]$.

Два целых числа m и n **сравнимы по модулю** r $[m \equiv n\ (\mathrm{mod}\ r)]$, где r — целое число, если разность $m-n$ делится на r; это значит, что m и n при делении на r дают одинаковые остатки.

12.3. АЛГЕБРА МОДЕЛЕЙ С ДВУМЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ ОПЕРАЦИЯМИ; КОЛЬЦА, ПОЛЯ И ОБЛАСТИ ЦЕЛОСТНОСТИ

12.3-1. Определения и основные теоремы.

(a) Класс R объектов (элементов) a, b, c, ... называется **кольцом**, если определены две бинарные операции, обычно называемые (абстрактными) *сложением* и *умножением*, такие, что

1) R есть коммутативная группа по сложению (аддитивная группа, п. 12.2-10), т. е. R замкнуто по отношению к сложению, и

$$a+b=b+a, \qquad a+(b+c)=(a+b)+c,$$
$$a+0=a, \qquad a+(-a)=a-a=0;$$

2) произведение ab есть элемент R (*замкнутость по отношению к умножению*);

3) $a(bc)=(ab)c$ (*ассоциативный закон для умножения*) *);

4) $a(b+c)=ab+ac$, $(b+c)a=ba+ca$ (*дистрибутивные законы*).

Заметим, что $a\cdot 0=0\cdot a=0$ для любого элемента a кольца R. Два элемента $p\neq 0$ и $q\neq 0$ кольца R, для которых $pq=0$, называются соответственно **левым** и **правым делителями нуля. В кольце без делителей нуля** из $ab=0$ следует либо $a=0$, либо $b=0$, либо $a=b=0$ и *действуют законы сокращения* (12.2-1).

Целочисленные «кратные» элементы a кольца, например, $2a$, $3a$, ... (п. 12.2-10,a), вообще говоря, не являются произведением элементов кольца. *Целые степени* элементов кольца определяются, как в п. 12.2-1, c.

(b) Если кольцо R содержит *левую единицу*, т. е. такой элемент E, что $Ea=a$ для всех a (см. также п. 12.2-1,a), и *правую единицу*, т. е. такой элемент E', что $aE'=a$ для всех a, то $E'=E$ и *E обязательно является как единственной левой, так и единственной правой единицей*. В этом случае E называется **кольцом с единицей**.

Могут быть и такие кольца, в которых существует одна или несколько правых единиц, но нет ни одной левой единицы, или наоборот.

Если a — произвольный элемент кольца с единицей E, то его *левым обратным* (мультипликативным) элементом называют такой элемент a_l^{-1}, что $a_l^{-1}a=E$. Аналогично, a_r^{-1} называется *правым обратным* элементом, если $aa_r^{-1}=E$.

---

*) Иногда также рассматривают *неассоциативные* кольца, в которых ассоциативный закон не соблюдается.

Если элемент a обладает как левым, так и правым обратным элементом, то они равны между собой: $a_l^{-1}=a_r^{-1}=a^{-1}$; в этом случае элемент a обладает единственным обратным элементом.

Заметим, что не все элементы кольца обязаны иметь обратные элементы.

(c) **Поле** есть кольцо с единицей, которое содержит: 1) по крайней мере один элемент, отличный от нуля, и 2) для каждого элемента $a \neq 0$ мультипликативный обратный элемент a^{-1}. *Ненулевые элементы поля F образуют группу по умножению.*

Если a и c — произвольные элементы поля F, причем $c \neq 0$, то уравнения

$$cx=b \quad \text{и} \quad xc=b$$

имеют в F решения; эти решения единственны (*однозначно определенные левое и правое деление*, см. также в п. 12.2-1, b). *Делителей нуля в поле нет.*

(d) Кольцо или поле **коммутативны**, если

$$ab=ba$$

для всех a и b. Коммутативное поле иногда называют просто полем, в отличие от **тела** или **некоммутативного поля. Полем Галуа** называют конечное коммутативное поле. **Область целостности** — это коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля. *Любая конечная область целостности является полем Галуа.*

В любой области целостности все ненулевые элементы аддитивной группы имеют один и тот же порядок (п. 12.2-3). Его называют **характеристикой** этой области целостности.

(e) Краткие сведения об *упорядоченных полях* см. в п. 12.6-3.

Примеры полей: рациональные числа, действительные числа, комплексные числа.

Примеры областей целостности: целые числа, комплексные числа с целой действительной и мнимой частью, многочлены с действительными или с комплексными коэффициентами.

Примеры коммутативных колец: четные целые числа (кольцо без единицы), непрерывные функции на конечном интервале (кольцо имеет делители нуля).

12.3-2. Подкольца и подполя. Идеалы.

(a) Подмножество R_1 кольца R называется его **подкольцом**, если R_1 является кольцом в смысле определяющих операций кольца R. Это имеет место в том и только в том случае, если R_1 для любой пары своих элементов a и b содержит $a-b$ и ab. Аналогично подмножество F_1 поля F называется его **подполем**, если F_1 есть подкольцо кольца F, имеющее по крайней мере один ненулевой элемент, и если для каждой пары элементов a и $b \neq 0$ множества F_1 оно содержит и ab^{-1}. Ненулевые элементы подполя F_1 образуют подгруппу мультипликативной группы поля F.

(b) Подмножество I_1 кольца R называется **идеалом** в R, если

1) I_1 есть подгруппа R по сложению;
2) I_1 содержит все произведения ab (**левый идеал**), или все произведения ba (**правый идеал**), или все произведения ab и ba (**двусторонний идеал**), где a — любой элемент из I_1, а b — любой элемент из R.

Пример. В кольце всех целых чисел числа, кратные некоторому числу p, составляют двусторонний идеал.

12.3-3. Расширения. Коммутативное кольцо или поле часто оказывается возможным включить в качестве подкольца или подполя в «более широкое» поле (поле отношений, алгебраическое расширение и т. д.; см. также пример в п. 12.4-2). Теория полей, включающая так называемую теорию Галуа, занимается вопросом о существовании таких расширений. (Приложения: исследование возможности построения с помощью циркуля и линейки, или решения алгебраических уравнений с помощью радикалов, или построения латинских квадратов.)

12.4. МОДЕЛИ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ В СЕБЯ БОЛЕЕ ОДНОГО КЛАССА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ: ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ

12.4-1. Линейные векторные пространства. Пусть R — кольцо (с мультипликативной) единицей 1 (п. 12.3-1); элементы α, β, ... кольца R будем называть **скалярами**. Класс $\mathcal{U}$ объектов (элементов) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ... называется (**линейным**) **векторным пространством над кольцом** R, а элементы класса $\mathcal{U}$

называются *векторами*, если определены две бинарные операции — **векторное сложение и умножение вектора на скаляр** такие, что[1])

1) $\mathcal{U}$ есть коммутативная группа по векторному сложению: для каждой пары элементов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathcal{U}$ пространство $\mathcal{U}$ содержит их векторную сумму $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c},$$

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{a}-\mathbf{a}=\mathbf{0},$$

где $\mathbf{0}$ — аддитивный нулевой элемент (нулевой вектор) пространства $\mathcal{U}$, а $-\mathbf{a}$ — элемент, аддитивный обратный элементу $\mathbf{a}$ (п. 12.2-10);

2) если $\mathbf{a}$ — любой вектор из $\mathcal{U}$ и α — любой скаляр из R, то $\mathcal{U}$ содержит вектор $\alpha\mathbf{a}$, произведение вектора $\mathbf{a}$ на скаляр α (*замкнутость по отношению к умножению на скаляр*);

3) $(\alpha\beta)\,\mathbf{a}=\alpha(\beta\mathbf{a})$ (*ассоциативный закон для умножения на скаляр*);

4) $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$, $(\alpha+\beta)\,\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$ (*дистрибутивные законы*);

5) $1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

Заметим, что

$$0\cdot\mathbf{a}=\mathbf{0}, \quad (-1)\,\mathbf{a}=-\mathbf{a}, \quad (-\alpha)\,\mathbf{a}=-(\alpha\mathbf{a}). \tag{12.4-1}$$

Линейные векторные пространства исключительно важны для прикладной математики; они будут детально рассмотрены в гл. 14 (см. также главы 5, 6, 15, 16 и 17).

12.4-2. Линейные алгебры. Пусть R — кольцо скаляров с единицей. Класс $\mathcal{L}$ называется **линейной алгеброй (линейной ассоциативной алгеброй, системой гиперкомплексных чисел) над кольцом** R, если определены три бинарные операции (**сложение и умножение в** $\mathcal{L}$ **и умножение элементов из** $\mathcal{L}$ **на скаляры**) такие, что

1) $\mathcal{L}$ есть кольцо,

2) $\mathcal{L}$ есть линейное векторное пространство над кольцом скаляров R.

Рангом линейной алгебры называется ее размерность как векторного пространства (п. 14.2-4). Если линейная алгебра есть поле, то она называется **алгеброй с делением** (п. 12.3-1). Матричное представление линейных алгебр см. в п. 14.9-7.

Элемент $\mathsf{A}\neq 0$ линейной алгебры называется **идемпотентным**, если $\mathsf{A}^2=\mathsf{A}$, и **нильпотентным**, если существует такое натуральное число $m>1$, что $\mathsf{A}^m=0$. Эти определения, в частности, применимы к матрицам (п. 13.2-2) и к линейным операторам (п. 14.3-6).

Примеры (см. также пп. 13.2-2 и 14.4-2). 1) *Поле комплексных чисел* — коммутативная алгебра с делением ранга два над полем действительных чисел. 2) Поле **кватернионов** a, b, $\cdots$ является единственным расширением (п. 12.3-3) поля комплексных чисел, которое образует некоммутативную алгебру с делением над полем действительных чисел. Каждый кватернион a может быть представлен в виде

$$a=\alpha_0+i\alpha_1+j\alpha_2+k\alpha_3=(\alpha_0+i\alpha_1)+(\alpha_2+i\alpha_3)\,j, \tag{12.4-2}$$

где α_0, α_1, α_2, α_3 — действительные числа, а i, j и k — специальные кватернионы (вместе с 1 они являются элементами **базиса**), подчиняющиеся следующим правилам умножения:

$$\left.\begin{aligned} &i^2=j^2=k^2=-1,\\ &jk=-kj=i,\quad ki=-ik=j,\quad ij=-ji=k. \end{aligned}\right\} \tag{12.4-3}$$

---

[1]) Некоторые авторы требуют, чтобы $\mathcal{U}$ содержало не только сумму любых двух векторов, но и всякую бесконечную сумму $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots$, сходящуюся в некотором специальном смысле; определенные таким образом векторные пространства не относятся к алгебре в собственном смысле слова (см. также п. 14.2-1).

Если положить $\bar{a} = \alpha_0 - i\alpha_1 - j\alpha_2 - k\alpha_3$, то

$$|a|^2 = \bar{a}a = a\bar{a} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \qquad (12.4\text{-}4)$$

$$a^{-1} = \bar{a}/|a|^2, \qquad a \neq 0 \qquad (12.4\text{-}5)$$

(см. также п. 14.10-4).

12.5. МОДЕЛИ, ДОПУСКАЮЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ: ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

12.5-1. Топологические пространства (элементарные свойства точечных множеств см. в п. 4.3-2).

(a) Класс C объектов (точек) x называется **топологическим пространством,** если он может быть представлен как объединение некоторого семейства I своих подмножеств, которое содержит:

1) пересечение любой пары своих множеств,
2) объединение любого множества своих множеств.

Элементы семейства I и пустое множество называются **открытыми множествами** пространства C, а семейство открытых множеств — **топологией** пространства C. Некоторое семейство $\mathscr{B}$ открытых множеств называется **базой** пространства C, если каждое множество из I есть объединение каких-либо множеств из $\mathscr{B}$. *Пересечения любого подмножества* C_1 *топологического пространства* C *с открытыми множествами этого пространства задают топологию в* C_1 (**относительная топология подпространства** C_1).

Одно и то же множество может допускать несколько топологий (и при этом получаются различные топологические пространства); всякое множество C допускает **тривиальную** топологию, при которой открытыми множествами считаются только C и пустое множество, и **дискретную** топологию, когда открыто любое подмножество пространства C.

(b) При данной топологии **окрестностью** точки $x \in C$ называют любое множество в C, которое содержит открытое множество, содержащее x. Часто под окрестностью точки x понимают только *открытое* множество, содержащее x. Коль скоро определены окрестности, точно так же как в п. 4.3-6, а, можно определить *предельные точки, внутренние точки, граничные точки* и *изолированные точки* множеств; топологические пространства очевидным образом обобщают и абстрагируют некоторые свойства системы действительных чисел.

В любом топологическом пространстве C *множество является открытым в том и только в том случае, если оно содержит только внутренние точки*; множество S **замкнуто**; 1) если S есть дополнение в C некоторого открытого множества или 2) если S содержит все свои предельные точки (равносильные определения). Множество S **всюду плотно** в C, если в каждом открытом множестве пространства C содержится хотя бы одна точка из S. Топологическое пространство называется **сепарабельным,** если оно содержит счетное всюду плотное множество. *Если в пространстве* C *существует счетная база, то* C *сепарабельно.*

Топологическое пространство C называется **компактным,** если всякая бесконечная последовательность его точек имеет в нем хотя бы одну предельную точку; *это имеет место в том и только в том случае, если каждое счетное семейство открытых множеств, покрывающее* C (*т. е. объединение которого равно* C), *содержит конечное подсемейство, покрывающее* C (см. также п. 12.5-4).

Множество точек S топологического пространства C называется **относительно компактным (компактным в** C**),** если всякая бесконечная последовательность точек множества S имеет предельную точку в C. Множество S **компактно (компактно в себе),** если каждая бесконечная последовательность его точек имеет предельную точку в S.

Топологическое пространство C называется **бикомпактным,** если каждое семейство открытых множеств, покрывающее C, содержит конечное подсемейство, покрывающее C. *Бикомпактное пространство компактно.*

Бикомпактность и компактность являются обобщением понятия ограниченности и замкнутости множества (п. 4.3-6) в конечномерных пространствах, где имеют место теоремы Больцано — Вейерштрасса и Гейне — Бореля (п. 12.5-4).

(c) Предельные и граничные точки множества S соответственно образуют его **производное множество** S' и его **границу**. Замкнутое множество $S \cup S'$ называется **замыканием** множества S. Два множества **отделены**, если никакое из них не пересекается с замыканием другого. Множество называется **связным**, если оно не может быть представлено в виде объединения двух отделенных собственных его подмножеств (пример: область в евклидовом пространстве, п. 4.3-6, d).

(d) Непрерывность. Гомеоморфизмы. Отображение (преобразование, соответствие, функция, операция) $x \to x' = f(x)$ топологического пространства C в топологическое пространство C' называется **непрерывным в точке** $a \in C$, если для каждой окрестности U' точки $f(a)$ в C' существует такая окрестность U точки a в C, образ которой содержится в U'. Отображение $f(x)$ **непрерывно** в C, если оно непрерывно в каждой точке пространства C; для этого необходимо и достаточно, чтобы множество всех точек, отображающихся в любое открытое множество U' пространства C' (полный прообраз множества U'), было открыто в C.

Непрерывное взаимно однозначное отображение, имеющее непрерывное обратное отображение, называется **гомеоморфизмом** или **топологическим отображением**; соответствующие топологические пространства называются **гомеоморфными** или **топологически эквивалентными**.

(e) **Топология** — наука о свойствах и величинах, инвариантных относительно топологических отображений (**топологические инварианты**; см. также п. 12.1-5). Весьма существенно, что *подходящие топологические пространства служат моделями, допускающими определение сходящихся предельных процессов с помощью понятия окрестности* (см. также пп. 4.3-5, 4.4-1 и 12.5-3) *). В конкретных случаях топология часто вводится прямо путем определения окрестностей или сходимости.

Примеры. Определение окрестностей, данное в п. 4.3-5, устанавливает в системе действительных чисел «обычную» топологию и позволяет ввести пределы, дифференцирование, интегрирование, бесконечные ряды и т.д. Подобным же образом в п. 5.3-1 дается определение топологии для пространства евклидовых векторов (см. также пп. 12.5-3 и 14.2-7).

12.5-2. Метрические пространства. Класс C объектов (точек) $x, y, z, \ldots$ называется **метрическим пространством**, если для каждой упорядоченной пары точек x, y из C определено действительное число $d(x, y)$ (**расстояние** между x и y, **метрика**) такое, что

1) $d(x, y) = 0$ в том и только в том случае, если $x = y$,
2) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$ (*неравенство треугольника*) для любых x, y, z из C.

Из этого определения вытекает

$$d(x, y) \geqslant 0, \quad d(y, x) = d(x, y) \tag{12.5-1}$$

для всех x и y из C.

Два метрических пространства называются **изометричными**, если между ними существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее расстояние (**изометрия**). Свойства, общие для всех метрических пространств, изометричных данному, называются **метрически инвариантными**.

Примеры. Действительные и комплексные числа образуют метрические пространства с метрикой $d(x, y) \equiv |x - y|$. Вообще любое нормированное векторное пространство (п. 14.2-5) допускает метрику $d(x, y) \equiv \|x - y\|$ (см. также пп. 14.2-6, 14.2-7 и 15.2.-2).

12.5-3. Топология, окрестности и сходимость в метрическом пространстве.

(a) Если a — любая точка метрического пространства C, то множество точек $x \in C$, для которых $d(a, x) < \delta$, называется **открытым шаром радиуса** δ **с центром** a. *Открытые шары конечных радиусов составляют базу в пространстве* C (п. 12.5-1). Открытые множества в C — объединения любых множеств открытых шаров. **Окрестностью** точки a в C называется любое множество, содержащее открытый шар с центром a. Множество точек $x \in C$, для которых

*) Целиком за пределами этого справочника остается *алгебраическая топология*.

$d(a, x) \leqslant \delta$, называется **замкнутым шаром радиуса** δ **с центром** a. Множество в пространстве C называется **ограниченным**, если оно содержится в некотором замкнутом шаре этого пространства.

(b) Последовательность точек $x_0, x_1, x_2, \ldots$ метрического пространства C **сходится к пределу** $a \in C$, если

$$d(x_n, a) \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

(см. также п. 14.2-7).

Если переменная точка $x(\xi)$ пространства C является функцией действительного переменного ξ, то говорят, что функция $x(\xi)$ **сходится к пределу** $a \in C$ при $\xi \to \alpha$, если $d[x(\xi), a] \to 0$ при $\xi \to \alpha$. Функция $x' = f(x)$, связывающая точки x метрического пространства C_M и точки x' метрического пространства C'_M, **непрерывна в точке** $a \in C_M$, если

$$d[f(x), f(a)] \to 0 \text{ при } d(x, a) \to 0.$$

12.5-4.* **Метрические пространства со специальными свойствами. Теория точечных множеств.**

(a) Метрическое пространство C называется:

полным, если любая последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек пространства C, для которой $\lim\limits_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} d(x_m, x_n) = 0$ (**последовательность Коши, фундаментальная последовательность**), сходится к некоторой точке из C (см. также пп. 4.9-1, а, 4.9-2, а, 4.9-3, а, 14.2-7 и 15.2-2);

компактным, если любая бесконечная последовательность точек пространства C содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из C. Компактное метрическое пространство называется также **компактом** (см. п. 12.5-1, b);

вполне ограниченным, если для любого $\delta > 0$ пространство C есть объединение конечного числа открытых шаров радиуса δ;

локально компактным, если у каждой его точки есть окрестность, замыкание (п. 12.5-1, b) которой компактно.

Множество S в полном метрическом пространстве C является полным метрическим подпространством C (см. также п. 12.5-1, а) *в том и только в том случае, если S замкнуто. Для того чтобы метрическое пространство C было компактно, необходимо и достаточно,* **чтобы оно было полным и вполне ограниченным**, *а для того чтобы оно было вполне ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы любое бесконечное его подмножество содержало последовательность Коши.*

Всякое конечномерное нормированное пространство является сепарабельным и полным (см. также п. 14.2-7). *Любой замкнутый шар в нем компактен, и потому такое пространство локально компактно.*

(b) Понятия, введенные в пп. 12.5-2—12.5-4, а, дают удобную терминологию для многих задач, касающихся приближения произвольного элемента x подходящего класса C последовательностью элементов $x_0, x_1, x_2, \ldots$ из C. В таких случаях $d(x_n, x)$ измеряет *погрешность приближения*.

Примеры. Важные приложения имеет приближение функции $f(t)$ последовательностью функций $s_0(t), s_1(t), s_2(t), \ldots$ (частичные суммы бесконечного ряда). Если дано пространство C функций $f(t), g(t), \ldots$, непрерывных в интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$, то можно использовать метрики:

$$d_1(f, g) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t) - g(t)|$$

(*максимальная погрешность* — ведет к определению *равномерной сходимости*, п. **4. 4-4**);

$$d_2(f, g) = \int_0^1 |f(\tau) - g(\tau)|^2 \, d\tau$$

(*средняя квадратическая погрешность* — ведет к определению *сходимости в среднем* с показателем 2 и к приближениям по методу *наименьших квадратов*) и другие. С топологией, определяемой метрикой $d_1(f, g)$, C есть полное и сепарабельное пространство; счетное множество S многочленов с рациональными коэффициентами всюду плотно в C и годится, таким образом, для приближений (см. также п. 4.7-3).

(c) *Компактное метрическое пространство бикомпактно* (см. п. 12.5-1, b). *В любом компактном метрическом пространстве C:*

1) *всякое бесконечное множество имеет по крайней мере одну предельную точку;*

2) *если S — произвольное замкнутое множество и A — произвольное семейство открытых множеств пространства C, объединение которых содержит S* (**покрытие** *множества S*), *то уже некоторое конечное число множеств из семейства A образует покрытие множества S.*

Всякое ограниченное замкнутое подмножество евклидова пространства компактно. Поэтому теоремы 1 и 2, в частности, применимы к ограниченным замкнутым множествам действительных и комплексных чисел и к таким же множествам в двух- и трехмерном евклидовом пространстве. Они называются в этом случае соответственно *теоремой Больцано — Вейерштрасса* и *теоремой Гейне — Бореля о выделении конечного покрытия.*

12.5-5. Примеры: пространства числовых последовательностей и функций. Понятия, введенные в пп. 12.5-2—12.5-4, обеспечивают четкую и стимулирующую терминологию для многих задач, касающихся *приближения* произвольного элемента подходящего класса C некоторой последовательностью элементов $x_1, x_2, \ldots$ из C. В таком случае расстояние $d(x_n, x)$ измеряет *погрешность приближения* или степень того, насколько система, характеризуемая последовательностью $x_1, x_2, \ldots$, отклоняется от требуемого результата x.

В таблицах 12.5-1 и 12.5-2 приведено несколько примеров топологических пространств. Особенно важные приложения касаются приближения некоторой функции $f(t)$ последовательностью функций $s_1(t), s_2(t), \ldots$, являющейся, например, последовательностью частичных сумм какого-либо бесконечного ряда (см. также пп. 4.7-3, 5.3-11, 13.2-1, 13.2-11, 14.2-7 и 15.2-2).

Таблица 12.5-1

Некоторые пространства числовых последовательностей

$$x \equiv (\xi_1, \xi_2, \ldots),\ y \equiv (\eta_1, \eta_2, \ldots)$$

Обычное обозначение	Определение	Расстояние $d(x, y)$	Замечания
m	Ограниченные последовательности действительных чисел	$\sup\limits_k \lvert \xi_k - \eta_k \rvert$	Полное, не сепарабельное
c	Сходящиеся последовательности действительных чисел	$\sup\limits_k \lvert \xi_k - \eta_k \rvert$	Все полные и сепарабельные
l^2	Последовательности комплексных чисел, для которых сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lvert \xi_k \rvert^2$	$\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lvert \xi_k - \eta_k \rvert^2\right]^{1/2}$	
l^p	Последовательности комплексных чисел, для которых сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lvert \xi_k \rvert^p$ $(p = 1, 2, \ldots)$	$\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lvert \xi_k - \eta_k \rvert^p\right]^{1/p}$	

Таблица 12.5-2

Некоторые пространства функций $x(t)$, $y(t)$

(см. также пп. 14.2-7, 15.2-2 и 18.10-9; определения легко распространяются на функции двух или более переменных)

Обычное обозначение	Определение	Расстояние	Замечания
$F[0, 1]$	Действительные функции, определенные на $[0, 1]$	Метрики не существует. Топология определяется поточечной сходимостью	
$C[0, 1]$	Непрерывные действительные функции, определенные на $[0, 1]$	$\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \lvert x(t) - y(t) \rvert$	Полное; сепарабельное (п. 4.7-3); равномерная сходимость
$L^2(a, b)$	Комплексные функции, для которых интеграл $\int\limits_a^b \lvert x(t) \rvert^2 dt$ существует в смысле Лебега (п 4.6-15)	$\left[\int\limits_a^b \lvert x(t) - y(t) \rvert^2 dt\right]^{1/2}$	Полные (п. 15.2-2); сепарабельные, даже когда интервал (a, b) не ограничен; сходимость в среднем
$L^p(a, b$	Комплексные функции, для которых интеграл $\int\limits_a^b \lvert x(t) \rvert^p dt$ существует в смысле Лебега $(p = 1, 2, \ldots)$	$\left[\int\limits_a^b \lvert x(t) - y(t) \rvert^p dt\right]^{1/p}$	
$\tilde{L}^2$	Комплексные функции, для которых существует предел $\lim\limits_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \times \int\limits_{-T/2}^{T/2} \lvert x(t) \rvert^2 dt$, причем интегралы понимаются в смысле Лебега [1])	$\left[\lim\limits_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \lvert x(t) - y(t) \rvert^2 dt\right]^{1/2}$	Полное, не сепарабельное

[1]) Точками пространств $L^2(a, b)$, $L^p(a, b)$ и $\tilde{L}^2$ являются не сами функции, а классы функций; в каждый такой класс входят функции, совпадающие почти всюду (см. п. 4.6-14, b).

12.5-6. Теорема Банаха о сжатых отображениях и последовательные приближения. *Пусть $x'=f(x)$ — любое отображение замкнутого множества S полного метрического пространства C в себя, удовлетворяющее для всех x, y из S условию*

$$d[f(x),\ f(y)] \leqslant \alpha\, d(x,\ y), \tag{12.5-2}$$

где α — некоторое положительное число, меньшее, чем единица («сжатое отображение»). Тогда множество S содержит единственную **неподвижную точку** x_j **отображения** f, *для которой*

$$f(x_j)=x_j. \tag{12.5-3}$$

Кроме того, решение x_j уравнения (3) *является пределом всякой последовательности точек*

$$x_{n+1}=f(x_n) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \dots) \tag{12.5-4}$$

для произвольной начальной точки x_0 из S. Скорость сходимости приближающей последовательности оценивается по формуле

$$d(x_n,\ x_j) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(x_1,\ x_0) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \dots). \tag{12.5-5}$$

Теорема Банаха (принцип сжатых отображений) служит мощным методом установления сходимости в обширной области применения аппарата приближений (пп. 20.2-1, 20.2-6 и 20.3-5).

12.6. ПОРЯДОК

12.6-1. Частично упорядоченные множества.

(a)* **Порядок.** Класс S объектов (элементов) a, b, c, ... называется **частично упорядоченным** множеством, если между некоторыми парами его элементов a, b определено **отношение порядка** (правило предшествования) $a \leqslant b$ такое, что

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \text{из } a\leqslant b \text{ и } b\leqslant c \text{ следует } a\leqslant c\ (\textit{транзитивность}),\\ 2)\ a\leqslant a\ (\textit{рефлексивность}). \end{array}\right\} \tag{12.6-1}$$

Если $a\leqslant b$ и $a\neq b$, то пишут $a<b$. Часто, кроме того, предполагается, что

3) из $a\leqslant b$ и $b\leqslant a$ следует $a=b$ [1]) (*антисимметричность*). (12.6-1*a*)

Для любого подмножества частично упорядоченного множества, так же как в п. 4.3-3, можно определить понятия **верхней границы, нижней границы, точной нижней границы, точной верхней границы, наибольшего и наименьшего элементов.** *Если частично упорядоченное множество удовлетворяет условию* 3), *то точная верхняя (точная нижняя) граница любого его подмножества, если она существует, единственна.*

Частично упорядоченное множество называется **полным** (**полной структурой**), если в нем выполняется условие 3) и если каждое непустое его подмножество имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы. Частично упорядоченное множество называется **условно полным**, если в нем выполняется условие 3) и если каждое непустое его подмножество, имеющее верхнюю границу (ограниченное сверху), имеет и точную верхнюю границу. Последнее условие выполняется в том и только в том случае, если каждое непустое его подмножество, имеющее нижнюю границу (ограниченное снизу), имеет и точную нижнюю границу.

(b) **Структуры.** Частично упорядоченное множество называется **структурой**, если в нем выполняется условие 3) п. 12.6-1, а и если у каждой пары a, b его элементов имеется (необходимо единственная) точная верхняя граница $\sup(a,\ b)$ и (необходимо единственная) точная нижняя граница $\inf(a,\ b)$. В каждой структуре можно определить «сумму» $a+b\equiv\sup(a,\ b)$ и «произведение» $ab=\inf(a,\ b)$ любых двух элементов. *Так определенные сумма и произведение обладают свойствами* 1, 2, 3, 5, 6 булевых алгебр, перечисленными в п. 12.8-1.

12.6-2. Линейно упорядоченные множества.

Класс S элементов a, b, c, ... называется **линейно (просто, совершенно) упорядоченным множеством (цепью)**, если в нем определено отношение порядка, удовлетворяющее условиям 1), 2)

---

[1]) Некоторые авторы это условие формулируют в виде: «$a<b$ исключает $b<a$».

и 3) п. 12.6-1, и, кроме того, условию, что для любой пары a, b различных элементов множества S либо $a < b$, либо $b < a$.

Линейно упорядоченное множество S называется **вполне упорядоченным множеством**, если всякое непустое его подмножество имеет наименьший элемент.

12.6-3*. Упорядоченные поля (см. также пп. 1.1-5 и 12.3-1).

(a) Коммутативное поле K называется **упорядоченным полем**, если некоторые его элементы называются положительными (> 0) и если выполняются условия:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1) для всякого элемента } a \in K \text{ имеет место одно и только} \\ \text{одно из трех отношений: } a > 0,\ a = 0,\ -a > 0; \\ \text{2) из } a > 0 \text{ и } b > 0 \text{ следует } a + b > 0 \text{ и } ab > 0. \end{array}\right\} \quad (12.6\text{-}2)$$

Если $-a > 0$, то элемент a называют отрицательным и пишут $a < 0$. Если положить $a > b$, когда $a - b > 0$, то поле становится линейно упорядоченным множеством (п. 12.6-2).

(b) *Всякое условно полное* (п. 12.6-1, a) *упорядоченное поле изоморфно (по сложению и умножению) полю действительных чисел. Любая упорядоченная область целостности, множество положительных элементов который вполне упорядочено* (п. 12.6-2), *изоморфна кольцу целых чисел.*

12.7. КОМБИНАЦИИ МОДЕЛЕЙ: ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ПРЯМАЯ СУММА

12.7-1. Декартово произведение. Пусть C_1, C_2, ... — некоторые классы объектов. В пп. 12.7-1 — 12.7-5 рассматривается новый класс C, элементы которого представляют собой всевозможные упорядоченные множества $\{a_1, a_2, \ldots\}$ объектов a_1, a_2, ..., взятых соответственно из классов C_1, C_2, ... По определению $\{a_1, a_2, \ldots\} = \{b_1, b_2, \ldots\}$ в том и только в том случае, если $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ... Класс C называется **декартовым произведением** классов C_1, C_2, ... *Этот метод комбинирования математических объектов в более сложные математические объекты ассоциативен*:

$$\{a_1, \{a_2, a_3\}\} \equiv \{\{a_1, a_2\}, a_3\} \equiv \{a_1, a_2, a_3\}. \quad (12.7\text{-}1)$$

Остается связать операции в C с операциями в C_1, C_2, ...

12.7-2. Прямое произведение групп (см. также п. 12.2-1). **Прямым произведением** $G = G_1 \otimes G_2$ **двух групп** G_1 и G_2 называется группа, образованная всеми упорядоченными парами $\{a_1, a_2\}$, где a_1 — любой элемент группы G_1, а a_2 — любой элемент группы G_2 с умножением, определяемым формулой

$$\{a_1, a_2\}\{b_1, b_2\} \equiv \{a_1 b_1, a_2 b_2\}. \quad (12.7\text{-}2)$$

Порядок группы G равен произведению порядков групп G_1 и G_2. Группа G имеет единицу $E = \{E_1, E_2\}$, где E_1 и E_2 — единицы соответственно в G_1 и в G_2. Если у групп G_1 и G_2 нет общих элементов, то $\{a_1, a_2\}$ можно записывать как **внешнее произведение** $a_1 a_2$, причем $a_1 E_2 \equiv a_1$, $E_1 a_2 \equiv a_2$ и G_1 и G_2 — подгруппы в G.

Примеры. Любая скалярная величина в физике является внешним произведением числа и единицы измерения. Выражения вида *работа = массе × ускорение × перемещение* — тоже внешние произведения.

12.7-3. Прямое произведение действительных векторных пространств (см. также пп. 12.4-1, 14.2-1 и 14.2-4). **Прямым произведением** $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2$ **двух действительных векторных пространств** $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ называется действительное векторное пространство, образованное всеми упорядоченными парами (внешними произведениями) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} \equiv \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$, где $\mathbf{a}_1$ — любой элемент из $\mathcal{U}_1$, а $\mathbf{a}_2$ — любой элемент из $\mathcal{U}_2$ с векторным сложением и умножением векторов на скаляры, определяемыми формулами

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2) \equiv \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2,\ (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1)\,\mathbf{a}_2 \equiv \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1\mathbf{a}_2, \\ \alpha\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \equiv (\alpha\mathbf{a}_1)\,\mathbf{a}_2 \equiv \mathbf{a}_1(\alpha\mathbf{a}_2). \end{array}\right\} \quad (12.7\text{-}3)$$

Линейная размерность векторного пространства $\mathscr{U}$ равна произведению линейных размерностей пространств $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$.

Пример. Построение тензоров как внешних произведений векторов приведено в пп. 16.3-6, 16.6-1 и 16.9-1.

12.7-4. Топологическое произведение (см. также п. 12.5-1). **Топологическое произведение** двух топологических пространств C_1 и C_2 есть их декартово произведение с топологией (семейством открытых множеств), определяемой следующим образом: открытое множество есть декартово произведение любых двух множеств S_1 и S_2, где S_1 — открытое множество в C_1, а S_2 — открытое множество в C_2.

12.7-5. Прямая сумма.

(a) **Прямой суммой** $\mathscr{U}' = \mathscr{U}_1 \oplus \mathscr{U}_2$ **двух векторных пространств** $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$, взятых над одним и тем же кольцом скаляров R, называется векторное пространство, образованное всеми парами $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$, где $\mathbf{a}_1$ — любой элемент из $\mathscr{U}_1$, а $\mathbf{a}_2$ — любой элемент из $\mathscr{U}_2$, с векторным сложением и умножением векторов на скаляры α из R, определяемыми формулами

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] + [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] \equiv [\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2], \qquad \alpha [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \equiv [\alpha \mathbf{a}_1, \alpha \mathbf{a}_2]. \tag{12.7-4}$$

Размерность пространства $\mathscr{U}'$ равна сумме размерностей пространств $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$. Если $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$ не имеют общих элементов, то можно писать $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \equiv \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ и пространства $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$ являются тогда подпространствами $\mathscr{U}'$. *Каждое линейное векторное пространство размерности большей, чем единица, может быть представлено в виде прямой суммы его непересекающихся подпространств.*

(b) **Прямой суммой** $R' = R_1 \oplus R_2$ **двух колец** R_1 **и** R_2 называется кольцо, образованное всеми упорядоченными парами (часто называемыми прямыми суммами) $[a_1, a_2]$ со сложением и умножением, определяемыми формулами

$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] \equiv [a_1 + b_1, a_2 + b_2], \qquad [a_1, a_2][b_1, b_2] \equiv [a_1 b_1, a_2 b_2] \tag{12.7-5}$$

(c) **Прямая сумма двух линейных алгебр** (п. 12.4-2) есть линейная алгебра из упорядоченных пар со сложением, умножением и умножением на скаляр, определяемыми формулами (4) и (5).

12.8. БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

12.8-1. Булевы алгебры. Булевой алгеброй называется класс $\mathscr{S}$ объектов A, B, C, ..., в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (*логические*) *сложение* и *умножение*, со следующими свойствами:

(a) Для всех A, B, C из $\mathscr{S}$

1) $\mathscr{S}$ содержит $A+B$ и AB (*замкнутость*);

2) $A+B=B+A$, $AB=BA$ (*коммутативные законы*);

3) $A+(B+C)=(A+B)+C$, $A(BC)=(AB)C$ (*ассоциативные законы*);

4) $A(B+C)=AB+AC$, $A+BC=(A+B)(A+C)$ (*дистрибутивные законы*);

5) $A+A=AA=A$ (*свойства идемпотентности*);

6) $A+B=B$ в том и только в том случае, если $AB=A$ (*свойство совместимости*).

(b) Кроме того,

7) $\mathscr{S}$ содержит элементы I и 0 такие, что для всякого элемента A из $\mathscr{S}$

$$A+0=A, \quad AI=A, \quad A0=0, \quad A+I=I;$$

8) для каждого элемента A класс $\mathfrak{S}$ содержит элемент $\tilde{A}$ (**дополнение** элемента A, часто обозначаемое символами $\tilde{A}$ или $I-A$) такой, что

$$A+\tilde{A}=I, \quad A\tilde{A}=0.$$

В каждой булевой алгебре

$$A(A+B)\equiv A+AB\equiv A \text{ (законы поглощения)}, \tag{12.8-1}$$

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{(A+B)}\equiv\tilde{A}\tilde{B},\\ \widetilde{(AB)}\equiv\tilde{A}+\tilde{B}\end{aligned}\right\} \text{(двойственность, законы де Моргана)}, \tag{12.8-2}$$

$$\tilde{\tilde{A}}\equiv A, \quad \tilde{I}=0, \quad \tilde{0}=I, \tag{12.8-3}$$

$$A+\tilde{A}B\equiv A+B, \quad AB+AC+B\tilde{C}\equiv AC+B\tilde{C}. \tag{12.8-4}$$

Если $A+B=B$, то вместо $\tilde{A}B$ можно писать $B-A$ (*дополнение A до B*). Элементы $A, B, C, \ldots$ булевой алгебры называются **дизъюнктными**, если попарные произведения любых элементов этого множества равны 0.

Символы $\cup$ и $\cap$, используемые в пп. 4.3-2, а, 12.8-5, b и 18.2-1 для обозначения объединения и пересечения множеств и событий, часто употребляются и для обозначения логического сложения и умножения в любой булевой алгебре, причем вместо $A+B$ пишут $A\cup B$, а вместо AB пишут $A\cap B$.

12.8-2. Булевы функции. Приведение к каноническому виду. Если даны n **булевых переменных** $X_1, X_2, \ldots, X_n$, каждое из которых может быть равно любому элементу данной булевой алгебры, то **булевой функцией**

$$Y=F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

называется выражение, получаемое из $X_1, X_2, \ldots, X_n$ путем сложения, умножения и взятия дополнения.

В каждой булевой алгебре существует ровно $2^{(2^n)}$ *различных булевых функций n переменных*. Из соотношений п. 12.8-1 следует

$$\tilde{F}(X, Y, \ldots, +, \cdot)\equiv F(\tilde{X}, \tilde{Y}, \ldots, \cdot, +), \tag{12.8-5}$$

$$\begin{aligned}F(X, \tilde{X}, Y, \ldots)&\equiv XF(I, 0, Y, \ldots)+\tilde{X}F(0, I, Y, \ldots)\equiv\\ &\equiv[X+F(0, I, Y, \ldots)][\tilde{X}+F(I, 0, Y, \ldots)],\end{aligned} \tag{12.8-6}$$

$$\left.\begin{aligned}XF(X, \tilde{X}, Y, \ldots)\equiv XF(I, 0, Y, \ldots),\\ X+F(X, \tilde{X}, Y, \ldots)\equiv X+F(0, I, Y, \ldots).\end{aligned}\right\} \tag{12.8-7}$$

(b) *Всякая булева функция либо тождественно равна* 0, *либо может быть единственным образом представлена в виде суммы* **одночленов** $Z_1Z_2\ldots Z_n$, *где Z_i равно или X_i, или $\tilde{X}_i$* (*канонический вид булевой функции*, геометрическую иллюстрацию см. на рис. 12.8-1). Булеву функцию $Y=F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ можно привести к каноническому виду следующим образом:

1) пользуясь равенством (2), разложить дополнения к суммам и произведениям;

2) с помощью первого дистрибутивного закона свести функцию $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ к сумме произведений;

3) с помощью тождеств $X_iX_i\equiv X_i$ и $X_i\tilde{X}_i\equiv 0$ и равенств (4) упростить полученное выражение;

4) если какой-либо член f не содержит одной из переменных, например X_i, то переписать f в виде $fX_i+f\tilde{X}_i$.

Во многих приложениях может оказаться полезным опустить шаг 4) и, продолжив шаг 3), как можно больше упростить каждый член разложения.

Ввиду законов де Моргана (2) *каждую булеву функцию, не равную тождественно нулю, можно также единственным образом представить в виде*

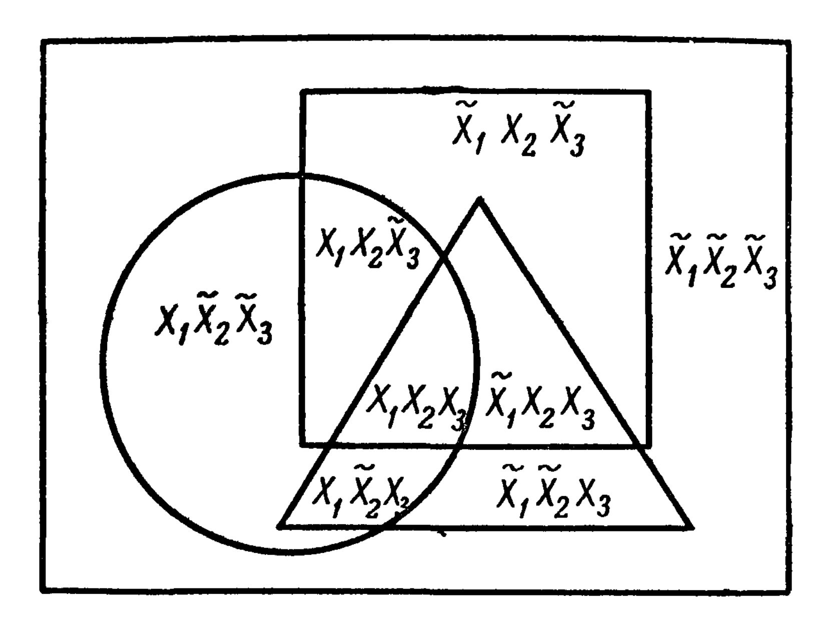


Рис. 12.8-1. Диаграмма Венна (диаграмма Эйлера). Диаграммы этого типа иллюстрируют отношения в алгебре классов (п. 12.8-5). Если прямоугольник, круг, квадрат и треугольник обозначить соответственно через I, X_1, X_2, X_3, то диаграмма показывает, что всякая булева функция от X_1, X_2, X_3 может быть представлена как объединение минимальных многочленов от X_1, X_2, X_3 (п. 12.8-2). Заметим, что имеется $2^3 = 8$ различных одночленов.

произведения сумм $Z_1' + Z_2' + \ldots + Z_n'$, *где* Z_i' *равно либо* X_i, *либо* $\tilde{X}_i$. Всего имеется 2^n таких сумм.

Примеры:

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{(AB+CD)} &= (\tilde{A}+\tilde{B})(\tilde{C}+\tilde{D}) = \tilde{A}\tilde{C}+\tilde{A}\tilde{D}+\tilde{B}\tilde{C}+\tilde{B}\tilde{D}, \\ \widetilde{(A+B)(C+D)} &= \tilde{A}\tilde{B}+\tilde{C}\tilde{D} = (\tilde{A}+\tilde{C})(\tilde{A}+\tilde{D})(\tilde{B}+\tilde{C})(\tilde{B}+\tilde{D}). \end{aligned}\right\} \quad (12.8\text{-}8)$$

12.8-3. Отношение включения (см. также п. 12.6-1).

(a) *Равенство* $A+B=B$, *или* $AB=A$, *эквивалентно рефлексивному отношению частичного упорядочения* $A \leqslant B$ [или $B \geqslant A$; **(логическое) отношение включения**].

(b) *Во всякой булевой алгебре из* $A \leqslant B$ *и* $B \leqslant A$ *следует* $A = B$ *и*

$$A + B \equiv \sup (A, B), \quad AB = \inf (A, B), \qquad (12.8\text{-}9)$$

где границы определяются отношением включения. Каждая булева алгебра является структурой (п. 12.6-1, b).

(c) *Если* A — *произвольный элемент булевой алгебры* $\mathcal{S}$, *то элементы* $XA \leqslant A$ *алгебры* $\mathcal{S}$ *образуют булеву алгебру, в которой* A *играет роль* I.

12.8-4. Алгебра классов. Подмножества (подклассы) A, B, ... любого множества (класса) I образуют булеву алгебру (**алгебру классов**) по отношению к операциям логического сложения (объединения), логического умножения (пересечения) и взятия дополнения, определенного в п. 4.3-2, а. Пустое множество (или любое множество, не содержащее ни одного элемента из I) обозначают символом 0. Отношение $\leqslant$ (п. 12.8-3) превращается в логическое отношение включения $\subset$.

12.8-5. Изоморфизм булевых алгебр. Диаграммы Венна. *Две булевы алгебры с конечным числом элементов изоморфны* (*по отношению к сложению, умножению и взятию дополнения*, п. 12.1-6) *в том и только в том случае, если они имеют одно и то же число элементов. Всякая булева алгебра изоморфна некоторой алгебре классов* (п. 12.8-4). *Диаграммы Венна* (*диаграммы Эйлера*), подобные диаграмме, изображенной на рис. 12.8-1, наглядно иллюстрируют свойства булевых алгебр с помощью алгебры классов.

12.8-6. Алгебры событий и символическая логика. Алгебры событий служат моделями для комбинирования событий (должным образом определенных исходов идеализированных экспериментов; см. п. 18.2-1). Если E_1, E_2, ... — такие события, то

$E_1 \cup E_2$ — событие (предложение) E_1 **или** E_2 (или и то, и другое, **не исключающее или**),

$E_1 \cap E_2$ — событие (предложение) E_1 **и** E_2,

$\tilde{E}$ — событие (предложение) **не** E,

I — достоверное событие (объединение всех возможных исходов, п. 18.2-1),

0 — невозможное событие.

В двузначной (аристотелевой) логике алгебра гипотетических событий (**логических высказываний, утверждений**) E связана с более простой булевой алгеброй **значений истинности** $T[E]$, равных или 1 (E **истинно**) или 0 (E **ложно**), гомоморфизмом (п. 12.1-6):

$$T[I]=1, \qquad T[0]=0,$$
$$T[E_1 \cup E_2]=T(E_1)+T(E_2), \qquad T[E_1 \cap E_2]=T[E_1]\,T[E_2],$$
$$T[\tilde{E}]=\widetilde{T[E]}. \tag{12.8-10}$$

На основании этих предложений высказывание E либо истинно, либо ложно (*закон исключенного третьего*), и значение истинности любого высказывания E,

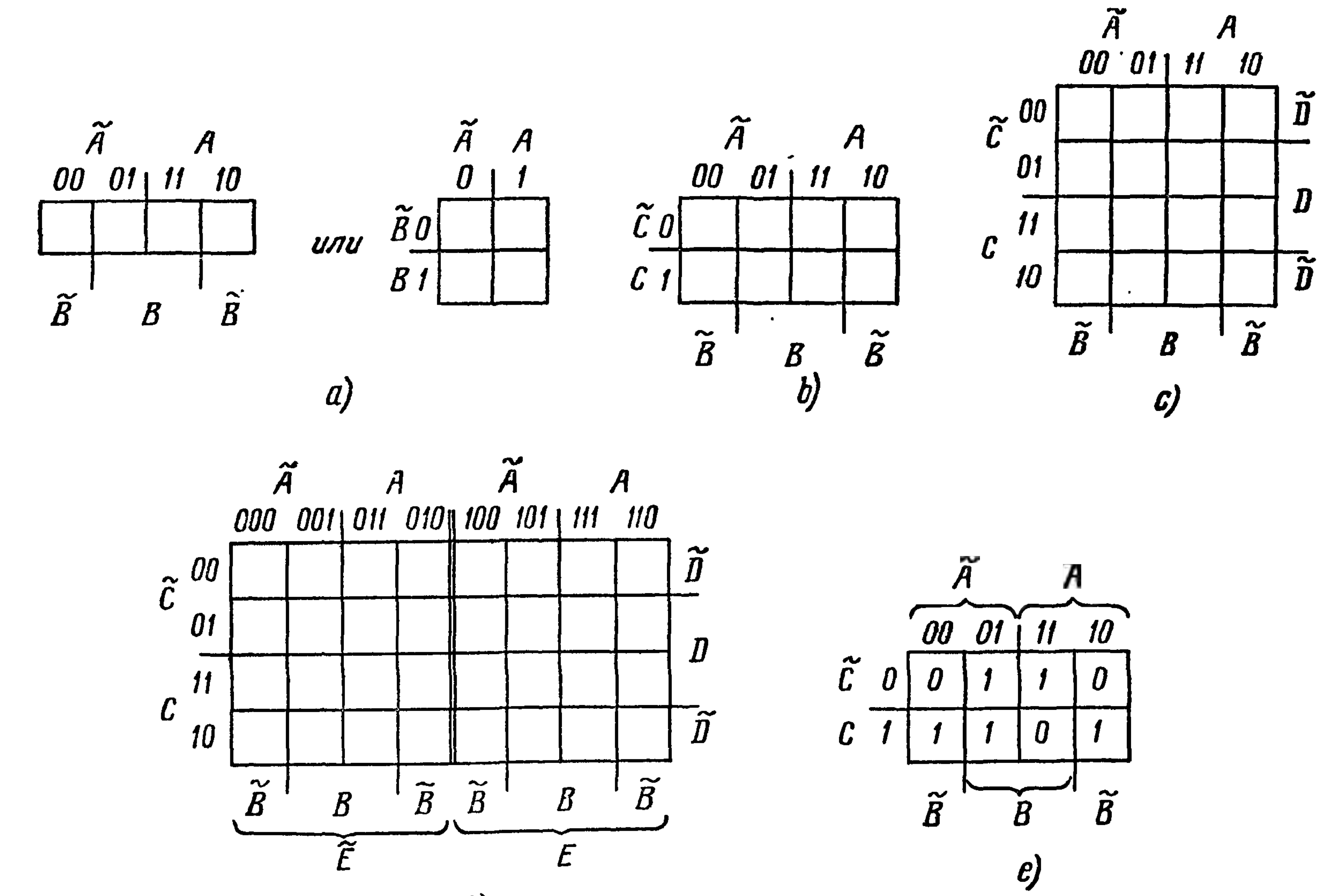


Рис. 12.8-2. Карты Карно *a*) — *d*) соответственно для двух, трех, четырех и пяти булевых переменных и *e*) карта для функции из табл. 12.8-1 от трех переменных.

представимого как булева функция $F(E_1, E_2, \ldots)$ от множества событий E_1, E_2, ... (логически связанного с этим множеством), дается формулой

$$T[E]=T[F(E_1, E_2, \ldots)]=F(T[E_1], T[E_2], \ldots), \tag{12.8-11}$$

где

$$\left.\begin{array}{lll} 0+0=0, & 0+1=1, & 1+1=1, \\ 0\cdot 0=0, & 0\cdot 1=0, & 1\cdot 1=1, \\ \tilde{0}=1, & \tilde{1}=0. & \end{array}\right\} \tag{12.8-12}$$

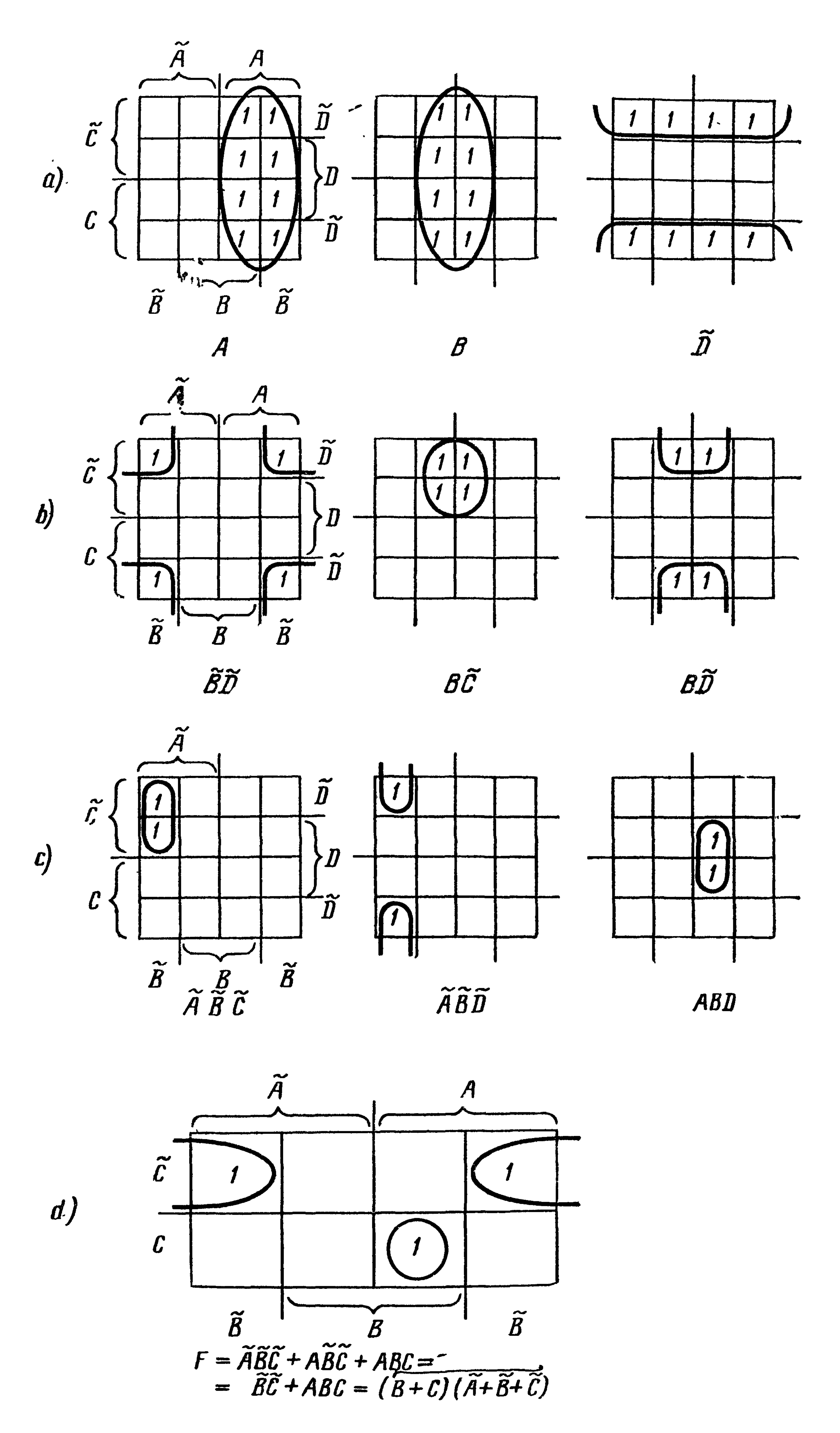


Рис. 12.8-3. Логическое упрощение с помощью карты Карно.

12.8-7. Представление булевых функций истинностными таблицами. Карты Карно. Если задана система булевых переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$, каждая из которых может принимать значения 0 или 1 (п. 12.8-6), то всякая из $2^{(2^n)}$ булевых функций

$$Y = F(X_1, X_2 \ldots, X_n)$$

однозначно определяется соответствующей **истинностной таблицей** (таблица 12.8-1), в которой указаны значения данной функции для всех возможных аргументов. В таблице

Таблица 12.8-1

Истинностная таблица для булевой функции

$$F = \tilde{X}\tilde{Y}Z + \tilde{X}Y\tilde{Z} + \tilde{X}YZ + X\tilde{Y}Z + XY\tilde{Z} = (X+Y+Z)(\tilde{X}+Y+Z)(\tilde{X}+\tilde{Y}+Z)$$

X	Y	Z	F	Соответствующий одночлен	X	Y	Z	F	Соответствующий одночлен
0	0	0	0	$\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z} = m_0$	1	0	0	0	$X\tilde{Y}\tilde{Z} = m_4$
0	0	1	1	$\tilde{X}\tilde{Y}Z = m_1$	1	0	1	1	$X\tilde{Y}Z = m_5$
0	1	0	1	$\tilde{X}Y\tilde{Z} = m_2$	1	1	0	1	$XY\tilde{Z} = m_6$
0	1	1	1	$\tilde{X}YZ = m_3$	1	1	1	0	$XYZ = m_7$

12.8-1 указано также обычное расположение соответствующих одночленов (п. 12.8-2); каждому одночлену ставится в соответствие двоичное число, определяемое порядком нулей и единиц относительно X, Y, Z. Функция F равна булевой сумме тех одночленов, для которых в этой таблице указано значение функции 1.

Карта Карно — это диаграмма Венна (п. 12.8-5), состоящая из правильно расположенных квадратов, каждый из которых соответствует одному из 2^n одночленов, порожденных n переменными (рис. 12.8-2). Значения данной функции F из истинностной таблицы вносят в нужные квадраты; тогда функция F равна сумме всех одночленов, для которых в соответствующих квадратах стоит единица. Для функций, пожалуй, до шести переменных карта Карно позволяет удобным образом перегруппировать эти одночлены в объединения и пересечения так, чтобы минимизировать, скажем, число логических сложений, умножений и/или взятия дополнений. Это полезно для экономного конструирования схем электронных вычислительных машин (рис. 12.8-3).

12.8-8. Полная аддитивность. Алгебры меры (см. также пп. 18.2-1 и 18.2-2). Многие алгебры классов и алгебры событий требуют распространения определяющих постулатов на объединения и пересечения бесконечного множества членов (т. е., строго говоря, выхода за пределы собственно алгебры, п. 12.1-2).

Булева алгебра $\mathcal{S}$ называется **вполне аддитивной**, если каждая бесконечная сумма $A_1 + A_2 + \ldots$ единственным образом определена как элемент $\mathcal{S}$. Вполне аддитивная булева алгебра $\mathcal{S}$ называется **алгеброй меры**, если существует действительная функция (мера) $M(A)$, определенная для всех элементов $A \in \mathcal{S}$ и такая, что

1) $M(A) \geqslant 0$,
2) $M(0) = 0$,
3) $M(A_1 + A_2 + \ldots) = M(A_1) + M(A_2) + \ldots$ для любого конечного или счетного множества элементов $A_1, A_2, \ldots$, удовлетворяющего условию: $A_iA_k = 0$ при $i \neq k$.

Примеры мер: Мощность конечного множества (п. 4.2-3), длина, площадь, объем, меры Лебега и Стилтьеса (пп. 4.6-14, 4.6-17), значение истинности (п. 12.8-6), вероятность (п. 18.2-2).

ГЛАВА 13

МАТРИЦЫ, КВАДРАТИЧНЫЕ И ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ

13.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Аппарат матриц позволяет *более просто представлять различные математические и физические операции с помощью числовых операций над элементами матриц.*

Для большей легкости ссылок в пп. 13.2-1 — 13.4-7 алгебра матриц и матричное исчисление вводятся как независимый объект, а в гл. 14 описывается применение матриц для представления *векторов, линейных преобразований* (*линейных операторов*) и *скалярного произведения.*

В пп. 13.5-1 — 13.5-6 подобным же образом *квадратичные* и *эрмитовы формы* вводятся с точки зрения алгебры; их значение для представления *скалярного произведения* выясняется в пп. 14.7-1 и 14.7-2.

13.2. АЛГЕБРА МАТРИЦ И МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

13.2-1. Прямоугольные матрицы.

(а) Если собираются воспользоваться какой-либо из «матричных операций», определяемых в п. 13.2-2, то таблицу

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv [a_{ik}] \qquad (13.2\text{-}1)$$

«скаляров» a_{ik}, взятых из коммутативного поля F (п. 12.3-1), называют **(прямоугольной) матрицей размера** $m \times n$ над полем F. Элементы a_{ik} называются **элементами матрицы**; элемент a_{ik} расположен в i-й **строке** и в k-м **столбце** матрицы (1); m есть число строк, а n — число столбцов. Матрица **конечна**, если она имеет конечное число строк и конечное число столбцов; в противном случае она **бесконечна**.

Матрица (1) над полем комплексных чисел **ограничена**, если она имеет конечную **норму**. Вот типичное определение нормы матрицы

$$\| A \| \equiv \sup \left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \eta_k \right| \qquad \left(\sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^2 = 1 \right) \qquad (13.2\text{-}2)$$

(см. также табл. 13.2-1 и п. 14.4-1). *Конечная матрица над полем комплексных чисел всегда ограничена.*

В этом справочнике все матрицы предполагаются конечными матрицами над полем комплексных чисел *). Матрица $A \equiv [a_{ik}]$ называется **действительной**, если все ее элементы a_{ik} — действительные числа.

*) Бесконечные матрицы рассматриваются, например, в [13.1].

Таблица 13.2-1

Некоторые нормы матриц

(n и/или m могут быть и бесконечными; см. также пп. 12.5-5 и 14.4-1)

(a) **Прямоугольные матрицы размера** $m \times n$ $A \equiv [a_{ik}]$ $(m,\ n > 1)$

$$\| A \| \equiv \sup \left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \eta_k \right| \qquad \left(\sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^2 = 1 \right)$$

$$\| A \|_{\mathrm{I}} \equiv \sup_k \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}|, \qquad \| A \|_{\mathrm{II}} \equiv \sup_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$$

$$\| A \|_p \equiv \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^p \right)^{1/p} \qquad (p = 1,\ 2,\ \ldots)$$

$$\| A \|_1 \equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$$

$$\| A \|_2 \equiv \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right)^{1/2} \text{ (евклидова норма).}$$

(b) **Столбцы** $x \equiv \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{bmatrix}$ **или строки** $\tilde{x} \equiv (\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$

$$\| x \|_p \equiv \| \tilde{x} \|_p \equiv \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \qquad (p = 1,\ 2,\ \ldots)$$

$$\| x \|_1 \equiv \| \tilde{x} \|_1 \equiv \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|$$

$$\| x \|_2 \equiv \| \tilde{x} \|_2 \equiv \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \right)^{1/2} \text{ (евклидова норма)}$$

$$\| x \|_\infty = \| \tilde{x} \|_\infty \equiv \sup |\xi_k| .$$

(c) **Соотношения.** Для каждой нормы выполняются соотношения

$$\| A + B \| \leqslant \| A \| + \| B \|, \qquad \| \alpha A \| = |\alpha|\, \| A \|, \qquad \| AB \| \leqslant \| A \|\, \| B \| .$$

В частности,

$$\| Ax \|_2 \leqslant \| A \|_2\, \| x \|_2 .$$

(b) Матрица размера $n\times 1$ называется **столбцом**, а матрица размера $1\times n$ — **строкой**. Будут применяться следующие обозначения:

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \cdots\\ \xi_n\end{pmatrix}\equiv\{\xi_i\}\equiv x, \qquad \left.\begin{array}{l}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\equiv[\xi_k]\equiv x',\\ (\bar\xi_1, \bar\xi_2, \ldots, \bar\xi_n)\equiv[\bar\xi_k]=x^*,\end{array}\right\} \qquad (13.2\text{-}3)$$

где $\bar\xi_k$ — комплексное число, сопряженное с ξ_k (см. также пп. 13.3-1, 14.5-1 и 14.5-2).

(c) Матрица размера $n\times n$ называется **квадратной матрицей порядка** n. Квадратная матрица $A\equiv[a_{ik}]$ называется:

треугольной (наддиагональной), если из $i>k$ следует $a_{ik}=0$,

строго треугольной, если из $i\geqslant k$ следует $a_{ik}=0$,

диагональной, если из $i\neq k$ следует $a_{ik}=0$,

мономиальной, если в каждой ее строке и в каждом столбце имеется лишь один элемент, отличный от нуля.

13.2-2. Основные операции. Операции над матрицами определяются с помощью операций над их элементами.

1. Две матрицы $A\equiv[a_{ik}]$ и $B\equiv[b_{ik}]$ размера $m\times n$ **равны** друг другу ($A=B$) в том и только в том случае, если $a_{ik}=b_{ik}$ для всех i и k (см. также п. 12.1-3).

2. **Сумма двух матриц** $A\equiv[a_{ik}]$ и $B\equiv[b_{ik}]$ размера $m\times n$ есть матрица размера $m\times n$

$$A+B\equiv[a_{ik}]+[b_{ik}]\equiv[a_{ik}+b_{ik}].$$

3. **Произведение матрицы** $A\equiv[a_{ik}]$ размера $m\times n$ **на скаляр** α есть матрица размера $m\times n$

$$\alpha A\equiv\alpha[a_{ik}]\equiv[\alpha a_{ik}].$$

4. **Произведение матрицы** $A\equiv[a_{ij}]$ размера $m\times n$ **на матрицу** $B\equiv[b_{jk}]$ размера $n\times r$ есть матрица $C\equiv[c_{ik}]$ размера $m\times r$

$$C=AB\equiv[a_{ij}][b_{jk}]\equiv[c_{ik}],$$

где

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}.$$

Таким образом, элемент c_{ik} матрицы $C=AB$ есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B. В каждом произведении матриц AB число n столбцов матрицы A должно равняться числу строк матрицы B (**форма** матриц A и B **должна быть согласованной**). Из существования произведения AB вовсе *не следует* существование произведения BA. Если существуют оба произведения AB и BA (это, в частности, будет всегда, если A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка), то, вообще говоря, $BA\neq AB$ (см. также п. 13.4-4). Отметим, что

$$\left.\begin{array}{ll}A+B=B+A, & A+(B+C)=(A+B)+C,\\ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A, & \alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B),\\ A(BC)=(AB)C, & \\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B, & (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,\\ A(B+C)=AB+AC, & (B+C)A=BA+CA,\end{array}\right\} \qquad (13.2\text{-}4)$$

$$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|,\ \|\alpha A\|=|\alpha|\,\|A\|,\ \|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|. \qquad (13.2\text{-}5)$$

13.2-3. Нулевая и единичная матрицы; обратные матрицы. Отметим следующие определения:

1. **Нулевая матрица** $[0]$ размера $m \times n$ есть матрица этого размера, все элементы которой равны нулю. Тогда

$$A + [0] = A, \quad 0A = [0], \quad [0]B = C[0] = [0],$$

где A — произвольная матрица размера $m \times n$, B — произвольная матрица, имеющая n строк, и C — произвольная матрица, имеющая m столбцов.

2. **Аддитивно обратная (противоположная)** матрица $-A$ для матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ размера $m \times n$ есть матрица размера $m \times n$

$$-A \equiv (-1)A \equiv [-a_{ik}];$$

тогда $A + (-A) \equiv A - A = [0]$.

3. **Единичная матрица** I порядка n есть диагональная матрица размера $n \times n$ с единичными диагональными элементами:

$$I \equiv [\delta_{ik}[, \qquad \text{где} \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases}$$

Тогда

$$IB = B, \quad CI = C,$$

где B — произвольная матрица, имеющая n строк, а C — произвольная матрица, имеющая n столбцов; для любой же квадратной матрицы A порядка n

$$IA = AI = A.$$

4. Квадратная матрица A называется **неособенной (невырожденной)**, если она имеет (необходимо единственную) **мультипликативно обратную** или просто *обратную* матрицу A^{-1}, определяемую условиями $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. В противном случае A — особенная (вырожденная) матрица.

Квадратная матрица $A \equiv [a_{ik}]$ порядка n является невырожденной в том и только в том случае, если $\det(A) \equiv \det[a_{ik}] \neq 0$; *в этом случае A^{-1} есть квадратная матрица того же порядка n:*

$$A^{-1} \equiv [a_{ik}]^{-1} \equiv \left[\frac{A_{ki}}{\det[a_{ik}]}\right],$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в определителе $\det[a_{ik}]$ (см. также пп. 1.9-2 и 14.5-3).

Квадратная матрица не вырождена в том и только в том случае, если ее строки (столбцы) линейно независимы.

Произведение двух невырожденных матриц и матрица, обратная невырожденной матрице, не вырождены; если A и B не вырождены и $\alpha \neq 0$, то

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}, \quad (A^{-1})^{-1} = A. \tag{13.2-6}$$

13.2-4. Целочисленные степени квадратных матриц. По определению $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, ..., и если A — невырожденная матрица,

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = (A^p)^{-1} \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Применимы обычные правила действий со степенями (см. также п. 14.3-6).

13.2-5. Матрицы как строительные блоки математических моделей. Из определений пп. 13.2-2 и 13.2-3 (конструктивные определения, п. 12.1-1) вытекают следующие результаты:

1. *Для любой пары натуральных чисел m и n класс всех матриц размера $m \times n$ над полем F есть mn-мерное векторное пространство над F* (пп. 12.4-1 и 14.2-4). В частности, строки или столбцы из n элементов образуют n-мерные векторные пространства (см. также п. 14.5-2).

2. *Класс всех квадратных матриц данного порядка n над полем F есть линейная алгебра порядка n^2 над F; вырожденные матрицы являются делителями нуля* (п. 12.4-2).

3. *Класс всех невырожденных квадратных матриц данного порядка n над полем F образует мультипликативную группу* (п. 12.2-1) *и вместе с нулевой матрицей размера $n \times n$ — алгебру с делением порядка n^2 над полем F* (п. 12.4-2).

Аналогичные теоремы справедливы и для ограниченных бесконечных матриц над полем действительных или комплексных чисел.

13.2-6. ✶ **Умножение на матрицы специального вида. Матрицы перестановки.** *Пусть A — произвольная квадратная матрица порядка n. Тогда*

1. Если B — матрица, полученная из единичной матрицы n-го порядка заменой числа 1 в i-й строке на комплексное число α, то *матрица AB получается из матрицы A умножением всех элементов i-го столбца на α.*

Матрица BA получается из матрицы A умножением всех элементов i-й строки на α.

2. Если C — матрица, полученная из единичной матрицы n-го порядка заменой недиагонального элемента $\delta_{ik} = 0$ на 1, то *матрица AC получается из матрицы A заменой k-го столбца на сумму k-го и i-го столбцов. Матрица CA получается из матрицы A заменой i-й строки на сумму i-й и k-й строк.*

3. Если D — *матрица перестановки*, получающаяся из единичной матрицы перестановкой каких-либо ее двух столбцов (или, что то же самое, двух ее строк с теми же номерами), то *матрица AD получается из матрицы A перестановкой соответствующих столбцов, а матрица DA перестановкой соответствующих строк.*

13.2-7. Ранг, след и определитель матрицы (см. также п. 14.3-2). **Ранг** данной матрицы A есть такое число $r \equiv r_A$, что по крайней мере один определитель r-го порядка (п. 1.5-1), получаемый из этой матрицы при удалении некоторых строк и/или столбцов, отличен от нуля, а все определители $(r+1)$-го порядка равны нулю. Ранг матрицы равен наибольшему числу линейно независимых строк (или столбцов). *Квадратная матрица A порядка n является невырожденной в том и только в том случае, если ее ранг $r = n$,* т. е. $\det(A) \neq 0$ (п. 13.2-3).

✶ Ранг суммы двух матриц не больше суммы их рангов: $r_{A+B} \leqslant r_A + r_B$.

Если матрица A имеет размеры $m \times n$, а матрица B — размеры $n \times q$, то для ранга матрицы AB имеют место неравенства

$$r_A + r_B - n \leqslant r_{AB} \leqslant \min(r_A, r_B) \quad \text{(неравенства Сильвестра).} \ ✶$$

След (шпур) матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ размера $n \times n$ есть сумма

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ее диагональных элементов *).

Для двух квадратных матриц A и B одного и того же порядка

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Tr}(A+B) &= \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B), & \operatorname{Tr}(\alpha A) &= \alpha \operatorname{Tr}(A), \\ \operatorname{Tr}(BA) &= \operatorname{Tr}(AB), & \operatorname{Tr}(AB - BA) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{13.2-7}$$

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B). \tag{13.2-8}$$

13.2-8. Разбиение матриц. Матрица, имеющая более чем одну строку и столбец, прямыми, проведенными между строками и/или столбцами, может быть разбита на меньшие прямоугольные **подматрицы**. *Две соответствующим образом разбитые матрицы A и B размера $n \times n$ можно перемножить, пользуясь входящими в них прямоугольными подматрицами как элементами в обычной формуле произведения матриц* (п. 13.2-2); *получающиеся таким путем элементы произведения являются подматрицами матрицы AB размера $n \times n$.* Эта теорема бывает полезна при некоторых выкладках (п. 20.3-4).

*) Иногда след матрицы обозначают $\operatorname{Sp}(A)$.

13.2-9. Клеточные матрицы. Прямые суммы (см. также пп. 13.4-6, 14.8-2 и 14.9-2). **Клеточная матрица** есть квадратная матрица A, которую можно разбить так, чтобы получилась диагональная матрица (п. 13.2-1, с), вдоль диагонали которой идут квадратные подматрицы A_1, A_2, ...:

$$A \equiv \begin{pmatrix} A_1 & [0] & \dots \\ [0] & A_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{13.2-9}$$

Клеточную матрицу часто рассматривают как **прямую сумму**

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots$$

квадратных матриц, идущих вдоль ее диагонали (см. также п. 12.7-5). Отметим, что $A^p = A_1^p \oplus A_2^p \oplus \dots$ при $p = 0, 1, 2, \dots$ (а если A — невырожденная матрица, то и при $p = -1, -2, \dots$) и

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Tr}(A) &= \operatorname{Tr}(A_1) + \operatorname{Tr}(A_2) + \dots, \\ \det(A) &= \det(A_1)\det(A_2)\dots \end{aligned}\right\} \tag{13.2-10}$$

13.2-10. Прямое (внешнее) произведение матриц (см. также п. 12.7-3). **Прямое (внешнее) произведение** $A \otimes B$ матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ размера $m \times n$ и матрицы $B \equiv [b_{i'k'}]$ размера $m' \times n'$ есть матрица

$$A \otimes B \equiv [c_{jh}] \qquad (c_{jh} = a_{ik} b_{i'k'}) \tag{13.2-11}$$

размера $mm' \times nn'$, где индекс j означает порядковый номер пары (i, i') в последовательности $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, m'), (2, 1), (2, 2), \dots, (m, m')$, а индекс h — порядковый номер пары (k, k') в аналогичной последовательности. Отметим, что

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD, \tag{13.2-12}$$

$$\operatorname{Tr}(A \otimes B) = \operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B). \tag{13.2-13}$$

✳ В (12) предполагается, что число строк матрицы C равно числу столбцов матрицы A и число строк матрицы D равно числу столбцов матрицы B, а в (13) — что A и B — квадратные матрицы. ✳

13.2-11. Сходимость и дифференцирование.

(a) Последовательность матриц $S_0, S_1, S_2, \dots$, имеющих одно и то же число строк и одно и то же число столбцов, называется **сходящейся** к такой же матрице S, если при $n \to \infty$ каждый элемент матрицы S_n сходится к соответствующему элементу матрицы S, т. е. если $\lim\limits_{n \to \infty} \| S - S_n \| = 0$. Подобным же образом определяется предел матричной функции $A = A(t)$ скалярного аргумента t (см. также п. 12.5-3).

(b) Если элементы матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ являются дифференцируемыми функциями $a_{ik}(t)$ скалярного аргумента t, то пишут

$$\left[\frac{da_{ik}}{dt}\right] \equiv \frac{d}{dt}[a_{ik}(t)] \equiv \frac{d}{dt} A(t). \tag{13.2-14}$$

Частные производные и *интегралы* от матриц определяются аналогично.

13.2-12. Функции матриц. *Матричные многочлены* и *алгебраические функции матриц* определяются с помощью элементарных матричных операций. Теорема Кэли — Гамильтона (п. 13.4-7) каждый сходящийся ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ по степеням квадратной матрицы A порядка n (*аналитическую функцию матрицы* A) сводит к некоторому многочлену n-й степени от A.

13.3. МАТРИЦЫ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ СИММЕТРИИ

13.3-1. Транспонированная и эрмитово сопряженная матрица (см. также пп. 14.4-3 и 14.4-6, а). Если $A \equiv [a_{ik}]$ — произвольная матрица размера $m \times n$ над полем комплексных чисел, то

Матрица, **транспонированная** по отношению к A, есть матрица $A' \equiv [a_{ki}]$ размера $n \times m$. Матрица, **эрмитово сопряженная** с A (просто сопряженная, присоединенная, ассоциированная)[1]), есть матрица $A^* \equiv [\bar{a}_{ki}]$ размера $n \times m$.

Отметим следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{lll} (A+B)' = A' + B', & (\alpha A)' = \alpha A', & (AB)' = B'A', \\ (A^{-1})' = (A')^{-1}, & (A')' = A & \| A' \| = \| A \|, \\ [0]' = [0], & I' = I; & \end{array}\right\} \qquad (13.3\text{-}1)$$

$$\left.\begin{array}{lll} (A+B)^* = A^* + B^*, & (\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*, & (AB)^* = B^*A^*, \\ (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}, & (A^*)^* = A, & \| A^* \| = \| A \|, \\ [0]^* = [0], & I^* = I. & \end{array}\right\} \qquad (13.3\text{-}2)$$

Матрицы A, A' и A^* необходимо имеют один и тот же ранг. Для каждой квадратной матрицы A

$$\operatorname{Tr}(A') = \operatorname{Tr}(A), \quad \det(A') = \det(A); \qquad (13.3\text{-}3)$$

$$\operatorname{Tr}(A^*) = \overline{\operatorname{Tr}(A)}, \quad \det(A^*) = \overline{\det(A)}. \qquad (13.3\text{-}4)$$

13.3-2. Матрицы со специальными свойствами симметрии (см. также пп. 14.4-4 — 14.4-6). Квадратная матрица $A \equiv [a_{ik}]$ называется

симметрической, если $A' = A$, т. е. если $a_{ik} = a_{ki}$,

кососимметрической (антисимметрической), если $A' = -A$, т. е. если $a_{ik} = -a_{ki}$,

эрмитовой (самосопряженной), если $A^* = A$, т. е. если $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$,

косоэрмитовой (альтернирующей), если $A^* = -A$, т. е. если $a_{ik} = -\bar{a}_{ki}$,

ортогональной, если $A'A = AA' = I$, т. е. если $A' = A^{-1}$,

унитарной, если $A^*A = AA^* = I$, т. е. если $A^* = A^{-1}$.

Эрмитова матрица является симметрической, косоэрмитова — кососимметрической и унитарная — ортогональной в том и только в том случае, если все их элементы действительны. Диагональные элементы эрмитовой, косоэрмитовой и кососимметрической матрицы соответственно действительны, чисто мнимы и равны нулю.

Определитель эрмитовой матрицы действителен. Определитель косоэрмитовой матрицы размера $n \times n$ является действительным, если n четно, и чисто мнимым, если n нечетно. Определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю. Определитель унитарной матрицы по модулю равен 1, а определитель ортогональной матрицы равен $+1$ или -1.

13.3-3. Правила комбинирования (см. также п. 14.4-7).

(а) *Если A — симметрическая матрица, то и A^p ($p = 0, 1, 2, \ldots$), A^{-1}, $T'AT$ и αA — симметрические матрицы.*

---

[1]) Термины *сопряженная, присоединенная* и *ассоциированная* употребляются в различных смыслах (см. также пп. 12.2-5, 14.4-3. 16.7-1 и 16.7-2); некоторые авторы называют присоединенной к A матрицу $A^{-1}\det(A)$ (состоящую из алгебраических дополнений с переставленными индексами). Символы A', A^* и $\bar{A} \equiv [\bar{a}_{ik}] \equiv (A')^*$, обозначающие соответственно матрицу транспонированную, эрмитово сопряженную и комплексно сопряженную с данной матрицей A, также варьируются; некоторые авторы матрицу, эрмитово сопряженную с A, обозначают символом A^+.

Если T — произвольная невырожденная матрица, то матрица $T'AT$ будет симметрической в том и только в том случае, если симметрической будет и матрица A; поэтому для любой ортогональной матрицы T матрица $T^{-1}AT$ будет симметрической в том и только в том случае, если симметрической будет и матрица A.

Если A и B — симметрические матрицы, то и $A+B$ — симметрическая матрица. Произведение AB двух симметрических матриц A и B есть симметрическая матрица в том и только в том случае, если $BA=AB$.

$\ast$ Произведение AB двух кососимметрических матриц A и B есть симметрическая матрица в том и только в том случае, если $BA = AB$, и кососимметрическая, если $BA = -AB$. $\ast$

(b) *Если A — эрмитова матрица, то и A^p $(p=0, 1, 2, \ldots)$, A^{-1}* и *T^*AT — эрмитовы матрицы; αA — эрмитова матрица, если α — действительное, и косоэрмитова матрица, если α — чисто мнимое.*

Если T — произвольная невырожденная матрица, то матрица T^*AT будет эрмитовой в том и только в том случае, если эрмитовой будет и матрица A; поэтому для любой унитарной матрицы T матрица $T^{-1}AT$ будет эрмитовой в том и только в том случае, если эрмитовой будет и матрица A.

Если A и B — эрмитовы матрицы, то и $A+B$ — эрмитова матрица. Произведение AB двух эрмитовых матриц A и B есть эрмитова матрица в том и только в том случае, если $BA=AB$.

$\ast$ Произведение AB двух косоэрмитовых матриц A и B есть эрмитова матрица в том и только в том случае, если $BA = AB$, и косоэрмитова, если $BA = -AB$. $\ast$

(c) *Если A — ортогональная матрица, то и A^p $(p=0, 1, 2, \ldots)$, A^{-1}, A' и $-A$ — ортогональные матрицы. Если матрицы A и B ортогональны, то и матрица AB ортогональна.*

Если A — унитарная матрица, то и A^p $(p=0, 1, 2, \ldots)$, A^{-1}, A^* и αA при $|\alpha|=1$ — унитарные матрицы. Если матрицы A и B унитарны, то и матрица AB унитарна.

13.3-4. Теоремы о разложении. Нормальные матрицы (см. также пп. 13.4-4, а и 14.4-8).

(a) Для каждой квадратной матрицы A над полем комплексных чисел

1. $\frac{1}{2}(A+A')=S_1$ есть *симметрическая*, а $\frac{1}{2}(A-A')=S_2$ — *кососимметрическая* матрица, $A=S_1+S_2$ есть (единственное) разложение данной матрицы A в сумму *симметрической* и *кососимметрической матриц*.

2. $\frac{1}{2}(A+A^*)=H_1$ и $\frac{1}{2i}(A-A^*)=H_2$ — *эрмитовы матрицы*; матрица iH_2 — *косоэрмитова*; $A=H_1+iH_2$ есть (единственное) *разложение* данной матрицы A в сумму *эрмитовой* и *косоэрмитовой матриц* (аналогичное разложению комплексного числа на действительную и мнимую части).

3. AA^* и A^*A есть *эрмитовы неотрицательные* (см. п. 13.5-3) матрицы.

4. Существуют *полярные разложения* матрицы A

$$A=QU \quad \text{и} \quad A=U_1Q_1,$$

где Q и Q_1 — *неотрицательные эрмитовы матрицы*, однозначно определяемые условиями $Q^2=AA^*$ и $Q_1^2=A^*A$, а U и U_1 — *унитарные матрицы*, однозначно определяемые в том и только в том случае, если A — невырожденная матрица (полярные разложения матрицы аналогичны представлению комплексного числа в тригонометрической форме $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$).

(b) Квадратная матрица A называется **нормальной** матрицей, если $A^*A = AA^*$ или, эквивалентно, если $H_2H_1=H_1H_2$.

13.4. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МАТРИЦЫ, СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, ПРИВЕДЕНИЕ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

13.4-1. Эквивалентные и подобные матрицы (см. также пп. 12.2-5, 13.5-4, 13.5-5 и 14.6-2).

(a) Две прямоугольные матрицы A и B **эквивалентны**, если существуют такие две квадратные невырожденные матрицы S и T, что A и B связаны преобразованием

$$B = SAT. \tag{13.4-1}$$

Каждая матрица B, эквивалентная данной матрице A, имеет столько же строк и столько же столбцов, сколько и матрица A, и может быть получена из A с помощью последовательного применения шести операций, определенных в п. 13.2-6. *Эквивалентные матрицы имеют один и тот же ранг; две матрицы размера $m \times n$, имеющие один и тот же ранг, эквивалентны.*

Если $B = QA$ или $B = AQ$, где Q — невырожденная матрица, то A и B эквивалентны.

(b) В частности, две квадратные матрицы A и $\tilde{A}$ подобны (иногда их называют просто **эквивалентными**), если существует такая невырожденная матрица T (*преобразующая матрица*), что A и $\tilde{A}$ связаны **преобразованием подобия**

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \quad \text{или} \quad A = T\tilde{A}T^{-1}; \tag{13.4-2}$$

A, $\tilde{A}$ и T необходимо являются квадратными матрицами одного и того же порядка.

При каждом преобразовании подобия (2) *сохраняется результат сложения матриц, умножения матриц и умножения матрицы на скаляр* (см. также п. 12.1-6). *Две подобные матрицы имеют один и тот же ранг, один и тот же след и один и тот же определитель* (см. также п. 13.4-2, а).

(c) Две квадратные матрицы A и $\tilde{A}$, связанные преобразованием

$$\tilde{A} = T'AT, \tag{13.4-3}$$

где T — невырожденная матрица, называются **конгруэнтными**. Две квадратные матрицы A и $\tilde{A}$, связанные преобразованием

$$\tilde{A} = T^*AT, \tag{13.4-4}$$

где T — невырожденная матрица, называются **соединенными**. В каждом из этих случаев A, $\tilde{A}$ и T необходимо являются квадратными матрицами одного и того же порядка.

(d) *Эквивалентность, подобие, конгруэнтность и соединенность матриц являются отношениями эквивалентности*; каждое из них определяет разбиение класса рассматриваемых матриц (п. 12.1-3, b). В большинстве приложений две или несколько подобных матриц дают различные представления некоторого линейного преобразования (линейного оператора) **A** (п. 14.6-2). В этой связи представляет интерес: 1) нахождение преобразования подобия, дающего особенно простое представление оператора **A** (приведение данной матрицы к диагональному или какому-либо иному «каноническому» виду), и 2) нахождение свойств матриц, инвариантных относительно преобразований подобия и, таким образом, общих для каждого класса подобных матриц (к числу таких свойств, например, относятся ранг, след, определитель, собственные значения).

13.4-2. Собственные значения и спектры квадратных матриц (см. также п. 14.8-3).

(a) **Собственными значениями (собственными числами, характеристическими числами)** квадратной матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ называются те значения скалярного параметра λ, для которых матрица $A - \lambda I$ является вырожденной. **Спектр (спектр собственных значений)** матрицы A есть множество всех ее собственных значений.

Собственные значения квадратной матрицы A можно определить и непосредственно как собственные значения линейного оператора, представляемого матрицей A (п. 14.8-3); *подобные матрицы имеют один и тот же спектр.*

(b) *Если нормальная матрица* A ($A^*A = AA^*$, п. 13.3-4, b) *имеет собственное значение* λ, *то матрица* A^* *имеет собственное значение* $\bar{\lambda}$, *матрица* $H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$ *имеет собственное значение* $\operatorname{Re}\lambda$ *и матрица* $H_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$ *имеет собственное значение* $\operatorname{Im}\lambda$ (см. также. п. 13.3-4, a).

Все собственные значения данной нормальной матрицы являются действительными в том и только в том случае, если эта матрица подобна некоторой эрмитовой матрице (см. также п. 14.8-4). В частности, *все собственные значения эрмитовых и действительных симметрических матриц действительны. Все собственные значения унитарной матрицы по модулю равны* 1; в частности, *действительные собственные значения действительных ортогональных матриц равны* $+1$ *или* -1, *а их комплексные собственные значения появляются парами* $e^{\pm i\varphi}$. *Квадратная матрица невырождена в том и только в том случае, если все ее собственные значения отличны от нуля.* О вычислении собственных значений см. пп. 13.4-5, a, 14.8-5, 14.8-9 и 20.3-5.

13.4-3. Приведение квадратной матрицы к треугольному виду. Алгебраическая кратность собственного значения (см. также п. 14.8-3, e).

(a) *Для любой квадратной матрицы* A *существует такое преобразование подобия* $\tilde{A} = T^{-1}AT$, *что* $\tilde{A}$ *есть треугольная матрица* (п. 13.2-1, c). *Диагональные элементы каждой треугольной матрицы, подобной матрице* A, *являются собственными значениями матрицы* A, *и каждое собственное значение* λ_j *матрицы* A *встречается в качестве диагонального элемента во всякой такой треугольной матрице одно и то же число* $m_j' \geqslant 1$ *раз; число* m_j' *называется* **алгебраической кратностью** данного собственного значения λ.

Замечание. Алгебраическая кратность m_j' собственного значения λ_j может не совпадать с его *геометрической кратностью* m_j, определяемой в п. 14.8-3, b.

(b) *След* $\operatorname{Tr}(A)$ *равен сумме всех собственных значений матрицы* A, *причем каждое собственное значение считается столько раз, какова его алгебраическая кратность. Определитель* $\det(A)$ (п. 13.2-7) *равен точно таким же образом подсчитанному произведению собственных значений* (см. также п. 13.4-5).

13.4-4. Приведение матриц к диагональному виду (см. также п. 14.8-5).

(a) *Квадратная матрица* A *может быть* **преобразованием подобия приведена к диагональному виду** (*т. е. существует такая невырожденная преобразующая матрица* T, *что матрица* $\tilde{A} = T^{-1}AT$ *диагональна,* п. 13.2-1, c) *в том и только в том случае, если* A *подобна некоторой нормальной матрице* (п. 13.3-4, b). *Более конкретно, данная матрица* A *может быть преобразованием подобия с унитарной преобразующей матрицей* T (*или, если матрица* A *действительна,—с действительной ортогональной преобразующей матрицей*) *приведена к диагональному виду в том и только в том случае, если* A *—нормальная матрица* ($A^*A = AA^*$, п. 13.3-4, b). В любом случае диагональные элементы матрицы $\tilde{A}$ являются собственными значениями матрицы A; каждое собственное значение матрицы A встречается в качестве диагонального элемента матрицы $\tilde{A}$ ровно столько раз, какова его алгебраическая кратность. Метод, дающий преобразующую матрицу T с нужными свойствами, описан в п. 14.8-6.

Частные случаи матриц, приводимых к диагональному виду. *Эрмитовы* и *унитарные матрицы* (а потому *действительные* и *симметрические* или *ортогональные матрицы*) представляют собой частные случаи нормальных матриц. Каждая матрица, имеющая *собственные значения только алгебраической кратности* 1, подобна некоторой нормальной матрице.

(b) *Две эрмитовы матрицы* A *и* B *могут быть приведены к диагональному виду одним и тем же преобразованием подобия* (*и, в частности, одним и тем же преобразованием подобия с унитарной преобразующей матрицей* T) *в том и только в том случае, если* $BA = AB$ (см. также пп. 13.5-5 и 14.8-6, e).

(c) *Для любой эрмитовой матрицы A существует такая невырожденная матрица T, что матрица $\tilde{A}=T^*AT$ диагональна; диагональные элементы матрицы $\tilde{A}$ в этом случае действительны.* В частности, *существует такая невырожденная матрица T, что диагональные элементы матрицы $\tilde{A}$ принимают только значения $+1$, -1 и/или 0.*

Для любой действительной симметрической матрицы A существует такая действительная невырожденная матрица T, что матрица $\tilde{A}=T'AT$ диагональна. В частности, *существует такая действительная невырожденная матрица T, что диагональные элементы матрицы $\tilde{A}$ принимают только значения $+1$, -1 и/или 0.*

Матрицы T с искомыми свойствами получают из соотношения $T=DU$, где U — унитарная (или действительная ортогональная) матрица, для которой матрица $U^{-1}AU$ диагональна, а D — действительная диагональная матрица; матрицу U находят по методу п. 14.8-6 (см. также п. 13.5-4, d).

13.4-5. Собственные значения и характеристическое уравнение матрицы.

(a) *Спектр собственных значений квадратной матрицы $A\equiv[a_{ik}]$ порядка n совпадает с множеством корней алгебраического уравнения n-й степени*

$$F_A(\lambda)\equiv\det(A-\lambda I)\equiv\det[a_{ik}-\lambda\delta_{ik}]\equiv$$

$$\equiv\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (13.4\text{-}5)$$

(*характеристическое уравнение* или *вековое уравнение матрицы A*).

Кратность (*порядок*, п. 1.6-2) *каждого корня λ_j этого уравнения равна его алгебраической кратности m'_j как собственного значения, так что m'_1+ $+m'_2+\ldots=n$.*

Подобные матрицы размера $n\times n$ имеют одни и те же характеристические уравнения; коэффициенты уравнения (5) являются симметрическими функциями n корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (п. 1.6-4). В частности, коэффициент при λ^{n-1} и свободный член уравнения (5) соответственно равны

$$\left.\begin{aligned} (-1)^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)&=(-1)^{n-1}\operatorname{Tr}(A), \\ \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n&=\det(A). \end{aligned}\right\} \qquad (13.4\text{-}6)$$

Коэффициент при λ^{n-r} равен взятой с множителем $(-1)^r$ сумме всех $\binom{n}{r}$ главных миноров r-го порядка (п. 1.5-4) определителя $\det(A)$.

(b) (См. также п. 14.8-3). *Для любой квадратной матрицы A с собственными значениями λ_j матрица αA имеет собственные значения $\alpha\lambda_j$, а матрица A^p — собственные значения λ_j^p ($p=0, 1, 2, \ldots$, а если A — невырожденная матрица, то $p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).*

Каждый многочлен или аналитическая функция $f(A)$ (п. 13.2-12) *имеет собственные значения $f(\lambda_j)$.*

Матричный степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_kA^k$ сходится (п. 13.2-1, а) *в том и только в том случае, если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\lambda_j^k$ сходится для каждого собственного значения λ_j матрицы A. Если две квадратные матрицы A и B имеют соответственно собственные значения λ_j и μ_h, то спектром собственных значений прямого произведения $A\otimes B$* (п. 13.2-10) *является множество всевозможных произведений $\lambda_j\mu_h$.*

13.4-6. Собственные значения клеточных матриц (прямых сумм, п. 13.2-9). *Спектр клеточной матрицы (прямой суммы),* $A = A_1 \oplus A_2 \oplus, \ldots$ *есть объединение спектров матриц* $A_1, A_2, \ldots$; *алгебраические кратности складываются.* Вклад в спектр каждой подматрицы A_k может быть найден с помощью ее характеристического уравнения.

13.4-7. Теорема Кэли—Гамильтона и смежные вопросы.

(а) *Каждая квадратная матрица A удовлетворяет своему собственному характеристическому уравнению* (п. 13.4-5, а), *т. е.*

$$F_A(A) = 0 \text{ (теорема Кэли — Гамильтона).} \tag{13.4-7}$$

(b) Теорема Кэли—Гамильтона позволяет каждую целочисленную степень, а потому и каждую аналитическую функцию квадратной матрицы A порядка n представлять в виде линейной функции от n различных положительных целочисленных степеней матрицы A (см. также п. 13.2-12). Точнее,

$$f(A) \equiv \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{n-k} A^{n-k}, \tag{13.4-8}$$

где Δ — определитель Вандермонда (п. 1.6-5) $\det\left[\lambda_i^{k-1}\right]$, а Δ_j — определитель, получаемый, если в Δ вместо $\lambda_1^j, \lambda_2^j, \ldots, \lambda_n^j$ подставить $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$.

Если все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A *различны*, то равенство (8) можно переписать в виде

$$f(A) \equiv \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \frac{\prod\limits_{i \neq k} (A - \lambda_i I)}{\prod\limits_{i \neq k} (\lambda_k - \lambda_i)} \tag{13.4-9}$$

(*теорема Сильвестра*).

13.5. КВАДРАТИЧНЫЕ И ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ

13.5-1. Билинейные формы. Билинейная форма от $2n$ действительных или комплексных переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ есть однородный многочлен второй степени (п. 1.4-3)

$$x'Ay \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \eta_k; \tag{13.5-1}$$

$x' \equiv [\xi_k]$—матрица-строка, $y \equiv [\eta_k]$ — матрица-столбец (п. 13.2-1, b).

13.5-2. Квадратичные формы. Квадратичная (однородная) форма от n действительных или комплексных переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ есть многочлен

$$x'Ax \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \xi_k \equiv x'A_1 x, \tag{13.5-2}$$

где $A_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(A + A')$ — «симметрическая часть» (п. 13.3-4) матрицы $A \equiv [a_{ik}]$. *Выражение* (2) *тождественно равно нулю в том и только в том случае, если A — кососимметрическая матрица* ($a_{ki} = -a_{ik}$, п. 13.3-2). Квадратичная форма (2) называется **симметрической**, если A — симметрическая матрица ($a_{ki} = a_{ik}$, п. 13.3-2), и **действительной**, если A — действительная матрица (и таким образом, каждый элемент a_{ik} — действительное число, п. 13.2-1) *).

*) Каждой квадратичной форме можно поставить в соответствие бесконечно много различных матриц A, для которых эта форма равна $x'Ax$. Среди них одна матрица (матрица A_1, о которой шла речь выше) является симметрической. Обычно квадратичную форму записывают именно с помощью этой матрицы и, таким образом, *всякая квадратичная форма является симметрической.* Квадратичная форма называется действительной, если действительной является *эта симметрическая* матрица. Например, форма $\xi_1^2 + i\xi_1\xi_2 - i\xi_2\xi_1 + \xi_2^2$ действительна, так как ее симметрическая запись имеет вид $\xi_1^2 + \xi_2^2$.

Действительная симметрическая квадратичная форма (2) (а также соответствующая действительная симметрическая матрица A) называется **положительно определенной, отрицательно определенной, неотрицательной или неположительной**, если соответственно $x'Ax > 0$, $x'Ax < 0$, $x'Ax \geqslant 0$ или $x'Ax \leqslant 0$ для каждого набора *действительных* чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, не все из которых равны нулю. Все остальные квадратичные формы являются **неопределенными** (т. е. знак $x'Ax$ зависит от выбора чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$) или тождественно равными нулю.

Действительная симметрическая квадратичная форма (2) (а также соответствующая действительная симметрическая матрица A) называется **положительно полуопределенной** или **отрицательно полуопределенной**, если соответственно она неотрицательна или неположительна и если $x'Ax = 0$ для некоторого набора $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ действительных чисел, не все из которых равны нулю.

13.5-3. Эрмитовы формы. Эрмитова форма от n действительных или комплексных переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ есть многочлен

$$x^*Ax \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\bar{\xi}_i\xi_k, \qquad (13.5\text{-}3)$$

где $A \equiv [a_{ik}]$ — эрмитова матрица $(a_{ik} = \bar{a}_{ki})$, а матрица $x^* \equiv [\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_n]$. *Форма* (3) *принимает действительные значения для каждого набора комплексных чисел* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *в том и только в том случае, если A — эрмитова матрица* (см. также п. 14.4-4).

Эрмитова форма (3), а также соответствующая эрмитова матрица $A \equiv [a_{ik}]$, называется **положительно определенной, отрицательно определенной, неотрицательной** или **неположительной**, если соответственно $x^*Ax > 0$, $x^*Ax < 0$, $x^*Ax \geqslant 0$ или $x^*Ax \leqslant 0$ для каждого набора комплексных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, не все из которых равны нулю. Все остальные эрмитовы формы (или эрмитовы матрицы) являются **неопределенными** (т. е. знак x^*Ax зависит от выбора чисел $\xi_2, \xi_1, \ldots, \xi_n$) или тождественно равными нулю.

Эрмитова форма (3) (а также соответствующая эрмитова матрица A) называется **положительно полуопределенной** или **отрицательно полуопределенной**, если соответственно она неотрицательна или неположительна и если $x^*Ax = 0$ для некоторого набора комплексных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, не все из которых равны нулю.

13.5-4. Преобразование квадратичных и эрмитовых форм. Приведение к сумме квадратов.

(а) Линейная подстановка

$$\left.\begin{aligned} &\xi_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\tilde{\xi}_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \text{или} \qquad &x = T\tilde{x} \end{aligned}\right\} (\det[t_{ik}] \neq 0) \qquad (13.5\text{-}4)$$

(невырожденное однородное линейное преобразование координат вектора, «пассивная» точка зрения, п. 14.6-1) переводит каждую квадратичную форму (2) в квадратичную форму от новых переменных $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \ldots, \tilde{\xi}_n$:

$$\left.\begin{aligned} &x'Ax \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{ik}\tilde{\xi}_i\tilde{\xi}_k \equiv \tilde{x}'\tilde{A}\tilde{x}, \\ \text{где} \qquad & \\ &\tilde{a}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} a_{jh}t_{ji}t_{hk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \\ \text{или} \qquad & \\ &\tilde{A} = T'AT. \end{aligned}\right\} \qquad (13.5\text{-}5)$$

Если A — симметрическая матрица, то и $\tilde{A}$ — симметрическая матрица, если A и T — действительные матрицы, то и $\tilde{A}$ — действительная матрица.

Линейная подстановка (4) переводит каждую эрмитову форму (3) в новую эрмитову форму:

$$\left.\begin{aligned} & x^*Ax \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_{ik}\bar{\tilde{\xi}}_i\tilde{\xi}_k, \\ \text{где}\quad & \tilde{a}_{ik}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}a_{jh}\bar{t}_{ji}t_{hk} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \dots,\ n), \\ \text{или}\quad & \tilde{A}=T^*AT. \end{aligned}\right\} \tag{13.5-6}$$

(b) Для каждой данной действительной симметрической квадратичной формы (2) существует такое линейное преобразование (4) с действительными **коэффициентами** t_{ik}, что новая матрица $\tilde{A}$ в (5) является диагональной (см. также п. 13.4-4, с), так что

$$x'Ax \equiv \tilde{x}'\tilde{A}\tilde{x} \equiv \sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_{ii}\tilde{\xi}_i^2. \tag{13.5-7}$$

Точно так же для каждой эрмитовой формы (3) существует такое линейное преобразование (4), что

$$x^*Ax \equiv \tilde{x}^*\tilde{A}\tilde{x} \equiv \sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_{ii}\,|\tilde{\xi}_i|^2. \tag{13.5-8}$$

Число r отличных от нуля коэффициентов в равенствах (7) *или* (8) *не зависит от выбора преобразования, приводящего матрицу A к диагональному виду, и равно рангу матрицы A*; число r называется **рангом** данной квадратичной или эрмитовой формы. *Для любой данной действительной симметрической квадратичной формы* (2) *разность между числом положительных и числом отрицательных коэффициентов $\tilde{a}_{ii}$ в равенстве* (7) *не зависит от выбора преобразования, приводящего матрицу A к диагональному виду (закон инерции квадратичных форм)*; это число называется **сигнатурой** данной квадратичной формы. *В точности такое же утверждение справедливо и для эрмитовых форм (закон инерции эрмитовых форм).*

(c) В частности, для каждой действительной симметрической квадратичной формы (2) существует *действительная ортогональная* матрица T, а для каждой эрмитовой формы (3) — *унитарная* матрица T, приводящая матрицу A к диагональному виду (см. также п. 13.4-4). Получающееся в результате *преобразование к главным осям* (преобразование к *нормальным координатам* $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n$, см. также п. 9.4-8) дает *нормальный вид* данной квадратичной или эрмитовой формы

$$x'Ax \equiv \tilde{x}'\tilde{A}\tilde{x} \equiv \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\tilde{\xi}_i^2 \quad \text{или} \quad x^*Ax \equiv \tilde{x}^*\tilde{A}\tilde{x} \equiv \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,|\tilde{\xi}_i|^2, \tag{13.5-9}$$

где множество действительных чисел λ_i составляет спектр собственных значений данной матрицы A (п. 13.4-2).

(d) Добавочное преобразование $\tilde{\xi}_i=\zeta_i/\sqrt{|\lambda_i|}$ $(i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ приводит выражение (9) к *каноническому виду*

$$x'Ax \equiv \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\zeta_i^2 \quad \text{или} \quad x^*Ax \equiv \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\,|\zeta_i|^2, \tag{13.5-10}$$

где каждый коэффициент ε_i равен $+1$, -1 или 0, если соответствующее собственное значение λ_i положительно, отрицательно или равно нулю.

(e) Вопрос о нахождении подходящих матриц, приводящих данную матрицу A к диагональному виду, рассмотрен в п. 14.8-6.

13.5-5. Одновременное приведение двух квадратичных или эрмитовых форм к сумме квадратов (см. также пп. 13.4-4, b и 14.8-7). *Если даны две действительные симметрические квадратичные формы $x'Ax$ и $x'Bx$, причем $x'Bx$ — положительно определенная форма, то можно найти действительное преобразование* (4), *одновременно приводящее к сумме квадратов формы $x'Ax$ и $x'Bx$. В частности, существует такое действительное преобразование* (4) *к новым координатам $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \ldots, \tilde{\xi}_n$, что*

$$x'Ax \equiv \tilde{x}'\tilde{A}\,\tilde{x} \equiv \sum_{i=1}^{n} \mu_i \tilde{\xi}_i^2, \qquad x'Bx \equiv \tilde{x}'\tilde{B}\,\tilde{x} \equiv \sum_{i=1}^{n} \tilde{\xi}_i^2. \qquad (13.5\text{-}11)$$

Точно так же, *если даны две эрмитовы формы x^*Ax и x^*Bx, причем x^*Bx — положительно определенная форма, то существует такое преобразование* (4) *к новым координатам $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \ldots, \tilde{\xi}_n$,* что

$$x^*Ax \equiv \tilde{x}^*\tilde{A}\,\tilde{x} \equiv \sum_{i=1}^{n} \mu_i |\tilde{\xi}_i|^2, \quad x^*Bx \equiv \tilde{x}^*\tilde{B}\,\tilde{x} \equiv \sum_{i=1}^{n} |\tilde{\xi}_i|^2. \quad (13.5\text{-}12)$$

В любом случае множество действительных чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ составляет спектр собственных значений матрицы $B^{-1}A$, получаемый как множество корней алгебраического уравнения n-й степени

$$\det(A-\mu B) \equiv \det[a_{ik}-\mu b_{ik}] = 0. \qquad (13.5\text{-}13)$$

Искомую матрицу преобразования T можно найти по методу п. 14.8-7 или же с помощью равенства $T = UT_0$, где T_0 — матрица преобразования, приводящего форму $x'Bx$ или x^*Bx к каноническому виду (п. 13.5-4, d), а U — унитарная матрица, приводящая форму $x'Ax$ или x^*Ax к сумме квадратов (п. 13.5-4, c).

Замечание. Две действительные симметрические квадратичные формы $x'Ax$ и $x'Bx$ или две эрмитовы формы x^*Ax и x^*Bx можно одновременно привести к сумме квадратов с помощью одной и той же унитарной матрицы преобразования T в том и только в том случае, если $BA = AB$ (см. также пп.13.4-4, b и 14.8-6, e).

13.5-6. Признаки положительной определенности, неотрицательности и т. д.

(a) *Действительная симметрическая квадратичная форма, или эрмитова форма, является положительно определенной, отрицательно определенной, неотрицательной, неположительной, неопределенной или тождественно равной нулю* (пп. 13.5-2 и 13.5-3) *в том и только в том случае, если* (*необходимо действительные*) *собственные значения λ_j матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ соответственно все положительны, все отрицательны, все неотрицательны, все неположительны, имеют различные знаки или все равны нулю.*

Действительная симметрическая квадратичная форма, или эрмитова форма, является положительно полуопределенной или отрицательно определенной в том и только в том случае, если она соответственно неотрицательна или неположительна и если по крайней мере одно собственное значение λ_j матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ равно нулю.

Заметим, что числа λ_j являются корнями характеристического уравнение (13.4-5); знаки этих корней часто можно исследовать одним из методов п. 1.6-6.

(b) ✻ *Для того чтобы эрмитова матрица $A \equiv [a_{ik}]$ (и соответствующая эрмитова форма, или действительная симметрическая квадратичная форма) была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы каждый из определителей*

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \det[a_{ik}] \qquad (13.5\text{-}14)$$

был положителен. Для того чтобы эрмитова матрица $A \equiv [a_{ik}]$ (*и соответствующая эрмитова форма или действительная симметрическая квадратичная форма*) *была неотрицательна, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры определителя* $\det [a_{ik}]$ (т. е. все миноры, получающиеся из этого определителя вычеркиванием строк и столбцов с одними и теми же номерами или, иначе говоря, миноры, симметричные относительно главной диагонали этого определителя) *были неотрицательны.*

Отметим, что для неотрицательности эрмитовой матрицы неотрицательность только угловых миноров (14) недостаточна.

(c) *Эрмитова матрица A* (*и соответствующая эрмитова форма или действительная симметрическая квадратичная форма*) *отрицательно определена, неположительна или отрицательно полуопределена в том и только в том случае, если матрица* $-A$ *соответственно положительно определена, неотрицательна или положительно полуопределена.*

(d) *Матрица A является неотрицательной эрмитовой матрицей в том и только в том случае, если существует такая матрица B, что* $A = B^*B$. *Действительная матрица A является неотрицателной симметрической матрицей в том и только в том случае, если существует такая действительная матрица B, что* $A = B'B$. *В любом из этих случаев матрица A положительно определена, если B, а значит и A, — невырожденная матрица.*

(e) *Если эрмитовы матрицы A и B положительно определены или неотрицательны, то это же верно и для матрицы AB. Каждая положительно определенная эрмитова матрица A имеет единственный квадратный корень H, определяемый условиями, что* $H^2 = A$ *и что H — эрмитова положительно определенная матрица* (см. также п. 13.3-4).

13.6. МАТРИЧНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ). ВОЗМУЩЕНИЯ И ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЯПУНОВА

13.6-1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Матричные обозначения. Как мы заметили в п. 9.1-3, если подходящие производные ввести в качестве новых переменных, общую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (9.1-4) можно свести к системе уравнений первого порядка

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,n). \tag{13.6-1a}$$

Систему (1*a*) записывают в виде одного матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \\ f_2(t;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(t;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \end{pmatrix} \equiv f(t,\ y) \tag{13.6-1b}$$

(см. также п. 13.2-11), где $y(t)$ и $f(t,\ y)$ — матрицы размера $n \times 1$ (столбцы). Если функции f_i в интересующей нас области непрерывны и удовлетворяют условию Липшица (9.2-4), то решение $y(t)$ уравнения (1*b*) однозначно определяется начальным условием

$$y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \cdots \\ y_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \cdots \\ y_{n0} \end{pmatrix} \equiv y_0. \tag{13.6-1c}$$

Если f в явном виде не зависит от независимой переменной t, то система (1) называется **автономной (стационарной)**.

Помимо того, что матричные обозначения удобны, они, как мы увидим, позволяют распространить интуитивные представления, возникающие при изучении простых дифференциальных уравнений первого порядка, на системы уравнений первого порядка. Кроме того, матричные операции, нужные для решения линейных систем (п. 13.6-2), легко выполняются электронными вычислительными машинами.

В большинстве важных приложений t обозначает время, а $y_i(t)$ — *фазовые переменные (переменные состояния)*, описывающие состояние некоторой механической системы. В таком случае система (1) называется динамической системой (см. также п. 11.8-4) [1].

13.6-2. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

(а) Однородные системы. Нормальная форма решения. Решение однородной линейной системы

$$\frac{dy_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}y_k, \quad y_i(0)=y_{i0} \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{13.6-2a}$$

или

$$\frac{dy}{dt}=Ay, \quad y(0)=y_0 \qquad (A\equiv[a_{ik}]) \tag{13.6-2b}$$

с постоянными коэффициентами a_{ik} (см. также пп. 9.3-1 и 9.4-1, d) имеет вид

$$y(t)=e^{At}y_0 \qquad (t\geqslant 0), \tag{13.6-3}$$

где матричная функция e^{At} является матрицей размера $n\times n$, определяемой в соответствии с пп. 13.2-12 и 13.4-7. Разложение функции e^{At} по формуле (13.4-8) требует громоздких перемножений матриц, но если данная матрица A имеет n различных собственных значений, то разложение функции e^{At} по теореме Сильвестра (13.4-9) дает нормальную форму решения из п. 9.4-1.

Часто можно упростить решение задачи (2) путем введения n новых фазовых переменных $\tilde{y}_h$ с помощью такого невырожденного линейного преобразования:

$$y_i=\sum_{h=1}^{n} t_{ih}\tilde{y}_h \quad (i=1, 2, \ldots, n) \text{ или } y=T\tilde{y}, \tag{13.6-4}$$

чтобы получающаяся в результате система

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\tilde{y}}{dt}=\tilde{A}\tilde{y}, \qquad \tilde{y}(0)=\tilde{y}_0, \\ \text{где}\quad &\tilde{A}\equiv T^{-1}AT, \quad \tilde{y}_0\equiv T^{-1}y_0, \end{aligned}\right\} \tag{13.6-5}$$

стала проще, чем первоначальная (см. также пп. 14.6-1 и 14.6-2). Если, в частности, существует преобразование (4), приводящее данную матрицу системы A к *диагональному* виду (пп. 13.4-4 и 14.8-6), то новые переменные $\tilde{y}_h$ называются **нормальными координатами** рассматриваемой линейной системы (см. также п. 9.4-8). Они удовлетворяют системе уравнений с «разделенными» переменными

$$\frac{d\tilde{y}_h}{dt}=\lambda_h\tilde{y}_h \qquad (h=1, 2, \ldots, n), \tag{13.6-6}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A. Если матрица A имеет n *различных* собственных значений, то решение первоначальной системы (2) на основании (4) имеет вид

$$\tilde{y}_h=\tilde{y}_{h0}e^{\lambda_h t} \qquad (h=1, 2, \ldots, n). \tag{13.6-7}$$

---

[1]) Во многих технических книгах столбец $y(t)$ называют *вектором состояния*. Правильней было бы сказать, что элементы $y_i(t)$ матрицы $y(t)$ (переменные состояния) *описывают* вектор состояния в некоторой определенной системе координат (в смысле тензорного анализа, гл. 16).

Комплексно сопряженные члены в решении (7), а также совпадающие и нулевые собственные значения можно рассмотреть подобно тому, как это сделано в п. 9.4-1. В общем случае с помощью преобразования (4) можно получить *треугольную* матрицу $\overline{A}$ (п. 13.4-3), так что функции $\overline{y}_i(t)$ можно последовательно вычислить одну за другой.

(b) Неоднородные уравнения. Матрица Грина. Линейная система

$$\frac{dy_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}y_k+f_i(t), \qquad y_i(0)=y_{i0} \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{13.6-8a}$$

или

$$\frac{dy}{dt}=Ay+f(t), \qquad y(0)=y_0 \qquad (A\equiv[a_{ik}]), \tag{13.6-8b}$$

где $f(t)$ — матрица размера $n\times 1$ (столбец), описывает реакцию линейной системы на внешние нагрузки $f_i(t)$. Как и в пп. 9.3-1 и 9.4-2, решение $y(t)$ получается в результате сложения решения (3) соответствующей однородной системы и некоторого частного решения (нормальной реакции) $y_N(t)$:

$$\left.\begin{aligned} &y(t)=e^{At}y_0+y_N(t)\\ \text{где}\quad &y_N(t)=\int_0^t h_+(t-\tau)f(\tau)\,d\tau=\int_0^t h_+(\zeta)f(t-\zeta)\,d\zeta.\end{aligned}\right\}\quad (t\geqslant 0) \tag{13.6-9}$$

Матрица Грина $h_+(t-\tau)\equiv[\{h_+(t-\tau)\}_{ik}]$ размера $n\times n$ для задачи Коши (8) является обобщением одномерной функции Грина в п. 9.4-3 и удовлетворяет уравнению

$$\frac{dh_+(t)}{dt}=Ah_+(t) \qquad (t>0), \qquad h_+(0)=I, \tag{13.6-10}$$

так что

$$h_+(t)=e^{At} \qquad (t\geqslant 0). \tag{13.6-11}$$

Матрица $h_+(t)$ является реакцией на набор (асимметричных) единичных импульсов $f_i(t)=\delta_+(t)$ ($i=1, 2, \ldots, n$; см. также п. 9.4-3, d). Заметим, что решение (9) полностью аналогично решению одномерной задачи $dy/dt=ay+f(t)$, $y(0)=y_0$.

(c) Операторное решение (см. также п. 9.4-5). Применяя преобразование Лапласа к элементам матрицы данной системы уравнений (8) с постоянными коэффициентами, получаем

$$sY(s)-y_0=AY(s)+F(s)$$

или

$$Y(s)=(sI-A)^{-1}y_0+(sI-A)^{-1}F(s), \tag{13.6-12}$$

где $Y(s)$ и $F(s)$ соответственно обозначают изображения функций $y(t)$ и $f(t)$. Члены равенства (12) являются изображениями членов равенства (9). Обратное преобразование Лапласа каждого элемента $Y_i(s)$ матрицы $Y(s)$ дает $y_i(t)$.

13.6-3. Линейные системы с переменными коэффициентами (см. также пп. 9.2-4, 9.3-3).

(a) Самая общая линейная система (1) имеет вид

$$\frac{dy}{dt}=A(t)\,y+f(t), \tag{13.6-13}$$

где $A(t)\equiv[a_{ik}(t)]$ — матрица размера $n\times n$, а $f(t)$ — матрица размера $n\times 1$ (столбец) (система линейных дифференциальных уравнений с переменными

коэффициентами и внешними нагрузками). Решение снова можно записать в виде

$$y(t)=w_+(t,\ 0)\,y_0+\int_0^t w_+(t,\ \lambda)\,f(\lambda)\,d\lambda \qquad (t\geqslant 0), \tag{13.6-14}$$

где $w_+(t,\ \lambda)$ — матрица Грина размера $n\times n$, определяемая при $t\geqslant\lambda$ как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dw_+(t,\ \lambda)}{dt}=A(t)\,w_+(t,\ \lambda) \qquad (t>\lambda),\\ &w_+(\lambda,\ \lambda)=I \end{aligned}\right\} \tag{13.6-15}$$

или как реакция на набор (асимметрических) единичных импульсов $f_i(t)=\delta_+(t-\lambda)$, где $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$; см. также п. 9.4-3, d. Для системы с постоянными коэффициентами $w_+(t,\ \lambda)\equiv h_+(t-\lambda)$.

(b) Для любой действительной или комплексной матрицы $A(t)$ с непрерывными элементами решение однородной линейной системы

$$\frac{dy}{dt}=A(t)\,y \tag{13.6-16}$$

имеет вид $Y(t)\,y(0)$, где $Y=Y(t)$ — матрица размера $n\times n$, являющаяся единственным решением матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dY}{dt}=A(t)\,Y, \qquad Y(0)=I. \tag{13.6-17}$$

Матрица $Y(t)$ является невырожденной; ее столбцы образуют n линейно независимых решений системы (16) (**фундаментальная матрица решений**, см. также п. 9.3-2). Матрица $U(t)\equiv[Y^{-1}(t)]^*$ служит единственным решением уравнения

$$-\frac{dU}{dt}=A^*(t)\,U, \qquad U(0)=I. \tag{13.6-18}$$

Уравнения (17) и (18) называются **сопряженными линейными уравнениями** [1]).

Матрица Грина $w_+(t,\ \lambda)$ из п. 13.6-3, а равна

$$w_+(t,\ \lambda)\equiv Y(t)\,Y^{-1}(\lambda)\equiv Y(t)\,U^*(\lambda) \qquad (t\geqslant\lambda), \tag{13.6-19}$$

так что решение (14) соответствует матричной форме решения из п. 9.3-3 методом вариации постоянных.

13.6-4. Методы возмущений и уравнения в вариациях.

(a) Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt}=f(t,\ y;\ \alpha), \qquad y(0)=y_0, \tag{13.6-20}$$

зависящая от набора (столбца) $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m\}$ m параметров α_k, и пусть $y_{(1)}(t)$ — известное ее решение для значений параметров $\alpha=\alpha_1\equiv\{\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \ldots,\ \alpha_{1m}\}$. Возмущенное решение $y_{(1)}(t)+\delta y(t)$, соответствующее возмущенному столбцу параметров $\alpha=\alpha_1+\delta\alpha$, может оказаться легче найти путем решения системы

$$\frac{d}{dt}\delta y=f(t,\ y_{(1)}+\delta y;\ \alpha_1+\delta\alpha)-f(t,\ y_{(1)};\ \alpha_1), \qquad \delta y(0)=0 \tag{13.6-21}$$

---

[1]) $I\dfrac{d}{dt}-A(t)$ и $-I\dfrac{d}{dt}-A^*(t)$ являются *сопряженными операторами* в пространстве матричных функций $u(t)$ размера $n\times 1$, для которых интеграл $\int_0^\infty u^*(t)\,u(t)\,dt$ существует и $u(0)=0$, если скалярное произведение двух таких функций u и v определить формулой $(u,\ v)=\int_0^\infty u^*(t)\,v(t)\,dt$ (п. 14.4-3; см. также п. 15.4-3).

для **возмущения** (вариации, п. 11.5-1) δy, чем с помощью непосредственного решения системы (20). Система (21) является точной. Однако для должным образом дифференцируемой матричной функции $f(t, y; \alpha)$ можно, пренебрегая всеми членами разложения правой части (21) в ряд Тейлора, кроме членов первого порядка, найти приближение для δy (**возмущение первого порядка**), решая *линейную* систему

$$\frac{d}{dt}\delta y = \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\delta\alpha, \qquad \delta y(0) = 0, \tag{13.6-22}$$

где элементы матрицы $\partial f/\partial y \equiv [\partial f_i/\partial y_k]_{y=y_{(1)},\ \alpha=\alpha_1}$ размера $n \times n$ и матрицы $\partial f/\partial\alpha \equiv [\partial f_i/\partial\alpha_k]_{y=y_{(1)},\ \alpha=\alpha_1}$ размера $n \times m$, вообще говоря, зависят от выбранного решения $y_{(1)}(t)$, а потому и от t. Если возмущения δy_i малы по сравнению с $|y_i|$, то можно пренебречь ошибками, возникающими от замены точной системы приближенной.

(b) Зависимость решения $y(t)$ от параметров α_k часто описывают **коэффициентами чувствительности**, т. е. производными решения по параметрам $z_{ik} = \partial y_i/\partial\alpha_k$, образующими матрицу $Z \equiv \partial y/\partial\alpha \equiv [\partial y_i/\partial\alpha_k]_{y=y_{(1)}}$ размера $n \times m$. Для каждого данного решения $y_{(1)}(t)$ коэффициенты чувствительности являются функциями от t и удовлетворяют mn линейным дифференциальным уравнениям (**уравнениям в вариациях по параметрам** или **уравнениям чувствительности**)

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y} Z + \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \qquad Z(0) = 0. \tag{13.6-23}$$

(c) При изучении зависимости решения от начальных значений $y_i(0) = y_{i0}$ эти значения можно рассматривать как параметры. В этом случае начальные условия $\delta y(0) = 0$ в системах (21) и (22) можно заменить условиями

$$\delta y(0) = y(0) - y_{(1)}(0) = \delta y_0. \tag{13.6-24}$$

Для уравнения (23) в вариациях по начальным значениям $z_{ik} = \partial y_i/\partial y_{k0}$ начальные условия следует взять в виде

$$z_{ik}(0) = \left.\frac{\partial y_i(0)}{\partial y_{k0}}\right|_{y=y_{(1)}} = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i = k) \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{13.6-25}$$

13.6-5. Устойчивость решений: определения (см. также п. 9.5-4). Различные виды устойчивости решения $y = y_{(1)}(t)$ системы

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad (t \geq t_0) \tag{13.6-26}$$

можно определить с помощью того эффекта, который вызывают возмущения параметров (п. 13.6-4). Нижеследующая теория относится к *устойчивости в смысле Ляпунова*, которая определяется эффектом от малого изменения начального значения

$$\delta y(t_0) \equiv y(t_0) - y_{(1)}(t_0)$$

на получающееся в результате возмущение

$$\delta y(t) \equiv y(t) - y_{(1)}(t)$$

при $t > t_0$.

Решение $y = y_{(1)}(t)$ системы (26) называется:

Устойчивым в смысле Ляпунова, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\Delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что из $\|\delta y(t_0)\| < \Delta(\varepsilon, t_0)$ следует, что $\|\delta y(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$. В противном случае решение называется **неустойчивым.**

Асимптотически устойчивым в области $D_1(t_0)$ фазового пространства, состоящего из точек $y \equiv \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, если решение

$y_{(1)}(t)$ устойчиво и если из того, что $y(t_0)$ принадлежит области $D_1(t_0)$, следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} \delta y(t)=0$ (т. е. $\|\delta y(t)\| \to 0$ при $t\to\infty$, п. 13·2-11).

Асимптотически устойчивым в целом (вполне устойчивым, глобально асимптотически устойчивым), если областью асимптотической устойчивости является все фазовое пространство.

Замечание. В приведенных выше определениях норма $\|\delta y\|$ матрицы размера $n\times 1$ (столбца) $\delta y \equiv \{\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_n\}$ определяется в соответствии с равенством (13.2-2) формулой

$$\|\delta y\| = \sup |\xi_1\delta y_1 + \xi_2\delta y_2 + \cdots + \xi_n\delta y_n| \tag{13.6-27a}$$

$$\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2=1\right).$$

Если это удобно, ее можно заменить одной из норм (таблица 13.2-1)

$$\|\delta y\|_2 = [(\delta y_1)^2+(\delta y_2)^2+\cdots+(\delta y_n)^2]^{1/2} \quad (\textit{евклидова норма}) \tag{13.6-27b}$$

или

$$\|\delta y\|_1 = |\delta y_1| + |\delta y_2| + \cdots + |\delta y_n|. \tag{13.6-27c}$$

Заметим, что в этих определениях речь идет об устойчивости *решений*, а не *систем* (см. также пп. 9.4-4 и 13.6-7). Если решение *устойчиво в смысле Ляпунова*, то *достаточно малые* изменения начальных значений не могут привести к большим изменениям решения за какой угодно промежуток времени. Для *асимптотически устойчивого* решения эффект от *конечного* изменения начальных значений в указанных границах станет сколь угодно малым после того, как пройдет достаточно большой промежуток времени. Если решение *асимптотически устойчиво в целом*, то даже *сколь угодно большое* изменение начальных значений в конце концов вызовет пренебрежимый эффект. Асимптотическая устойчивость является требованием для практических контрольных систем.

13.6-6. Функции Ляпунова и устойчивость.

(a) Устойчивость равновесия автономных систем (см. также п. 9.5-4, b). **Точка покоя** $y(t)=y_{(1)}$ $(t\geqslant 0)$ автономной системы

$$\frac{dy}{dt}=f(y) \qquad (t\geqslant 0) \tag{13.6-28}$$

определяется условием

$$f(y_{(1)})=0. \tag{13.6-29}$$

Достаточно рассматривать точки покоя $y(t)=y_{(1)}=0$, так как другие точки покоя $y=y_{(1)}$ в фазовом пространстве можно перевести в начало координат с помощью простого преобразования координат.

Функцией Ляпунова для решения $y(t)=0$ данной системы (28) называется любая такая действительная функция $V(y)\equiv V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, что в некоторой окрестности D точки $y=0$ в фазовом пространстве, состоящем из точек $y\equiv\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, функция $V(y)$ непрерывно дифференцируема и

$$\left.\begin{aligned} &V(y)>0 \quad \text{при} \quad y\neq 0, \quad V(0)=0,\\ &\frac{d}{dt}V(y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial y_k}f_k\leqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{13.6-30}$$

$\frac{d}{dt}V(y)\equiv\frac{d}{dt}V[y(t)]$ — производная функции V, вычисленная в силу системы (28), т. е. вдоль интегральных кривых.

Решение (точка покоя) $y(t) \equiv 0$ устойчиво в смысле Ляпунова в том (и только в том) случае, если существует соответствующая функция Ляпунова (теорема Ляпунова об устойчивости).

Решение $y(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво в окрестности D, если существует функция Ляпунова $V(y)$, удовлетворяющая в D строгому неравенству $dV/dt < 0$ для всех $y \neq 0$ (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости).

Решение $y(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво в целом, если функцию Ляпунова $V(y)$ можно определить для всего фазового пространства так, что выполняются условия теоремы об асимптотической устойчивости и $V(y) \to \infty$ при $\| y \| \to \infty$ (теорема Лассаля).

Решение $y(t) = 0$ уравнения (28) неустойчиво, если существует область D_1, содержащаяся в некоторой окрестности D точки $y = 0$, и действительная функция $U(y)$ такие, что

1. *Функция $U(y)$ непрерывно дифференцируема в D_1 и*

$$U(y) > 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial y_k} f_k > 0$$

для всех $y \neq 0$ в D_1;

2. *$U(y) = 0$ во всех граничных точках области D_1, лежащих внутри D;*
3. *$y = 0$ есть граничная точка области D_1 (теорема Четаева о неустойчивости).*

В частности, *решение неустойчиво, если условие 1) выполняется во всей окрестности D точки $y = 0$ (теорема Ляпунова о неустойчивости).*

(b) Неавтономные системы. Каждое решение $y(t) = y_{(1)}(t)$ системы $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ $(t \geqslant 0)$ при помощи замены $x(t) = y(t) - y_{(1)}(t)$ можно преобразовать в решение $x(t) \equiv 0$ новой системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x + y_{(1)}) - f(t, y_{(1)}) \equiv F(t, x) \qquad (t \geqslant 0). \tag{13.6-31}$$

При этом $F(t, 0) = 0$ для всех $t \geqslant 0$.

Функция $V(t, x) \equiv V(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **функцией Ляпунова** для системы (31), если

1. $V(t, x)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности Ω точки $x = 0$ в фазовом пространстве $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при всех $t \geqslant 0$.
2. $V(t, 0) = 0$ при всех $t \geqslant 0$.
3. $V(t, x) \geqslant W(x)$ для всех точек x, принадлежащих Ω, и при всех $t \geqslant 0$, где функция $W(x)$ такова, что $W(x) > 0$ для всех $x \neq 0$ и $W(0) = 0$.
4. $\displaystyle \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_k} F_k \leqslant 0$ для всех $x \in \Omega$ и $t \geqslant 0$.

При таком определении функции Ляпунова теорема п. (а) об устойчивости переносится на неавтономные системы без всяких изменений. В теореме об асимптотической устойчивости нужно дополнительно потребовать выполнения неравенства $\frac{dV}{dt} \leqslant -W_1(x)$ для всех $x \in \Omega$ и $t \geqslant 0$, где функция $W_1(x) > 0$ при $x \neq 0$ и $W_1(0) = 0$.

13.6-7. Приложения и примеры (см. также п. 9.5-4).

(а) Приложения такие, как проектирование контрольных систем, мотивируют поиск функций Ляпунова, позволяющих установить асимптотическую

устойчивость в рассматриваемых областях фазового пространства или же в возможно больших его областях («прямой метод» исследования устойчивости по Ляпунову). Функции Ляпунова для частных решений не являются единственными, и практические методы поиска являются скорее искусством, чем наукой.

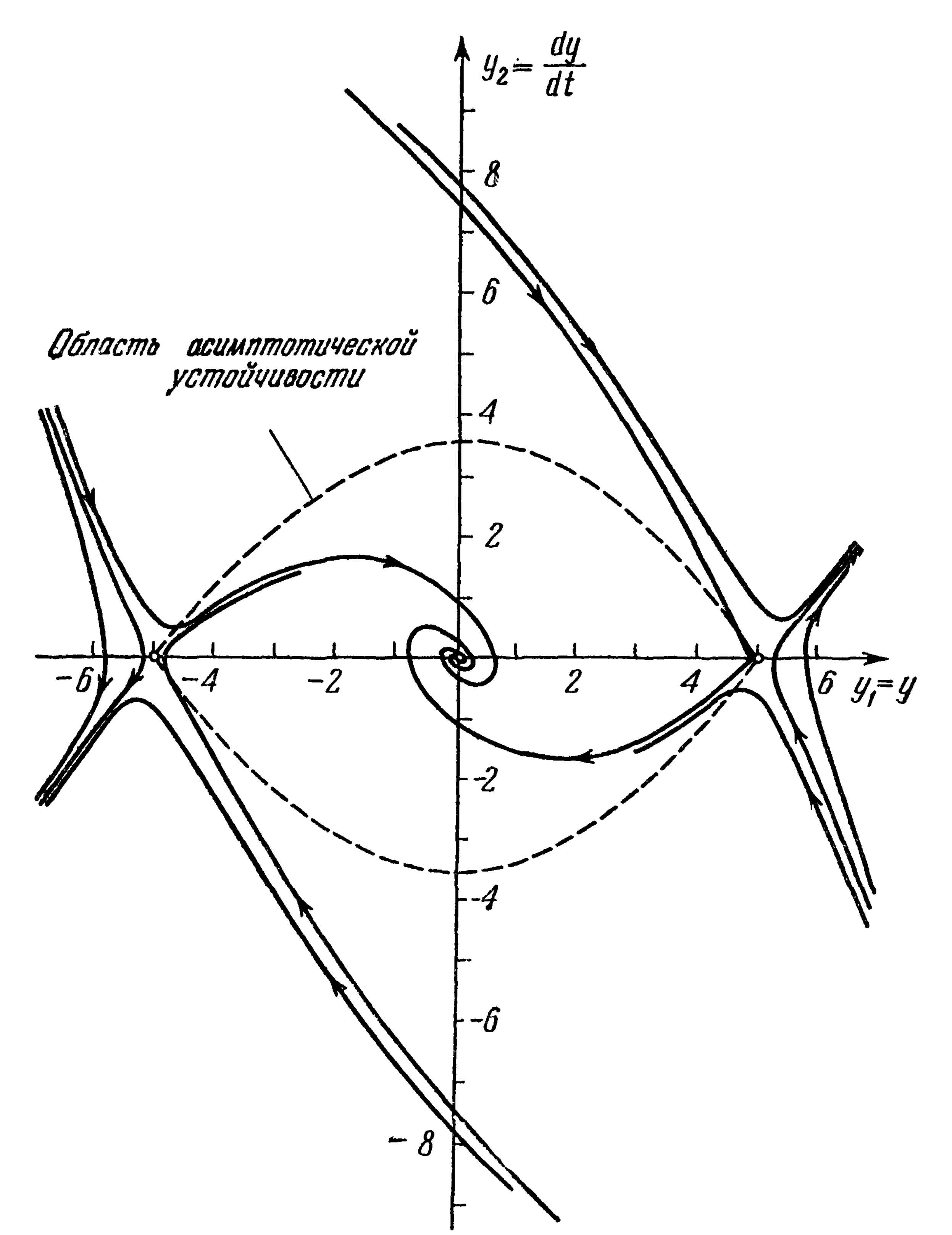


Рис. 13.6-1. Область асимптотической устойчивости для уравнения Дуффинга $\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + y + by^3 = 0$ при $a = 1$, $b = -0{,}04$.

(b) Как мы отметили в п. 9.5-4, а, *решение* $y(t) = 0$ *линейной однородной системы с постоянными коэффициентами*

$$\frac{dy}{dt} = Ay \tag{13.6-32}$$

(п. 13.6-2, а) *асимптотически устойчиво в целом (вполне устойчиво) в том и только в том случае, если эта система устойчива в смысле* п. 9.4-4, *т. е. если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части. Это выполняется в том и только в том случае, если для произвольной положительно определенной симметрической матрицы Q существует такая положительно определенная симметрическая матрица P, что*

$$A'P + PA = -Q. \tag{13.6-33}$$

Тогда $V(y) \equiv y'Py$ *есть функция Ляпунова для решения* $y = 0$ (y' — транспонированная матрица для y).

(с) Уравнение Дуффинга

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + y + by^3 = 0$$

описывает нелинейные колебания пружины. Полагая $y = y_1$, $\dot{y} = y_2$, получаем нелинейную систему первого порядка

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -ay_2 - y_1 - by_1^3.$$

Теория п. 13.6-6 показывает, что

$$V(y_1, y_2) \equiv \frac{1}{4}(by_1^4 + 2y_1^2 + 2y_2^2), \qquad \frac{dV}{dt} = -ay_2^2$$

есть функция Ляпунова для решения $y_1(t) = y_2(t) = 0$ при $a > 0$ и $b > 0$ («сильная пружина»); это решение асимптотически устойчиво в целом.

При $a > 0$ и $b < 0$ («слабая пружина») решение $y_1(t) = y_2(t) = 0$ асимптотически устойчиво, но не в целом (рис. 13.6-1).

ГЛАВА 14

ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ). ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАТРИЦАМИ

14.1. ВВЕДЕНИЕ. СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

14.1-1. Вводные замечания. В этой главе дается обзор теории *линейных векторных пространств* (см. также п. 12.4-1) и *линейных преобразований* (*линейных операторов*). Векторы и линейные операторы представляют физические объекты и операции во многих важных приложениях.

Большинство практических задач требует описания (представления) математических моделей (п. 12.1-1) с помощью упорядоченных наборов действительных или комплексных чисел. В частности, понятия гомоморфизма и изоморфизма (п. 12.1-6) позволяют многие математические модели «представлять» соответствующими классами *матриц* (п. 13.2-1; см. также п. 13.2-5), так что *абстрактным математическим операциям соответствуют числовые операции над элементами матриц.* (Примеры: матричные представления операторов квантовой механики и электрических преобразователей.) В пп. 14.5-1 — 14.10-7 описывается применение матриц для представления векторов, линейных операторов и элементов групп.

14.1-2. Числовое описание математических моделей: системы отсчета (см. также пп. 2.1-2, 3.1-2, 5.2-2, 6.2-1, 12.1-1 и 16.1-2). **Система отсчета (система координат)** есть схема правил, описывающих (представляющих) каждый объект (точку) некоторого класса (пространства, области некоторого пространства) C соответствующим упорядоченным набором (действительных или комплексных) чисел (**компонент, координат**) $x_1, x_2, \ldots$ Число координат, требуемых для определения каждой точки $(x_1, x_2, \ldots)$, называется **размерностью** пространства C (см. также п. 14.2-4). Во многих приложениях значения координат связаны с системами физических мер.

14.1-3. Преобразования координат (см. также пп. 2.1-5 — 2.1-8, 3.1-12, 6.2-1 и 16.1-2). **Преобразование координат** $x_1, x_2, \ldots$ есть множество правил или соотношений, ставящих каждой точке $(x_1, x_2, \ldots)$ в соответствие новый набор координат. Преобразование координат допускает две интерпретации:

1. **«Активная» точка зрения, или точка зрения «alibi»**: преобразование координат

$$x'_1 = x'_1(x_1,\ x_2,\ \ldots), \qquad x'_2 = x'_2(x_1,\ x_2,\ \ldots),\ \ldots, \tag{14.1-1}$$

описывает *операцию* (*функцию*, *отображение*, п. 12.1-4), относящую каждому данному математическому объекту (точке) $(x_1, x_2, \ldots)$ некоторую новую точку $(x'_1, x'_2, \ldots)$.

2. **«Пассивная» точка зрения, или точка зрения «alias»**: преобразование координат

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1(x_1,\ x_2,\ \ldots), \qquad \tilde{x}_2 = \tilde{x}_2(x_1,\ x_2,\ \ldots),\ \ldots \tag{14.1-2}$$

вводит *новое описание* (*новое представление*) каждой точки $(x_1, x_2, \ldots)$ посредством новых координат $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots$

Преобразования координат позволяют абстрактные математические отношения представлять числовыми соотношениями («активная» точка зрения) и заменять системы

отсчета («пассивная» точка зрения). Замена системы отсчета часто упрощает данную задачу. (Примеры: приведение к главным осям, пп. 2.4-8, 3.5-7, 9.4-8 и 17.4-8; контактные преобразования, пп. 10.2-5 и 11.6-6, обобщенные координаты в динамике.)

14.1-4. Инвариантность (см. также пп. 12.1-5 и 16.2-1; для более подробного рассмотрения отсылаем к пп. 16.1-4 и 16.4-1). Функция координат, поставленных в соответствие некоторому объекту или объектам, **инвариантна относительно данного преобразования координат** (1) или (2), если значение этой функции не меняется при подстановке вместо каждой координаты x_i функции $x'_i(x_1, x_2, \ldots)$ или $\tilde{x}_i(x_1, x_2, \ldots)$. Соотношение между значениями координат инвариантно, если оно сохраняет силу при любых подстановках такого рода.

Инвариантность относительно преобразования координат «активного» типа интерпретируется в духе п. 12.1-5. Функции и соотношения, инвариантные относительно какого-либо класса преобразований координат «пассивного» типа, можно рассматривать как функции от реальных объектов (**инвариантов**), представляемых различными наборами координат в различных системах отсчета или соответственно как соотношения между ними. **Полная система инвариантов** $f_1(x_1, x_2, \ldots)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots)$, ... однозначно характеризует все свойства объекта $(x_1, x_2, \ldots)$, инвариантные относительно данного класса (группы) преобразований координат (см. также п. 12.2-8).

14.1-5. Системы мер. Представление модели, включающей два или более класса объектов, требует, вообще говоря, системы отсчета для каждого класса объектов; получающееся в результате множество систем отсчета называется **системой мер**. Изменение системы мер включает в себя преобразование координат «пассивного» типа для каждого класса объектов; обычно эти преобразования связывают таким образом, чтобы обеспечить инвариантность некоторых важных функций и/или соотношений (см. также пп. 16.1-4, 16.2-1 и 16.4-1).

14.2. ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

14.2-1. Определяющие свойства. Как уже говорилось в п. 12.4-1, *линейное векторное пространство* $\mathcal{U}$, состоящее из *векторов* **a**, **b**, **c**, ..., над кольцом (с единицей, п. 12.3-1) R, состоящим из *скаляров* α, β, ..., допускает *сложение векторов* и *умножение векторов на скаляры*, обладающие следующими свойствами:

1. $\mathcal{U}$ есть коммутативная группа относительно сложения векторов: для каждой пары векторов **a**, **b** из $\mathcal{U}$ пространство $\mathcal{U}$ содержит их сумму $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, причем

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}.$$

Кроме того, $\mathcal{U}$ содержит нулевой вектор **0** и для каждого вектора **a** противоположный вектор $-\mathbf{a}$ такие, что

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{a}-\mathbf{a}=\mathbf{0}.$$

2. $\mathcal{U}$ содержит произведение $\alpha\mathbf{a}$ каждого вектора $\mathbf{a}\in\mathcal{U}$ на любой скаляр $\alpha\in R$, причем

$$(\alpha\beta)\mathbf{a}=\alpha(\beta\mathbf{a}), \qquad 1\mathbf{a}=\mathbf{a},$$

$$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}, \quad (\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a},$$

где 1 — единица кольца R.

Отметим, что

$$0\cdot\mathbf{a}=\mathbf{0}, \qquad (-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}, \qquad (-\alpha)\mathbf{a}=-(\alpha\mathbf{a}). \qquad (14.2\text{-}1)$$

Если специально не оговорено противное, то подразумевается, что все линейные векторные пространства, рассматриваемые в этом справочнике, явля-

ются **действительными векторными пространствами** или же **комплексными векторными пространствами**, соответственно определяемыми как линейные векторные пространства над полем действительных чисел и над полем комплексных чисел.

В случае векторных пространств, допускающих определение сходимости (п. 14.2-7, b), некоторые авторы называют совокупность векторов, обладающую описанными выше свойствами, **линейным многообразием**, а термин **векторное пространство** резервируют для *замкнутых* линейных многообразий, т. е. линейных многообразий, содержащих все свои предельные точки (п. 12.5-1, b); в случае конечномерных многообразий эти два понятия равносильны (п. 14.2-4).

14.2-2. Линейные многообразия и подпространства в $\mathcal{U}$. Подмножество $\mathcal{U}_1$ линейного векторного пространства $\mathcal{U}$ есть **линейное многообразие** в $\mathcal{U}$, если $\mathcal{U}_1$ есть линейное многообразие над тем же кольцом скаляров, что и $\mathcal{U}$; $\mathcal{U}_1$ называется **подпространством** пространства $\mathcal{U}$, если оно является замкнутым линейным многообразием в $\mathcal{U}$ (см. также п. 14.2-1). **Собственное подпространство** пространства $\mathcal{U}$ есть его подпространство, отличное от $\mathbf{0}$ и от самого $\mathcal{U}$.

Любое данное множество векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$ пространства $\mathcal{U}$ **порождает (определяет)** линейное многообразие, содержащее всевозможные линейные комбинации векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$

Пример: прямые линии и плоскости, проходящие через начало координат в трехмерном евклидовом пространстве.

14.2-3. Линейно независимые и линейно зависимые векторы (см. также пп. 1.9-3, 5.2-2 и 9.3-2).

(а) Конечное множество векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots$ **линейно независимо**, если

$$\text{из } \lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\ldots=\mathbf{0} \text{ следует, что } \lambda_1=\lambda_2=\ldots=0. \tag{14.2-2}$$

В противном случае векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots$ **линейно зависимы** и по крайней мере один из них, например $\mathbf{a}_k$, может быть выражен в виде линейной комбинации $\mathbf{a}_k=\sum_i \mu_i\mathbf{a}_i$ остальных векторов $\mathbf{a}_i$ этого множества. Это, в частности, верно в том тривиальном случае, когда $\mathbf{a}_k$ — нулевой вектор.

(b) Определения п. 14.2-3, а применимы и к *бесконечным* множествам векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots$, если можно приписать смысл условию (2). Вообще говоря, для этого требуется, чтобы, помимо алгебраических постулатов из п. 14.2-1, векторное подпространство допускало определение *сходимости* (пп. 12.5-3 и 14.2-7, b).

14.2-4. Размерность линейного многообразия или векторного пространства. Базисы и системы координат (системы отсчета).

(а) **Базис (линейный)** линейного многообразия $\mathcal{U}$ есть такое множество линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$ многообразия $\mathcal{U}$, что каждый вектор $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ может быть представлен в виде линейной формы

$$\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\ldots \tag{14.2-3}$$

относительно базисных векторов $\mathbf{e}_i$. Каждое множество линейно независимых векторов образует базис линейного многообразия, состоящего из всевозможных линейных комбинаций данных векторов.

(b) **В конечномерном** *линейном многообразии или векторном пространстве, порожденном n базисными векторами*:

1) *каждое множество из n линейно независимых векторов является базисом*;
2) *никакое множество из $m < n$ векторов не является базисом*;
3) *каждое множество из $m > n$ векторов необходимо линейно зависимо.*

Число n называется **(линейной) размерностью** данного векторного пространства. **Бесконечномерное** векторное пространство не допускает никакого конечного базиса.

(c) В каждом действительном или комплексном векторном пространстве размерности n числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ являются единственными **координатами** вектора $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\ldots+\alpha_n\mathbf{e}_n$ в **системе координат (система отсчета)**, определяемой базисными векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Отметим, что вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ имеет координаты $\alpha_i+\beta_i$, а вектор $\alpha\mathbf{a}$ — координаты $\alpha\alpha_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$; см. п. 5.2-2).

(d) Два линейных векторных пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ над одним и тем же кольцом скаляров $\alpha, \beta, \ldots$ изоморфны (п. 12.1-6) в том и только в том случае, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие $\mathbf{a}\leftrightarrow\mathbf{a}', \mathbf{b}\leftrightarrow\mathbf{b}', \ldots$, при котором $\mathbf{a}+\mathbf{b}\leftrightarrow\mathbf{a}'+\mathbf{b}'$ и $\alpha\mathbf{a}\leftrightarrow\alpha\mathbf{a}'$. *В случае конечномерных векторных пространств для этого необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ имели одну и ту же линейную размерность.*

В частности, каждое n-мерное действительное или комплексное векторное пространство изоморфно пространству матриц-столбцов, имеющих n строк, соответственно над полем действительных или комплексных чисел (*матричное представление*, п. 14.5-2).

14.2-5. Нормированные векторные пространства. Действительное или комплексное векторное пространство $\mathcal{U}$ называется **нормированным векторным пространством**, если для каждого вектора $\mathbf{a}\in\mathcal{U}$ существует такое действительное число $\|\mathbf{a}\|$ (**норма, абсолютная величина, модуль вектора** $\mathbf{a}$), что из $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ следует $\|\mathbf{a}\|=\|\mathbf{b}\|$ и что для всех $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ из $\mathcal{U}$:

$$\left.\begin{array}{l}\|\mathbf{a}\|\geqslant 0,\ \text{из}\ \|\mathbf{a}\|=0\ \text{следует, что}\ \mathbf{a}=0,\ \|\alpha\mathbf{a}\|=|\alpha|\,\|\mathbf{a}\|,\\ \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|\leqslant\|\mathbf{a}\|+\|\mathbf{b}\|\ (\textit{неравенство Минковского}).\end{array}\right\}\qquad(14.2\text{-}4)$$

Единичный вектор есть вектор с единичной нормой (см. также п. 5.2-5). Отметим, что $\|-\mathbf{a}\|=\|\mathbf{a}\|$ и $\|\mathbf{0}\|=0$.

14.2-6. Унитарные векторные пространства.

(a) Действительное или комплексное векторное пространство $\mathcal{U}$ называется **унитарным (эрмитовым, предгильбертовым) векторным пространством**, если можно определить бинарную операцию, ставящую каждой паре $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ векторов из $\mathcal{U}$ в соответствие скаляр $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — **скалярное**, или **внутреннее, произведение** $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, причем:

1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b})=\overline{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}$ (*эрмитова симметрия*);
2) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}, \mathbf{b})+(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ (*дистрибутивный закон*);
3) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b})=\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (*ассоциативный закон*)[1];
4) $(\mathbf{a}, \mathbf{a})\geqslant 0$; из $(\mathbf{a}, \mathbf{a})=0$ следует $\mathbf{a}=0$ (*положительная определенность*).

Отсюда следует, что *в каждом унитарном векторном пространстве*

$$(\mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{a})=(\mathbf{b}, \mathbf{a})+(\mathbf{c}, \mathbf{a}),\qquad(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b})=\bar{\alpha}(\mathbf{a}, \mathbf{b}),\qquad(14.2\text{-}5)$$

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})|^2\leqslant(\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b})\ (\textit{неравенство Коши — Шварца}).\qquad(14.2\text{-}6)$$

Неравенство Коши — Шварца (6) (см. также п. 1.3-2) *превращается в равенство в том и только в том случае, если* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *линейно зависимы* (см. также пп. 1.3-2, 4.6-19 и 15.2-1, с).

m векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ пространства $\mathcal{U}$ линейно независимы в том и только в том случае, если определитель $\det[(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k)]$ *m-порядка* (*определитель Грама*, см. также 5.2-8 и 15.2-1, а) *отличен от нуля.*

(b) *Если унитарное векторное пространство действительно, то все скалярные произведения* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *действительны, и скалярное умножение векторов коммутативно, так что*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})=(\mathbf{b}, \mathbf{a}),\qquad(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b})=\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}).\qquad(14.2\text{-}7)$$

Замечание. Используемые в теории относительности *пространства с внутренним произведением с неопределенной метрикой* являются действительными или комплексными векторными пространствами, допускающими определение скалярного произведения

---

[1]) Некоторые авторы вместо этого требуют, чтобы $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b})=\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, что сводится к перестановке $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в определении произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; тогда $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b})=\bar{\alpha}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

(a, b), удовлетворяющего условиям (1) — (3), но не удовлетворяющего условию (4) из п. 14.2-6, а. Все векторы такого пространства могут быть подразделены на векторы с положительным, отрицательным или нулевым квадратом (a, a). Полагают $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\|(\mathbf{a}, \mathbf{a})\|}$. См. также пп. 14.2-5 и 16.8-1.

14.2-7. Норма, метрика и сходимость в унитарных векторных пространствах. Гильбертовы пространства.

(a) Каждое нормированное векторное пространство (п. 14.2-5) является метрическим пространством с метрикой $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ (п. 12.5-2) и в нем (как и в п. 12.5-3) можно определить *окрестности* и *сходимость* (см. также п. 5.3-1). В этом смысле ряд $\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots$ сходится, и его сумма равна вектору $\mathbf{s} = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{a}_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}_k$ пространства $\mathcal{U}$ в том и только в том случае, если $\lim\limits_{n \to \infty} \left\| \mathbf{s} - \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{a}_k \right\| = 0$.

Нормированное векторное пространство является полным (п. 12.5-4) в том и только в том случае, если каждая последовательность векторов $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots$ пространства $\mathcal{U}$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_m\| = 0$$

(*последовательность Коши, фундаментальная последовательность,* см. также п. 4.9-1), сходится к некоторому вектору $\mathbf{s} \in \mathcal{U}$.

Полное нормированное векторное пространство называется **банаховым пространством**. *Каждое конечномерное нормированное векторное пространство является полным.*

(b) Каждое унитарное векторное пространство позволяет формулами

$$\left.\begin{aligned} \|\mathbf{a}\| &= \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}, \\ d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b})}, \\ \cos\gamma &= \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|} \end{aligned}\right\} \qquad (14.2\text{-}8)$$

ввести норму (абсолютную величину, модуль) $\|\mathbf{a}\|$ каждого вектора **a**, **расстояние** $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ между двумя «точками» **a**, **b** из $\mathcal{U}$ и **угол** γ между любыми двумя векторами **a** и **b**. Функции $\|\mathbf{a}\|$ и $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, определенные в (8), удовлетворяют всем условиям пп. 14.2-5 и 12.5-2.

Если $\mathcal{U}$ — действительное унитарное векторное пространство, то $\cos\gamma$ — действительное число для всех **a** и **b** и в силу неравенства (6) Коши — Шварца $-1 \leqslant \cos\gamma \leqslant 1$.

(c) Конечномерные действительные унитарные векторные пространства называются **евклидовыми векторными пространствами**. *Они являются сепарабельными, полными и локально компактными* (п. 12.5-4) и служат моделями для n-мерных евклидовых геометрий (см. также главы 2 и 3 и пп. 5.2-6 и 17.4-6).

Полное унитарное векторное пространство называется **гильбертовым пространством**[1]). Все полные пространства последовательностей и функций, перечисленные в табл. 12.5-1, являются гильбертовыми (а потому и банаховыми) пространствами.

---

[1]) Некоторые авторы раньше требовали, чтобы каждое гильбертово пространство было не только полным, но и сепарабельным (п. 12.5-1, b); иногда гильбертовым называют только бесконечномерное полное унитарное пространство.

Гильбертовы пространства сохраняют многие свойства евклидовых пространств. В частности, *каждое сепарабельное* (п. 12.5-1) *бесконечномерное действительное или комплексное гильбертово пространство изоморфно и изометрично пространству* l^2 *соответственно действительных или комплексных бесконечных последовательностей* $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$, *для которых сходится ряд* $\|(\xi_1, \xi_2, \ldots)\|^2 = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \ldots$ (табл. 12.5-1). Поэтому каждому вектору из сепарабельного бесконечномерного гильбертова пространства можно поставить в соответствие счетное множество координат.

Каждое подпространство гильбертова пространства является полным его подпространством (см. также п. 14.2-2) и, таким образом, и само является гильбертовым пространством.

14.2-8. Теорема о проекции. *Если заданы произвольный вектор* $\mathbf{x}$ *унитарного векторного пространства* $\mathcal{U}$ *и полное его подпространство* $\mathcal{U}_1$, *то существует единственный вектор* $\mathbf{y} = \mathbf{x}_p$ *из* $\mathcal{U}_1$, *реализующий минимум расстояния* $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ *для всех* $\mathbf{y}$ *из* $\mathcal{U}_1$. *Кроме того,* $\mathbf{x}_p$ *является единственным вектором* $\mathbf{y}$ *из* $\mathcal{U}_1$, *для которого разность* $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ *ортогональна каждому вектору* $\mathbf{x}_1$ *из* $\mathcal{U}_1$, *т. е.*

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_1) = 0 \qquad (\mathbf{x}_1 \text{ из } \mathcal{U}_1) \tag{14.2-9}$$

(см. также п. 14.7-3). Отображение $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_p$ есть ограниченный линейный оператор (п. 14.4-2), называемый **ортогональной проекцией пространства** $\mathcal{U}$ **на** $\mathcal{U}_1$. Теорема о проекции чрезвычайно важна для практики, потому что условие (9) определяет оптимальное приближение вектора $\mathbf{x}$ вектором $\mathbf{y}$ из «более простого» класса $\mathcal{U}_1$, если погрешность приближения измеряется числом $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$.

Примеры: Проекция точек на плоскость в евклидовой геометрии, ортогональные приближения (пп. 15.2-3, 15.2-6, 20.6-2 и 20.6-3), средняя квадратическая регрессия (п. 18.4-6).

14.3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ)

14.3-1. Линейные преобразования векторных пространств. Линейные операторы. Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ — линейные векторные пространства над одним и тем же полем скаляров $\alpha, \beta, \ldots$ Тогда **(однородное) линейное преобразование** пространства $\mathcal{U}$ в пространство $\mathcal{U}'$ есть отображение

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{14.3-1}$$

ставящее каждому вектору $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ в соответствие некоторый вектор $\mathbf{x}' \in \mathcal{U}'$ так, что при этом сохраняются «линейные» операции сложения векторов и умножения векторов на скаляры:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}), \qquad \mathbf{f}(\alpha\mathbf{x}) \equiv \alpha\,\mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{14.3-2}$$

Каждое линейное преобразование может быть записано как умножение вектора на **линейный оператор** $\mathbf{A}$ **(линейную операцию)**, причем

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \equiv \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}, \qquad \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) \equiv \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x}). \tag{14.3-3}$$

Линейное преобразование (оператор), отображающее линейное векторное пространство $\mathcal{U}$ *в себя, называется* **линейным оператором в пространстве** $\mathcal{U}$.

Функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}'$ называется **линейной векторной функцией.** При задании каждого линейного оператора должна быть указана область его определения. В физике первое из соотношений (3) часто называют принципом суперпозиции для данного класса операций.

14.3-2. Множество значений, ядро и ранг линейного преобразования (оператора). *Множество значений* линейного преобразования $\mathbf{A}$ (образ при преобразовании $\mathbf{A}$, п. 12.1-4) линейного векторного пространства $\mathcal{U}$ в линейное

векторное пространство $\mathcal{U}'$ есть линейное многообразие (п. 14.2-2) в $\mathcal{U}'$. **Ядро** линейного преобразования А есть многообразие в $\mathcal{U}$, состоящее из всех векторов, отображающихся в нулевой вектор пространства $\mathcal{U}'$. **Ранг** r и **размерность ядра** r' линейного преобразования А — это соответственно линейные размерности (п. 14.2-4, b) множества его значений и его ядра. *Если $\mathcal{U}$ имеет конечную размерность n, то множество значений и ядро любого линейного преобразования* А *являются подпространствами, и* $r+r'=n$.

14.3-3. Сложение и умножение на скаляры. Нулевое преобразование.

(a) Пусть А и В — линейные преобразования (операторы), отображающие $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}'$. Тогда по определению $\mathsf{A} \pm \mathsf{B}$ и $\alpha\mathsf{A}$ — линейные преобразования пространства $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}'$, при которых

$$(\mathsf{A} \pm \mathsf{B})\,\mathbf{x} = \mathsf{A}\mathbf{x} \pm \mathsf{B}\mathbf{x}, \qquad (\alpha\mathsf{A})\,\mathbf{x} = \alpha\,(\mathsf{A}\mathbf{x}) \tag{14.3-4}$$

для всех векторов $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$.

(b) **Нулевое преобразование** О пространства $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}'$ определяется условием $\mathsf{O}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ для всех векторов $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$, где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор пространства $\mathcal{U}'$.

14.3-4. Произведение двух линейных преобразований (операторов). Тождественное преобразование.

(a) Пусть А — линейное преобразование (оператор), отображающее $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}'$, и В — линейное преобразование, отображающее $\mathcal{U}'$ (множество значений преобразования А) в $\mathcal{U}''$. **Произведение** ВА есть линейное преобразование пространства $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}''$, получающееся, если последовательно произвести преобразования А и В (см. также п. 12.2-8):

$$(\mathsf{BA})\,\mathbf{x} \equiv \mathsf{B}\,(\mathsf{A}\mathbf{x}). \tag{14.3-5}$$

(b) **Тождественное преобразование** I любого векторного пространства $\mathcal{U}$ переводит каждый вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ в себя:

$$\mathsf{I}\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}, \qquad \mathsf{I}'\mathsf{A} \equiv \mathsf{A}\mathsf{I} = \mathsf{A}, \tag{14.3-6}$$

где А — линейное преобразование пространства $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}'$, а I и I′ — соответственно тождественные преобразования этих пространств.

14.3-5. Невырожденные линейные преобразования (операторы). Обратные преобразования (операторы). Линейное преобразование (оператор) А называется **невырожденным (неособенным)**, если оно взаимно однозначно отображает пространство $\mathcal{U}$ на все пространство $\mathcal{U}'$ (пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ в этом случае необходимо изоморфны, п. 14.2-2). Преобразование А является невырожденным в том и только в том случае, если оно имеет единственное **обратное преобразование (обратный оператор)** A^{-1}, отображающее $\mathcal{U}'$ на $\mathcal{U}$ так, что из $\mathbf{x}' = \mathsf{A}\mathbf{x}$ следует $\mathbf{x} = \mathsf{A}^{-1}\mathbf{x}'$, и наоборот, или

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{I}', \qquad \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I}, \tag{14.3-7}$$

где I и I′ — тождественные преобразования соответственно в $\mathcal{U}$ и в $\mathcal{U}'$.

Произведения и обратные преобразования невырожденных преобразований (операторов) являются невырожденными; если А и В не вырождены и $\alpha \neq 0$, то

$$(\mathsf{AB})^{-1} = \mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1}, \qquad (\alpha\mathsf{A})^{-1} = \alpha^{-1}\mathsf{A}^{-1}, \qquad (\mathsf{A}^{-1})^{-1} = \mathsf{A}. \tag{14.3-8}$$

Невырожденные линейные преобразования (операторы) сохраняют линейную независимость векторов, а потому и линейные размерности отображаемых многообразий (пп. 14.2-3 и 14.2-4).

Линейное преобразование (оператор) А, *определенное на конечномерном векторном пространстве, невырождено в том и только в том случае, если из* $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *следует* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *т. е. если* $r = n$ *и* $r' = 0$ (п. 14.3-2).

14.3-6. Целые степени операторов. Пусть А — линейный оператор в линейном векторном пространстве $\mathcal{U}$. По определению $\mathsf{A}^0 \equiv \mathsf{I}$, $\mathsf{A}^1 = \mathsf{A}$, $\mathsf{A}^2 = \mathsf{AA}$, $\mathsf{A}^3 = \mathsf{AAA}$, ... и, если А — невырожденный, $\mathsf{A}^{-p} = (\mathsf{A}^{-1})^p = (\mathsf{A}^p)^{-1}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ Справедливы обычные правила действий со степенями (см. также п. 12.4-2).

14.4. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В НОРМИРОВАННОМ ИЛИ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЭРМИТОВЫ И УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

14.4-1. Ограниченные линейные преобразования (см. также п. 13.2-1, а). Линейное преобразование $\mathbf{A}$ нормированного векторного пространства (п. 14.2-5) $\mathcal{U}$ в нормированное векторное пространство $\mathcal{U}'$ называется **ограниченным**, если $\mathbf{A}$ имеет конечную **норму**

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{U} \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\|. \tag{14.4-1}$$

Отметим, что

$$\left.\begin{array}{l} \|\mathbf{A}\| \geqslant 0, \ \|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{A}\|, \ \|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|, \\ \|\mathbf{AB}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|, \ \|\mathbf{Ax}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{x}\|. \end{array}\right\} \tag{14.4-2}$$

Каждое линейное преобразование (оператор), определенное на конечномерном нормированном векторном пространстве, ограничено.

*Линейное преобразование $\mathbf{A}$ нормированного векторного пространства $\mathcal{U}$ в нормированное векторное пространство $\mathcal{U}'$ непрерывно, если оно непрерывно как отображение метрического пространства $\mathcal{U}$ в метрическое пространство $\mathcal{U}'$ (см. пп. 14.2-7 и 12.5-3, b). *Линейное преобразование одного нормированного векторного пространства в другое непрерывно в том и только в том случае, если оно ограничено.**

Если $\mathcal{U}$ — унитарное векторное пространство (п. 14.2-6) и $\mathbf{A}$ — линейный оператор в $\mathcal{U}$, т. е. оператор, отображающий $\mathcal{U}$ в себя (п. 14.3-1), то

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in U \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\| = \sup_{\substack{\mathbf{x} \neq 0 \\ \mathbf{y} \neq 0}} \frac{|(\mathbf{x}, \mathbf{Ay})|}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} = \sup_{\|\mathbf{x}\|=\|\mathbf{y}\|=1} |(\mathbf{x}, \mathbf{Ay})|. \tag{14.4-3}$$

14.4-2. Ограниченные линейные операторы в нормированном векторном пространстве.

(а) *Ограниченные линейные операторы* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, ... *в нормированном векторном пространстве* $\mathcal{U}$ *составляют линейную алгебру* (п. 12.4-2), *операции в которой определены в* пп. 14.3-3 и 14.3-4, *причем нулем служит нулевой, а единицей тождественный оператор. Вырожденные операторы являются в этой алгебре делителями нуля* (п. 12.3-1, а), *а невырожденные образуют мультипликативную группу и вместе с нулевым оператором — алгебру с делением* (п. 12.4-2). Если $\mathcal{U}$ — пространство конечной размерности n, то алгебра линейных операторов имеет ранг n^2.

Алгебра операторов, вообще говоря, *не* коммутативна (см. также п. 12.4-2). Оператор $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ называется **коммутатором** операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

(b) Ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве (п. 14.2-7, b) позволяют, как в пп. 13.2-11 и 13.2-12, определить с помощью метрики $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$ *сходящиеся последовательности и аналитические функции операторов* (п. 12.5-3).

14.4-3. Сопряженный оператор. Каждый ограниченный линейный оператор $\mathbf{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{U}$ имеет единственный **сопряженный оператор** $\mathbf{A}^*$, определяемый условием

$$(\mathbf{x}, \mathbf{Ay}) = (\mathbf{A}^*\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ для всех } \mathbf{x} \text{ и } \mathbf{y} \text{ из } \mathcal{U}. \tag{14.4-4}$$

При этом

$$\left.\begin{array}{c}(\mathsf{A}+\mathsf{B})^*=\mathsf{A}^*+\mathsf{B}^*,\quad (\alpha\mathsf{A})^*=\bar{\alpha}\mathsf{A}^*,\\ (\mathsf{AB})^*=\mathsf{B}^*\mathsf{A}^*,\ (\mathsf{A}^{-1})^*=(\mathsf{A}^*)^{-1},\ (\mathsf{A}^*)^*=\mathsf{A},\\ \|\mathsf{A}^*\|=\|\mathsf{A}\|,\quad \|\mathsf{A}^*\mathsf{A}\|=\|\mathsf{A}\|^2,\quad \mathsf{O}^*=\mathsf{O},\quad \mathsf{I}^*=\mathsf{I};\end{array}\right\} \tag{14.4-5}$$

$$(\mathsf{A}\mathbf{x},\ \mathsf{B}\mathbf{y})\equiv(\mathbf{x},\ \mathsf{A}^*\mathsf{B}\mathbf{y})\equiv(\mathsf{B}^*\mathsf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{y}). \tag{14.4-6}$$

(см. также пп. 14.2-6, а, 14.2-7, b и 14.4-9).

14.4-4. Эрмитовы операторы. Линейный оператор A в гильбертовом пространстве $\mathcal{U}$ называется **эрмитовым (самосопряженным)**, если

$$\mathsf{A}^*=\mathsf{A},\ \text{т. е.}\ (\mathbf{x},\ \mathsf{A}\mathbf{y})=(\mathsf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{y})\ \text{для всех}\ \mathbf{x}\ \text{и}\ \mathbf{y}\ \text{из}\ \mathcal{U}. \tag{14.4-7}$$

Если $\mathcal{U}$ — комплексное гильбертово пространство, то оператор A *является эрмитовым в том и только в том случае, если скалярное произведение* (x, Ax) *для всех* x *действительно, или*

$$(\mathbf{x},\ \mathsf{A}\mathbf{x})=\overline{(\mathsf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{x})}=(\mathsf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{x})\ \text{для всех}\ \mathbf{x}\in\mathcal{U}. \tag{14.4-8}$$

Всякий эрмитов оператор в комплексном гильбертовом пространстве является ограниченным. Оператор A, удовлетворяющий условию $\mathsf{A}^*=-\mathsf{A}$, называется **косоэрмитовым.**

Эрмитовы операторы играют важную роль в тех приложениях, где требуется, чтобы скалярное произведение (x, Ax) было действительным числом (теория колебаний, квантовая механика). Эрмитов оператор A называется соответственно **положительно определенным, отрицательно определенным, неотрицательным, неположительным, положительно полуопределенным, отрицательно полуопределенным, неопределенным** или **нулевым**, если это же верно для скалярного произведения (эрмитовой формы) (x, Ax) (см. также пп. 13.5-3 и 14.7-1).

14.4-5. Унитарные операторы. Линейный оператор A в гильбертовом пространстве $\mathcal{U}$ называется **унитарным,** если

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A}=\mathsf{A}\mathsf{A}^*=\mathsf{I},\ \text{т. е.}\ \overline{\mathsf{A}^*=\mathsf{A}^{-1}}. \tag{14.4-9}$$

Каждый унитарный оператор является невырожденным и ограниченным и $\|\mathsf{A}\|=1$. *Каждое унитарное преобразование* $\mathbf{x}'=\mathsf{A}\mathbf{x}$, *где* A — *унитарный оператор, сохраняет скалярное произведение:*

$$\left.\begin{array}{l}(\mathbf{x}',\ \mathbf{y}')=(\mathsf{A}\mathbf{x},\ \mathsf{A}\mathbf{y})=(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\ \text{для всех}\ \mathbf{x}\ \text{и}\ \mathbf{y}\ \text{из}\ \mathcal{U},\\ \|\mathbf{x}'\|=\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|=\|\mathbf{x}\|\ \text{для всех}\ \mathbf{x}\in\mathcal{U}.\end{array}\right\} \tag{14.4-10}$$

Если пространство $\mathcal{U}$ *конечномерно*, то каждое из соотношений (10) *влечет* за собой унитарность оператора A.

Унитарные операторы сохраняют скалярное произведение векторов, а также сложение векторов и произведение векторов на скаляры; таким образом, при унитарных преобразованиях норма векторов, расстояния, углы, ортогональность и ортонормированность (пп. 14.2-7, а и 14.7-3) инвариантны (п. 12.1-5).

14.4-6. Симметрические, кососимметрические и ортогональные операторы в действительных унитарных векторных пространствах.

(а) Оператор A^*, сопряженный (п. 14.4-3) с линейным оператором A в *действительном* гильбертовом пространстве $\mathcal{U}$, часто называется **транспонированным** оператором (*преобразованием*) и обозначается символом A'; он удовлетворяет соотношениям

$$(\mathbf{x},\ \mathsf{A}\mathbf{y})=(\mathsf{A}\mathbf{y},\ \mathbf{x})=(\mathsf{A}'\mathbf{x},\ \mathbf{y})=(\mathbf{y},\ \mathsf{A}'\mathbf{x})\ \text{для всех}\ \mathbf{x}\ \text{и}\ \mathbf{y}\ \text{из}\ \mathcal{U}. \tag{14.4-11}$$

Если рассматриваемое векторное пространство действительно, то во всех соотношениях из п. 14.4-3 *вместо* A^* *можно писать* A'.

(b) Линейный оператор (преобразование) $\mathbf{A}$ в действительном гильбертовом пространстве $\mathcal{U}$ называется **симметрическим**, если

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}, \text{ т. е. } (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y})=(\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{x}) \text{ для всех } \mathbf{x} \text{ и } \mathbf{y} \text{ из } \mathcal{U}, \qquad (14.4\text{-}12)$$

кососимметрическим (антисимметрическим), если

$$\mathbf{A}'=-\mathbf{A}, \text{ т. е. } (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y})=-(\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{x}) \text{ для всех } \mathbf{x} \text{ и } \mathbf{y} \text{ из } \mathcal{U}, \qquad (14.4\text{-}13)$$

ортогональным, если

$$\mathbf{A}'\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}'=\mathbf{I}, \text{ т. е. } \mathbf{A}'=\mathbf{A}^{-1}. \qquad (14.4\text{-}14)$$

Ортогональные операторы в действительном гильбертовом пространстве являются унитарными, так что для них верны утверждения из п. 14.4-5.

14.4-7. Правила комбинирования (см. также п. 13.3-3).

(a) *Если $\mathbf{A}$ — эрмитов оператор, то это же верно и для операторов $\mathbf{A}^p$ ($p=0, 1, 2, \ldots$), $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{T}^*\mathbf{A}\mathbf{T}$ и, если α — действительное число, для оператора $\alpha\mathbf{A}$. Если α — чисто мнимое, то оператор $\alpha\mathbf{A}$ — косоэрмитов.*

Если *$\mathbf{T}$ — любой невырожденный оператор, то оператор $\mathbf{T}^*\mathbf{A}\mathbf{T}$ является эрмитовым в том и только в том случае, если эрмитовым является оператор $\mathbf{A}$; поэтому для любого унитарного оператора $\mathbf{T}$ оператор $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ является эрмитовым в том и только в том случае, если это же верно для оператора $\mathbf{A}$.*

В частности, *если рассматриваемое гильбертово пространство действительно и $\mathbf{A}$ — симметрический оператор, то такими же будут и операторы $\mathbf{A}^p$ ($p=0, 1, 2, \ldots$), $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T}$ и $\alpha\mathbf{A}$. Если $\mathbf{T}$ — любой невырожденный оператор, то оператор $\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T}$ является симметрическим в том и только в том случае, если симметрическим является и $\mathbf{A}$; для любого ортогонального оператора $\mathbf{T}$ оператор $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ является симметрическим в том и только в том случае, если это же верно и для $\mathbf{A}$.*

(b) *Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — эрмитовы (или симметрические) операторы, то это же верно и для суммы $\mathbf{A}+\mathbf{B}$. Произведение $\mathbf{A}\mathbf{B}$ двух эрмитовых (или симметрических) операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ является эрмитовым (или симметрическим) оператором в том и только в том случае, если $\mathbf{B}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{B}$* (см. также п. 13.4-4, b).

(c) *Если $\mathbf{A}$ — унитарный оператор, то это же верно и для $\mathbf{A}^p$ ($p=0, 1, 2, \ldots$), $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}^*$, а если $|\alpha|=1$, то и для $\alpha\mathbf{A}$. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — унитарные операторы, то и $\mathbf{A}\mathbf{B}$ — унитарный оператор.*

Если $\mathbf{A}$ — ортогональный оператор, то это же верно и для $\mathbf{A}^p$ ($p=0, 1, 2, \ldots$), $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}'$ и $-\mathbf{A}$. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — ортогональные операторы, то $\mathbf{A}\mathbf{B}$ — ортогональный оператор.

14.4-8. Теоремы о разложении. Нормальные операторы (см. также пп. 13.3-4 и 14.8-4).

(a) Для каждого ограниченного линейного оператора $\mathbf{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{U}$ операторы $\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*)=\mathbf{H}_1$ и $\frac{1}{2i}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^*)=\mathbf{H}_2$ являются эрмитовыми. Представление $\mathbf{A}=\mathbf{H}_1+i\mathbf{H}_2$ есть (единственное) *разложение* данного оператора $\mathbf{A}$ на *эрмитову* и *косоэрмитову* части (ср. с разложением комплексного числа на действительную и мнимую части).

Если пространство $\mathcal{U}$ действительно, то это разложение превращается в (единственное) разложение оператора $\mathbf{A}$ на *симметрическую часть* $\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}')$ и *кососимметрическую часть* $\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}')$.

Для каждого ограниченного линейного оператора $\mathbf{A}$ в гильбертовом пространстве операторы $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ и $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ являются *эрмитовыми* и *неотрицательными*.

Существует *разложение* $\mathbf{A}=\mathbf{Q}\mathbf{U}$ оператора $\mathbf{A}$ *в произведение* неотрицательного эрмитова оператора $\mathbf{Q}$ и унитарного оператора $\mathbf{U}$. Оператор $\mathbf{Q}$ однозначно определяется условием $\mathbf{Q}^2=\mathbf{A}\mathbf{A}^*$, а оператор $\mathbf{U}$ определяется однозначно в том и только в том случае, если $\mathbf{A}$ — невырожденный оператор. Аналогично $\mathbf{A}=\mathbf{U}_1\mathbf{Q}_1$, где $\mathbf{Q}_1^2=\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ (ср. с п. 13.3-4, a).

(b) Оператор $\mathbf{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{U}$ называется **нормальным** оператором, если $\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ или, что эквивалентно, если $\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1=\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2$. *Ограниченный линейный оператор* $\mathbf{A}$ *нормален в том и только в том случае, если* $\|\mathbf{Ax}\|=\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{x}\|$ *для всех* $\mathbf{x}\in\mathcal{U}$. Эрмитовы и унитарные операторы нормальны.

14.4-9. Сопряженные векторные пространства. Более общее определение сопряженных операторов.

(a) Ограниченные линейные преобразования $\mathbf{A}$ нормированного векторного пространства $\mathcal{U}$ в произвольное полное нормированное векторное пространство (банахово пространство, п. 14.2-7) образуют полное нормированное векторное пространство, сложение и умножение в котором определяются формулами (14.3-4), а нормой служит $\|\mathbf{A}\|$. В частности, *множество ограниченных* (в смысле п. 14.4-1) *линейных* (*и однородных*) *скалярных функций* $\varphi(\mathbf{x})$ (**линейных функционалов**), *определенных на нормированном векторном пространстве* $\mathcal{U}$, *составляет полное нормированное векторное пространство* $\mathcal{U}^*$, **сопряженное (дуальное, двойственное)** *к пространству* $\mathcal{U}$.

Пусть

$$\mathbf{x}'=\mathbf{Ax}$$

— ограниченное линейное преобразование пространства $\mathcal{U}$ в какое-либо другое нормированное векторное пространство $\mathcal{U}'$. Тогда условие

$$\varphi'(\mathbf{x}')\equiv\varphi'(\mathbf{Ax})\equiv\varphi(\mathbf{x}) \tag{14.4-15a}$$

определяет ограниченное линейное преобразование

$$\varphi=\mathbf{A}^*\varphi' \tag{14.4-15b}$$

пространства $\mathcal{U}'^*$, сопряженного к $\mathcal{U}'$, в пространство $\mathcal{U}^*$, сопряженное к $\mathcal{U}$. Оператор $\mathbf{A}^*$ называется **сопряженным оператором** к оператору $\mathbf{A}$; имеем

$$\|\mathbf{A}^*\|=\|\mathbf{A}\|. \tag{14.4-16}$$

Заметим, что $(\mathbf{A}^*)^*$, вообще говоря, *не* совпадает с $\mathbf{A}$.

(b) *Каждую ограниченную линейную* (*однородную*) *скалярную функцию* $\varphi(\mathbf{x})$ (*линейный функционал*), *определенную на гильбертовом пространстве* $\mathcal{U}$, *можно представить в виде скалярного произведения*

$$\varphi(\mathbf{x})=(\mathbf{u},\ \mathbf{x}), \tag{14.4-17}$$

где $\mathbf{u}$ — некоторый вектор из $\mathcal{U}$. Соответствие между векторами φ из $\mathcal{U}^*$ и векторами $\mathbf{u}$ из $\mathcal{U}$ является изоморфизмом, и на основании п. 14.4-1

$$\|\varphi(\mathbf{x})\|\equiv\sup_{\|x\|=1}\varphi(\mathbf{x})\equiv\|\mathbf{u}\|, \tag{14.4-18}$$

и следовательно, это соответствие является изометрией (пп. 12.5-2 и 14.2-7). Поэтому гильбертово пространство является **самосопряженным**, т. е. оно изоморфно и изометрично сопряженному к нему пространству. Определение оператора, сопряженного к линейному оператору в гильбертовом пространстве, можно тогда свести к простому определению сопряженного оператора, приведенному в п. 14.4-3.

14.4-10. Бесконечно малые линейные преобразования (см. также пп. 4.5-3 и 14.10-5).

(a) **Бесконечно малое линейное преобразование (бесконечно малый линейный оператор)** в нормированном действительном или комплексном векторном пространстве имеет вид

$$\mathbf{A}=\mathbf{I}+\varepsilon\mathbf{B}, \tag{14.4-19}$$

где $\mathbf{B}$ — ограниченный оператор, а $|\varepsilon|^2$ пренебрежимо мало по сравнению с 1 (обычно ε — скалярный дифференциал), т. е. $|\varepsilon|^2\approx 0$.

(b) *Для бесконечно малых линейных преобразований*

$$\mathsf{A}=\mathsf{I}+\varepsilon\mathsf{B},\ \mathsf{A}_1=\mathsf{I}+\varepsilon_1\mathsf{B}_1,\ \mathsf{A}_2=\mathsf{I}+\varepsilon_2\mathsf{B}_2$$

имеем

$$\mathsf{A}^{-1}=\mathsf{I}-\varepsilon\mathsf{B},\ \mathsf{A}_1\mathsf{A}_2=\mathsf{I}+(\varepsilon_1\mathsf{B}_1+\varepsilon_2\mathsf{B}_2)=\mathsf{A}_2\mathsf{A}_1. \qquad (14.4\text{-}20)$$

Бесконечно малые линейные преобразования (операторы) перестановочны.

(c) *Бесконечно малое линейное преобразование* $\mathsf{A}=\mathsf{I}+\varepsilon\mathsf{B}$ *в унитарном векторном пространстве является унитарным в том и только в том случае, если оператор* $\varepsilon\mathsf{B}$ *косоэрмитов. Бесконечно малое линейное преобразование* $\mathsf{A}=\mathsf{I}+\varepsilon\mathsf{B}$ *в действительном унитарном векторном пространстве является ортогональным в том и только в том случае, если оператор* $\varepsilon\mathsf{B}$ *кососимметричен.*

14.5. МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (ОПЕРАТОРОВ)

14.5-1. Преобразование базисных векторов и координат векторов: «активная» точка зрения (см. также п. 14.1-3). Рассмотрим конечномерное[1]) действительное или комплексное векторное пространство $\mathcal{U}_n$ с системой координат, определяемой n базисными векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ (п. 14.2-4). Каждый вектор

$$\mathbf{x}=\xi_1\mathbf{e}_1+\xi_2\mathbf{e}_2+\ldots+\xi_n\mathbf{e}_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mathbf{e}_k \qquad (14.5\text{-}1)$$

описывается своими координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Линейное преобразование (оператор) A в пространстве $\mathcal{U}_n$ (п. 14.3-1) переводит каждый базисный вектор $\mathbf{e}_k$ в соответствующий вектор

$$\mathbf{e}'_k=\mathsf{A}\mathbf{e}_k=a_{1k}\mathbf{e}_1+a_{2k}\mathbf{e}_2+\ldots+a_{nk}\mathbf{e}_n=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\mathbf{e}_i \quad (k=1, 2, \ldots, n), \qquad (14.5\text{-}2)$$

а каждый вектор $\mathbf{x}\in\mathcal{U}_n$ — в соответствующий вектор $\mathbf{x}'\in\mathcal{U}_n$:

$$\mathbf{x}'=\mathsf{A}\mathbf{x}=\mathsf{A}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mathbf{e}_k=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mathbf{e}'_k=\sum_{i=1}^{n}\xi'_i\mathbf{e}_i. \qquad (14.5\text{-}3)$$

Координаты ξ'_i вектора $\mathbf{x}'$ и координаты ξ_k вектора $\mathbf{x}$ **отнесены к одному и тому же базису** $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и связаны n линейными однородными соотношениями преобразования

$$\left.\begin{aligned}\xi'_1&=a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+\ldots+a_{1n}\xi_n,\\ \xi'_2&=a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+\ldots+a_{2n}\xi_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \xi'_n&=a_{n1}\xi_1+a_{n2}\xi_2+\ldots+a_{nn}\xi_n\end{aligned}\right\}\ \text{(преобразование координат векторов, «активная» точка зрения).} \qquad (14.5\text{-}4)$$

---

[1]) Теория пп. 14.5-1 — 14.7-7 применима и к некоторым бесконечномерным векторным пространствам (пп. 14.2-4 — 14.2-7, b). Такие пространства должны допускать определение счетных базисов (п. 14.2-4), а также ортонормированных базисов (п. 14.7-4) и сходимости (п. 14.2-7), так что суммы вроде той, которая рассматривается в (1), превращаются в сходящиеся бесконечные ряды. *В частности, это справедливо для всякого сепарабельного гильбертова пространства* (п. 14.2-7, c). Векторные пространства, не допускающие счетных базисов, могут быть представлены подходящими пространствами функций (п. 15.2-1).

14.5-2. Матричное представление векторов и линейных преобразований (операторов). Для каждого данного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ в пространстве $\mathcal{U}_n$:

1) векторы $\mathbf{x} \equiv \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \xi_n\mathbf{e}_n$ в $\mathcal{U}_n$ взаимно однозначно представляются матрицами-столбцами $\{\xi_k\}$ (п. 13.2-1);

2) линейные преобразования (операторы) в $\mathcal{U}_n$ взаимно однозначно представляются квадратными матрицами $A \equiv [a_{ik}]$ порядка n, определяемыми в (2) или (4).

Соответствие между векторами и операторами и указанными матрицами есть изоморфизм (п. 12.1-6): суммы и произведения, содержащие скаляры, векторы и операторы, переходят в аналогичные суммы и произведения матриц. Тождественный оператор переходит в единичную матрицу, а обратный оператор — в обратную матрицу; невырожденным операторам соответствуют невырожденные матрицы, и наоборот.

В частности, бескоординатное векторное равенство

$$\mathbf{x}' = \mathsf{A}\mathbf{x} \tag{14.5-5}$$

представляется в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ матричным равенством

$$x' = \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \ldots \\ \xi'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{pmatrix} = Ax, \tag{14.5-6}$$

которое эквивалентно n соотношениям (4); произведение линейных преобразований A и B представляется произведением соответствующих матриц A и B.

Замечание. Преобразования n-мерного векторного пространства $\mathcal{U}_n$ в m-мерное векторное пространство $\mathcal{U}_m$ можно подобным же образом представить матрицами размера $m \times n$. Преобразования, связывающие два действительных векторных пространства, всегда можно представить действительными матрицами.

14.5-3. Матричные обозначения для систем линейных уравнений (см. также пп. 1.9-2 — 1.9-5). Система линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{14.5-7}$$

эквивалентна матричному уравнению

$$Ax = b \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{14.5-8}$$

Неизвестные x_k можно рассматривать как координаты неизвестного вектора, для которого преобразование (8) дает вектор с координатами b_i. Если, в частности, матрица $[a_{ik}]$ не вырождена (п. 13.2-3), то матричное уравнение (8) имеет единственное решение

$$x = A^{-1}b; \tag{14.5-9}$$

Формула (9) эквивалентна правилу Крамера (1.9-4).

14.5-4. Диадическое представление линейных операторов. Линейный оператор **A** в n-мерном векторном пространстве может быть выражен в виде суммы n внешних произведений пар векторов (n диад) по способу п. 16.9-1. Соответствующая матрица A размера $n \times n$ может быть аналогично выражена в виде суммы внешних произведений пар матриц-строк и матриц-столбцов (см. также п. 13.2-10).

14.6. ЗАМЕНА СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

14.6-1. Преобразование базисных векторов и координат векторов: «пассивная» точка зрения (см. также п. 14.1-3).

(a) Если дан координатный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ в конечномерном [1]) векторном пространстве $\mathcal{U}_n$, то *m векторов* $\mathbf{a}_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\mathbf{e}_i$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ *линейно независимы* (п. 14.2-3) *в том и только в том случае, если матрица* $[\alpha_{ik}]$ *имеет ранг* m (см. также п. 1.9-3).

В частности, для каждого координатного базиса $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_n$ в $\mathcal{U}_n$

$$\tilde{\mathbf{e}}_k = t_{1k}\mathbf{e}_1 + t_{2k}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{nk}\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} t_{ik}\mathbf{e}_i \qquad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{14.6-1}$$

где $\det[t_{ik}] \neq 0$ (*преобразование базисных векторов*).

Матрица $T \equiv [t_{ik}]$ представляет (необходимо невырожденное) преобразование $\mathbf{T}$, связывающее старые базисные векторы $\mathbf{e}_i$ и новые базисные векторы $\tilde{\mathbf{e}}_k = \mathbf{T}\mathbf{e}_k$ (в смысле равенства (14.5-2)).

(b) Теперь каждый вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_n$ может быть выражен как через координаты ξ_i относительно системы $\mathbf{e}_i$, так и через координаты $\tilde{\xi}_k$ относительно системы $\tilde{\mathbf{e}}_k$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\xi}_k\tilde{\mathbf{e}}_k. \tag{14.6-2}$$

Координаты ξ_i и $\tilde{\xi}_k$ одного и того же вектора **x** связаны n линейными однородными соотношениями преобразования

$$\left.\begin{aligned} &\xi_1 = t_{11}\tilde{\xi}_1 + t_{12}\tilde{\xi}_2 + \ldots + t_{1n}\tilde{\xi}_n, \\ &\xi_2 = t_{21}\tilde{\xi}_1 + t_{22}\tilde{\xi}_2 + \ldots + t_{2n}\tilde{\xi}_n, \quad \text{(преобразование координат векторов: «пассивная» точка зрения)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\xi_n = t_{n1}\tilde{\xi}_1 + t_{n2}\tilde{\xi}_2 + \ldots + t_{nn}\tilde{\xi}_n \\ &\text{или в матричной форме} \\ &x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \\ \ldots \\ \tilde{\xi}_n \end{pmatrix} = T\tilde{x}. \end{aligned}\right\} \tag{14.6-3}$$

Смысл соотношений преобразования (3) следует отличать от смысла формально аналогичных соотношений (14.5-4) и (14.5-6).

---

[1]) См. сноску к п. 14.5-1.

Отметим также обратные соотношения, именно

$$\mathbf{e}_i = \mathsf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_{ik}}{\det[t_{ik}]}\tilde{\mathbf{e}}_k \qquad (i = 1, 2, \dots, n); \tag{14.6-4}$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\xi}_k &= \sum_{i=1}^{n} \frac{T_{ki}}{\det[t_{ik}]}\xi_i \qquad (k = 1, 2, \dots, n) \\ &\text{или} \\ \tilde{x} &= T^{-1}x, \end{aligned}\right\} \tag{14.6-5}$$

где T_{ik} — алгебраическое дополнение элемента t_{ik} в определителе $\det[t_{ik}]$ (п.1.5-2).

14.6-2. Представление линейного оператора в различных базисах.

(a) Рассмотрим линейный оператор A, представляемый матрицей A в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ (п. 14.5-2) и матрицей $\tilde{A}$ в базисе $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n$ так, что для каждого вектора

$$\mathbf{x}' = \mathsf{A}\mathbf{x}, \quad x' = Ax, \quad \tilde{x}' = \tilde{A}\tilde{x}. \tag{14.6-6}$$

Если дана матрица преобразования T, связывающая базисы $\mathbf{e}_i$ и $\tilde{\mathbf{e}}_k$, так что

$$x = T\tilde{x}, \qquad x' = T\tilde{x}' \tag{14.6-7}$$

(п. 14.6-1), то *матрицы A и $\tilde{A}$ связаны преобразованием подобия* (п. 13.4-1)

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \quad \text{или} \quad A = T\tilde{A}T^{-1}. \tag{14.6-8}$$

Наоборот, *каждая матрица $\tilde{A}$, связанная с матрицей A преобразованием подобия* (8), *представляет тот же самый линейный оператор* A *в координатном базисе* $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n$.

Если линейный оператор A в базисе $\mathbf{e}_k$ и линейный оператор B в базисе $\tilde{\mathbf{e}}_k = \mathsf{T}\mathbf{e}_k$ представляются одной и той же матрицей, то $\mathsf{B} = \mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{T}^{-1}$.

(b) *Все матрицы* (8), *представляющие один и тот же оператор* A, *имеют один и тот же ранг r, равный рангу оператора* A (п. 14.3-2). *След и определитель матрицы A также являются общими для всех матриц* (8) *и называются* **следом** $\mathrm{Tr}(\mathsf{A})$ и **определителем** $\det(\mathsf{A})$ **оператора** A (см. также пп. 14.1-4 и 13.4-1, b).

(c) Матричная запись преобразования базисных векторов. Если разрешить рассматривать строки и столбцы, состоящие из векторов, то соотношения (1) и (6) можно соответственно записать в виде

$$(\tilde{\mathbf{e}}_1 \ \tilde{\mathbf{e}}_2 \dots) = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \dots)\, T, \tag{14.6-9}$$

$$(\mathbf{e}'_1 \ \mathbf{e}'_2 \dots) = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \dots)\, A, \tag{14.6-10}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \dots)\, x = (\tilde{\mathbf{e}}_1 \ \tilde{\mathbf{e}}_2 \dots)\, \tilde{x}, \\ \mathbf{x}' &= (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \dots)\, x' = (\mathbf{e}'_1 \ \mathbf{e}'_2 \dots)\, x \end{aligned}\right\} \tag{14.6-11}$$

(см. также п. 16.6-2).

14.6-3. Последовательное применение операторов (см. также пп. 14.5-2 и 14.10-6).

(a) Пусть даны два невырожденных линейных оператора A и B, представленных в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ матрицами $A \equiv [a_{ik}]$ и $B \equiv [b_{ik}]$. Их последовательное применение

$$\mathbf{x}' = \mathsf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}'' = \mathsf{B}\mathbf{x}' = \mathsf{B}\mathsf{A}\mathbf{x} \tag{14.6-12}$$

представляется соотношениями

$$x' = Ax, \quad x'' = Bx' = BAx, \quad x = (BA)^{-1}x'', \tag{14.6-13}$$

где $x \equiv \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, $x' \equiv \{\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n\}$ и $x'' \equiv \{\xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_n\}$ — столбцы из компонент соответствующих векторов относительно базиса $\mathbf{e}_i$.

В частности, последовательное применение операторов A и B к базисным векторам $\mathbf{e}_k$ приводит к новым системам базисных векторов

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}'_k &= \mathsf{A}\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathbf{e}_i, \\ \mathbf{e}''_k &= \mathsf{B}\mathbf{e}'_k = \mathsf{BA}\mathbf{e}_k \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{14.6-14}$$

Следует обратить внимание на то, что оператор B, *вообще говоря, отличается от оператора, определяемого преобразованием базисных векторов* $\mathbf{e}'_k$ *с помощью матрицы* B:

$$\mathbf{e}'''_k = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\mathbf{e}'_i = \mathsf{ABA}^{-1}\mathbf{e}'_k = \mathsf{AB}\mathbf{e}_k, \tag{14.6-15}$$

и следовательно,

$$\mathbf{x}''' = \mathsf{AB}\mathbf{x}, \quad x''' = ABx, \tag{14.6-16}$$

так как матрица $B \equiv [b_{ik}]$ относительно базиса $\mathbf{e}'_k$ представляет оператор ABA^{-1}, а *не* B (см. п. 14.6-2, a).

(b) Столбцы $x \equiv \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, $\bar{x} \equiv \{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_n\}$ и $\bar{\bar{x}} \equiv \{\bar{\bar{\xi}}_1, \bar{\bar{\xi}}_2, \ldots, \bar{\bar{\xi}}_n\}$, представляющие один и тот же вектор

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k\mathbf{e}'_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{\bar{\xi}}_k\mathbf{e}''_k, \tag{14.6-17}$$

связаны преобразованиями пассивного типа

$$\bar{x} = A^{-1}BA\bar{\bar{x}}, \quad x = A\bar{x} = BA\bar{\bar{x}}, \quad \bar{\bar{x}} = (BA)^{-1}x. \tag{14.6-18}$$

Еще раз отметим, что, вообще говоря, $\bar{x} \neq B\bar{\bar{x}}$.

14.7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ БАЗИСЫ

14.7-1. Представление скалярного произведения (см. также пп. 14.2-6, 14.7-6 и 16.8-1). Пусть векторы $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\mathbf{e}_i$ в конечномерном [1] унитарном векторном пространстве $\mathcal{U}$ соответственно представляются матрицами-столбцами $a \equiv \{\alpha_i\}$ и $b \equiv \{\beta_i\}$ по способу п. 14.5-2 (см. также п. 13.2-1, b). Тогда

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g_{ik}\bar{\alpha}_i\beta_k = a^*Gb, \tag{14.7-1}$$

где

$$G \equiv [g_{ik}], \quad g_{ik} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

[1]) См. сноску к п. 14.5-1.

и $a^* \equiv (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ — матрица-строка. Матрица $G \equiv [g_{ik}]$ необходимо является эрмитовой ($g_{ik} = \bar{g}_{ki}$) и положительно определенной (п. 13.5-2); если $\mathcal{U}$ — действительное унитарное векторное пространство, то G — действительная и симметрическая матрица.

Соотношение (1) *позволяет описать через числовые координаты векторов нормы, углы, расстояния, сходимость и т. д. в* $\mathcal{U}$ (см. также п. 14.2-7). *В частности, для каждого вектора*

$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{e}_i$ *в* $\mathcal{U}$

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_{ik} \bar{\xi}_i \xi_k = x^* G x. \tag{14.7-2}$$

Эрмитова форма (2) (см. п. 13.5-3) называется **основной формой пространства** $\mathcal{U}$ **относительно базиса** $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

14.7-2. Замена системы координат (см. также пп. 14.6-1 и 16.8-1). Если ввести новые базисные векторы $\tilde{\mathbf{e}}_k$, для которых $a = T\tilde{a}$, $b = T\tilde{b}$ (п. 14.6-1), то из инвариантности (14.1-4) скалярного произведения

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^* G b = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_{ik} \bar{\alpha}_i \beta_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \tilde{g}_{ik} \bar{\tilde{\alpha}}_i \tilde{\beta}_k = \tilde{a}^* \tilde{G} \tilde{b} \tag{14.7-3}$$

следует, что

$$\tilde{G} \equiv [\tilde{g}_{ik}] \equiv [(\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_k)] \equiv T^* G T. \tag{14.7-4}$$

14.7-3. Ортогональные векторы и ортонормированные системы векторов.

(a) Два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ унитарного векторного пространства $\mathcal{U}$ (взаимно) **ортогональны**, если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ ($\cos\gamma = 0$, п. 14.2-7, b). **Ортонормированная (ортогональная нормированная)** система векторов есть система попарно ортогональных единичных векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots$ так, что

$$(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k) = \delta_{ik} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k \end{array} \right\} \quad (i, k = 1, 2, \ldots). \tag{14.7-5}$$

Каждая система попарно ортогональных ненулевых векторов (*и, в частности, каждая ортонормированная система*) *линейно независима.* Таким образом, наибольшее число векторов в любой такой системе (**ортогональная размерность** пространства $\mathcal{U}$) не может превышать линейную размерность пространства $\mathcal{U}$ (см. также пп. 14.2-3 и 14.2-4, b).

(b) Неравенство Бесселя (см. также п. 15.2-3, b). *Если даны конечная или бесконечная ортонормированная система* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots$ *и любой вектор* $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$, *то*

$$\sum_{k=1}^{m} |(\mathbf{u}_k, \mathbf{a})|^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2 \text{ (неравенство Бесселя)}. \tag{14.7-6}$$

Знак равенства имеет здесь место в том и только в том случае, если вектор $\mathbf{a}$ *принадлежит линейному многообразию, порождаемому данной ортонормированной системой* (см. также п. 14.7-4); m может быть как конечным, так и бесконечным; неравенство Бесселя часто используется для доказательства сходимости бесконечных рядов.

14.7-4. Ортонормированные базисы (полные ортонормированные системы).

(a) В конечномерном унитарном векторном пространстве размерности n каждая ортонормированная система из n векторов образует базис (**ортонормированный базис**). Вот более общее утверждение. *В каждом гильбертовом пространстве* $\mathcal{U}$ (п. 14.2-7, b) *ортонормированная система векторов* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots$

образует ортонормированный базис **(полную ортонормированную систему)** *в том и только в том случае, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1. Каждый вектор $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ может быть записан в виде

$$\mathbf{a} = \hat{\alpha}_1 \mathbf{u}_1 + \hat{\alpha}_2 \mathbf{u}_2 + \ldots, \qquad \text{где } \hat{\alpha}_k = (\mathbf{u}_k, \mathbf{a}) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

2. Для любого вектора $\mathbf{a} = \hat{\alpha}_1 \mathbf{u}_1 + \hat{\alpha}_2 \mathbf{u}_2 + \ldots$

$$\|\mathbf{a}\|^2 = |\hat{\alpha}_1|^2 + |\hat{\alpha}_2|^2 + \ldots \qquad (\textit{равенство Парсеваля}).$$

3. Для любой пары векторов $\mathbf{a} = \hat{\alpha}_1 \mathbf{u}_1 + \hat{\alpha}_2 \mathbf{u}_2 + \ldots$ и $\mathbf{b} = \hat{\beta}_1 \mathbf{u}_1 + \hat{\beta}_2 \mathbf{u}_2 + \ldots$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bar{\hat{\alpha}}_1 \hat{\beta}_1 + \bar{\hat{\alpha}}_2 \hat{\beta}_2 + \ldots$$

4. Ортонормированная система $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots$ не содержится ни в какой другой ортонормированной системе пространства $\mathcal{U}$. Для любого вектора $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ из $(\mathbf{u}_k, \mathbf{a}) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ следует, что $\mathbf{a} = 0$.

Из каждого из этих четырех условий следуют остальные три условия. Сравнительная простота выписанных выше выражений для $\|\mathbf{a}\|^2$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ делает ортонормированные базисы особенно удобными в качестве координатных базисов. Заметим, что *если* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{a}'$ — *два вектора с одними и теми же координатами* $\hat{\alpha}_k$, *то* $\|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\| = 0$ (*теорема единственности*).

(b) Построение ортонормированной системы векторов. *Если* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$ — *любая конечная или счетная система линейно независимых векторов в гильбертовом пространстве, то существует ортонормированная система* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots$ *порождающая то же самое линейное многообразие.*

Такую ортонормированную систему можно построить с помощью следующих рекуррентных формул (*процесс ортогонализации Грама — Шмидта*, см. также п. 15.2-5):

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}, \\ &\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{e}_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} (\mathbf{u}_k, \mathbf{e}_{i+1})\, \mathbf{u}_k \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots). \qquad (14.7\text{-}7)$$

14.7-5. Матрицы, соответствующие сопряженным операторам (см. также пп. 14.4-3 — 14.4-6, 13.3-1 и 13.3-2).

(a) Если линейный оператор $\mathbf{A}$ в конечномерном пространстве представляется в некотором базисе матрицей A, то сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$ представляется в этом же базисе матрицей $G^{-1}A^*G$[1]) (см. п. 14.7-1).

(b) Для *ортонормированного* базиса $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots$ имеем $G = I$ (см. п. 14.7-3) и

$$A \equiv [a_{ik}] \equiv [(\mathbf{u}_i, \mathbf{A}\mathbf{u}_k)]. \qquad (14.7\text{-}8)$$

Значит, *сопряженным операторам соответствуют сопряженные матрицы, и наоборот.* Таким образом, в случае ортонормированного базиса эрмитовым, косоэрмитовым и унитарным операторам соответствуют матрицы тех же типов, и наоборот. В частности, симметрическим, кососимметрическим и ортогональным операторам в действительных векторных пространствах соответствуют симметрические, кососимметрические и ортогональные матрицы.

Верно и более общее утверждение. В случае ортогонального (но не обязательно ортонормированного) базиса унитарным или ортогональным операторам соответствуют матрицы того же типа.

---

[1]) Заметим, что во взаимном базисе (п. 14.7-6) оператор $\mathbf{A}^*$ представляется матрицей A^*.

14.7-6. Взаимные базисы.

(a) Для каждого базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в конечномерном векторном пространстве существует единственный **взаимный (дуальный) базис** $e^1, e^2, \ldots, e^n$, определяемый симметричными соотношениями

$$(e^i, e_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq k, \\ 1, \text{ если } i = k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{14.7-9a}$$

так что каждый вектор e^i ортогонален всем e_k с $k \neq i$ и

$$[(e^i, e^k)] = G^{-1} = [(e_i, e_k)]^{-1}, \tag{14.7-9b}$$

$$e_k = \sum_{i=1}^{n} g_{ik} e^i \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{14.7-10}$$

(b) Векторы a, b, ..., представляемые в базисе e_i матрицами-столбцами $a, b, \ldots$, в базисе e^i представляются матрицами-столбцами $Ga, Gb, \ldots$,[1] и

$$(a, b) = a^*Gb = a^*(Gb) = (Ga)^*b = (Ga)^*G^{-1}(Gb). \tag{14.7-11}$$

Таблица 14.7-1

Сравнение различных обозначений скаляров, векторов и линейных операторов

Бескоординатные (инвариантные) обозначения	Матричные представления	Координаты (элементы матриц): условные обозначения	Координаты (элементы матриц): тензорные обозначения
α (скаляр)	α	α	α
(e_i, e_k)	$[(e_i, e_k)] \equiv G$	g_{ik}	g_{ik}
(e^i, e^k)	$[(e^i, e^k)] \equiv G^{-1}$	Нет специального символа	g^{ik}
a (вектор)	a	a_i	a^i
	Ga	Нет специального символа	$a_i = g_{ik} a^k$
y = Ax	$y = Ax$	$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k$	$y^i = A^i_k x^k$
A (линейный оператор)	A	a_{ik}	A^i_k
	GA	Нет специальных символов	$A_{ik} = g_{ij}A^j_k$
	AG^{-1}		$A^{ik} = A^i_j g^{jk}$
	GAG^{-1}		$A^k_i = g_{ij}A^j_h g^{hk}$

[1]) Векторы a, b можно также представить матрицами-строками $(Ga)^*, (Gb)^*, \ldots$ или $(Ga)', (Gb)', \ldots$, что соответствует представлению их ковариантными компонентами (пп. 16.2-1 и 16.7-3).

В частности, если

$$\mathrm{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{e}_i, \text{ то } (\mathrm{e}^i, \mathrm{a}) = \alpha_i.$$

Линейный оператор A, задаваемый в базисе e_i матрицей A, в базисе e^i представляется матрицей GAG^{-1}.

(c) Базис $\tilde{\mathrm{e}}^1, \tilde{\mathrm{e}}^2, \ldots, \tilde{\mathrm{e}}^n$, взаимный другой системе базисных векторов

$$\tilde{\mathrm{e}}_k = \sum_{i=1}^{n} t_{ik} \mathrm{e}_i, \qquad \text{где } \det [t_{ik}] \neq 0,$$

задается формулами

$$\mathrm{e}^k = \sum_{i=1}^{n} t_{ik} \tilde{\mathrm{e}}^i. \tag{14.7-12}$$

Говорят, что базисные векторы e^i и e_k преобразуются **контраградиентно** (см. также п. 16.6-2). Аналогично

$$\text{из } x = T\tilde{x} \text{ следует } \tilde{G}\tilde{x} = T\,(Gx). \tag{14.7-13}$$

(d) *Каждый ортонормированный базис* (п. 14.7-4, а) *совпадает со взаимным к нему базисом* (*является самодуальным*), *так что* $\mathrm{e}^i = \mathrm{e}_i = \mathrm{u}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и

$$G = I, \; Gx \equiv x, \; GAG^{-1} \equiv A. \tag{14.7-14}$$

14.7-7. Сравнение обозначений. Для того чтобы облегчить ссылки на стандартные учебники, в гл. 12-14 координаты векторов помечаются только *нижними индексами*. В усовершенствованной системе обозначений, применяемой в тензорном анализе и описываемой в п. 16.1-3, употребляются не только нижние, но и *верхние индексы*. В табл. 14.7-1 дается обзор различных обозначений, применяемых для описания векторов и линейных операторов; ею можно пользоваться для перевода одних обозначений в другие (см. также п. 16.2-1).

14.8. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

14.8-1. Вводные замечания. Изучение собственных векторов и собственных значений представляет исключительный практический интерес ввиду того, что

1) многие соотношения, в которые входит некоторый линейный оператор, радикально упрощаются, если в качестве координатных базисных векторов взять его собственные векторы (приведение матриц к диагональному виду, квадратичных форм к сумме квадратов, решение операторных уравнений в спектральной форме; см. также п. 15.1-1);

2) собственные значения линейного оператора выражают важные свойства этого оператора без ссылки на какую бы то ни было конкретную систему координат.

Во многих приложениях собственные векторы и собственные значения линейных операторов имеют прямой геометрический или физический смысл; обычно они могут быть интерпретированы на языке задачи о максимуме и минимуме (п. 14.8-8). Наиболее важные приложения относятся к эрмитовым операторам, имеющим *действительные* собственные значения (пп. 14.8-4 и 14.8-10).

14.8-2. Инвариантные многообразия. Разложимые линейные преобразования (линейные операторы) и матрицы. Многообразие $\mathcal{U}_1$ в линейном векторном пространстве $\mathcal{U}$ называется **инвариантным** относительно данного линейного оператора A в пространстве $\mathcal{U}$, если A переводит каждый вектор $\mathrm{x} \in \mathcal{U}_1$ в некоторый вектор $\mathrm{Ax} \in \mathcal{U}_1$. Если $\mathcal{U}$ конечномерно и $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_m, \mathrm{e}_{m+1}, \ldots, \mathrm{e}_n$ —

координатный базис в $\mathcal{U}$, обладающий тем свойством, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$ порождают $\mathcal{U}_1$, то оператор **A** представляется матрицей A, которую можно подразделить следующим образом:

$$A \equiv \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \tilde{A} \\ \hline [0] & \hat{A} \end{array} \right), \qquad (14.8\text{-}1)$$

где A_1 — матрица размера $m \times m$, представляющая оператор $\mathbf{A}_1$ в пространстве $\mathcal{U}_1$, «индуцированный» оператором **A**. Может случиться, что оператор $\mathbf{A}_1$ можно подвергнуть дальнейшему приведению.

Линейное преобразование (линейный оператор) **A** в векторном пространстве $\mathcal{U}$ называется **разложимым (приводимым, вполне приводимым** [1])), если пространство $\mathcal{U}$ есть прямая сумма $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \ldots$ (п. 12.7-5, а) двух или более подпространств $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$, каждое из которых инвариантно относительно **A**. В этом случае оператор **A** записывают как **прямую сумму** $\mathbf{A} = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$ **линейных операторов** $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$, индуцированных оператором **A** соответственно в $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$

Квадратная матрица A представляет разложимый оператор **A** *в том и только в том случае, если матрица A подобна клеточной матрице (прямой сумме матриц* $A_1, A_2, \ldots$, соответствующих операторам $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$, см. также п. 13.2-9). Матрица A, обладающая этим свойством также, называется **разложимой (приводимой, вполне приводимой)**.

14.8-3. Собственные векторы, собственные значения и спектр (см. также п. 13.4-2).

(a) **Собственный вектор (характеристический вектор)** линейного оператора (линейного преобразования) **A** в линейном векторном пространстве $\mathcal{U}$ есть такой вектор $\mathbf{y} \in \mathcal{U}$, что

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \lambda \mathbf{y} \qquad (\mathbf{y} \neq 0), \qquad (14.8\text{-}2)$$

где λ — некоторый скаляр, называемый **собственным значением (характеристическим значением)** оператора **A**, соответствующим собственному вектору $\mathbf{y}$.

(b) *Если* $\mathbf{y}$ — *собственный вектор оператора* **A**, *соответствующий собственному значению* λ, *то это же верно для любого вектора* $\alpha\mathbf{y} \neq 0$. *Если* $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_s$ — *собственные векторы оператора* **A**, *соответствующие собственному значению* λ, *то это же верно и для каждого вектора* $\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \ldots + \alpha_s\mathbf{y}_s \neq 0$; *эти векторы порождают линейное многообразие, инвариантное относительно* **A** (п. 14.8-2; см. также п. 14.8-4, с).

Эта теорема также справедлива для сходящихся бесконечных рядов собственных векторов в гильбертовых пространствах.

Если собственному значению λ соответствует ровно $m \geqslant 1$ линейно независимых собственных векторов, то m называется **геометрической кратностью** собственного значения λ.

Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям одного и того же линейного оператора, линейно независимы.

Линейный оператор в n-мерном векторном пространстве имеет не более n различных собственных значений. Каждое собственное значение невырожденного оператора отлично от нуля.

(c) *Если ограниченный линейный оператор* **A** *имеет собственное значение* λ, *то оператор* $\alpha\mathbf{A}$ *имеет собственное значение* $\alpha\lambda$, *а оператор* $\mathbf{A}^p$ *имеет собственное значение* λ^p $(p = 0, 1, 2, \ldots$, а *если* **A** — *невырожденный оператор, то* $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. *Каждый многочлен* $f(\mathbf{A})$ (п. 14.4-2, b) *имеет собственное значение* $f(\lambda)$ (см. также п. 13.4-5, b). *Все эти функции от* **A** *имеют те же собственные векторы, соответствующие указанному собственному значению, что и* **A**.

---

[1]) См. сноску к п. 14.9-2, b.

(d) Спектр линейного оператора. **Спектром** ограниченного линейного оператора **A** в банаховом пространстве (полном нормированном пространстве, п. 14.2-7, а) $\mathcal{U}$ называется множество всех комплексных чисел **(спектральных значений**, собственных значений[1])) λ, для которых векторное уравнение

$$\mathbf{A}\mathbf{x}-\lambda\mathbf{x}=\mathbf{f}$$

не имеет для каждого вектора $\mathbf{f}$ единственного решения $\mathbf{x}=(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{f}$ (см. также п. 14.8-10). Оператор $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{-1}$ **(резольвентный оператор, резольвента)** для множества значений λ, не принадлежащих спектру оператора **A**, определен и ограничен на всем пространстве $\mathcal{U}$. Спектр можно подразделить на

1) **дискретный спектр (точечный спектр)**, определяемый равенством (2) с собственными векторами $\mathbf{y}\neq 0$;

2) **непрерывный спектр**, состоящий из тех спектральных значений λ, для которых оператор $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{-1}$ имеет область определения, плотную в $\mathcal{U}$, и неограничен;

3) **остаточный спектр**, состоящий из тех спектральных значений λ, для которых оператор $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{-1}$ имеет область определения, не плотную в $\mathcal{U}$, и неограничен.

Спектр ограниченного линейного оператора **A** содержит его **предельный спектр**, определяемый как множество всех комплексных чисел λ, для которых существует такая последовательность единичных векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., что $\|(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{u}_n\|\leqslant 1/n$ $(n=1, 2, \ldots)$. *Предельный спектр содержит дискретный и непрерывный спектр* (см. также п. 14.8-4).

Остаточный спектр ограниченного линейного оператора **A** в гильбертовом пространстве содержится в дискретном спектре оператора **A***.

(e) *Спектр линейного оператора* **A** *в конечномерном нормированном векторном пространстве совпадает со спектром каждой матрицы A, представляющей оператор* **A**, как в п. 14.5-2. **Алгебраической кратностью** m'_j любого собственного значения λ_j оператора **A** называется алгебраическая кратность числа λ_j как собственного значения соответствующей матрицы (п. 13.4-3, а). *Алгебраическая кратность m'_j больше или равна геометрической кратности m_j собственного значения λ_j* (см. также п. 14.8-4, с).

Для каждого линейного оператора в конечномерном нормированном векторном пространстве след Tr (**A**) *оператора* **A** *равен сумме всех его собственных значений, каждое из которых считается столько раз, какова его алгебраическая кратность, а определитель* det (**A**) *равен таким же образом подсчитываемому произведению всех собственных значений* (см. также п. 13.4-3, b).

Характеристическое уравнение $F_A(\lambda)=0$, соответствующее классу подобных конечных матриц (п. 13.4-5, а), называется характеристическим уравнением представляемого этими матрицами оператора **A**; оно дает его собственные значения вместе с их *алгебраическими* кратностями. *Теорема Кэли — Гамильтона* (F_A (**A**) $=0$, п. 13.4-7, а) *и теоремы из* п. 13.4-7, b *применимы и к линейным операторам в конечномерных нормированных векторных пространствах.*

(f) *Если* **A** — *ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве то из* $\mathbf{A}\mathbf{y}=\lambda\mathbf{y}$ *и* $\mathbf{A}^*\mathbf{z}=\mu\mathbf{z}$ *следует, что либо* $\mu=\bar{\lambda}$, *либо* $(\mathbf{y}, \mathbf{z})=0$ (см. также п. 14.8-4).

14.8-4. Собственные векторы и собственные значения нормальных и эрмитовых операторов (см. также пп. 13.4-2, 13.4-4, 14.4-6, 14.8-8, 15.3-3, b, 15.3-4 и 15.4-6).

(a) *Если* **A** — *нормальный оператор в гильбертовом пространстве* ($\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^*$, п. 14.4-8, b), *то* **A** *и* **A*** *имеют одни и те же собственные векторы; соответствующие собственные значения операторов* **A** *и* **A*** *являются комплексными сопряженными числами. Спектр каждого нормального оператора совпадает с его предельным спектром; остаточный спектр пуст* (см. также п. 14.8-3, d).

[1]) Некоторые авторы называют собственными значениями все спектральные значения, а другие пользуются этим термином только для дискретного спектра.

Для каждого нормального оператора A *с собственными значениями* λ *эрмитовы операторы* $H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $H_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$ *и* A^*A *имеют те же собственные векторы, что и* A, *и соответственно собственные значения* $\operatorname{Re}\lambda$, $\operatorname{Im}\lambda$ *и* $|\lambda|^2$.

(b) *Все спектральные значения любого эрмитова оператора действительны.* Обратное верно *не* всегда, но каждый *нормальный* оператор, имеющий действительный спектр, является эрмитовым.

(c) Следующими *важными спектральными свойствами нормальных операторов*, в частности, обладают эрмитовы операторы:

1. **Ортогональность собственных векторов.** *Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям нормального оператора, попарно ортогональны.*

2. **Свойство полноты собственных векторов.** *Каждый ограниченный нормальный оператор* A *в гильбертовом пространстве* $\mathcal{U}$ *вполне приводим* (п. 14.8-2). *При этом* $\mathcal{U}$ *есть прямая сумма подпространства, порождаемого ортонормированной системой собственных векторов оператора* A (п. 14.7-4), *и подпространства, состоящего из векторов, ортогональных каждому собственному вектору оператора* A. *В конечномерном случае ортонормированная система собственных векторов порождает* $\mathcal{U}$.

Каждый нормальный оператор A *в конечномерном унитарном векторном пространстве* $\mathcal{U}$ *разложим в прямую сумму* (п. 14.8-2) *нормальных операторов* $A_1, A_2, \ldots$, *определенных в соответствующих подпространствах* $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ *пространства* $\mathcal{U}$ *таких, что каждый оператор* A_j *имеет единственное собственное значение* λ_j. *В каждом подпространстве* $\mathcal{U}_j$ *существует полная ортонормированная система собственных векторов* $y_i^{(j)}$.

Если собственное значение λ нормального оператора имеет алгебраическую кратность m, то геометрическая кратность значения λ также равна m, и наоборот.

(d) ✱ Спектральное представление. Следующими свойствами нормальных операторов обладают, в частности, эрмитовы операторы. Если y_1, $y_2, \ldots, y_n$ — ортонормированная система собственных векторов нормального оператора A в конечномерном пространстве $\mathcal{U}$ и x — любой вектор вида $x = \hat{\xi}_1 y_1 + \hat{\xi}_2 y_2 + \ldots + \hat{\xi}_n y_n$ ($\hat{\xi}_k = (y_k, x)$ п. 14.7-4, а), то

$$\left.\begin{aligned} &Ax = \lambda_1 \hat{\xi}_1 y_1 + \lambda_2 \hat{\xi}_2 y_2 + \ldots + \lambda_n \hat{\xi}_n y_n, \\ &(\textit{спектральное представление оператора } A), \\ &(x, Ax) = \lambda_1 |\hat{\xi}_1|^2 + \lambda_2 |\hat{\xi}_2|^2 + \ldots + \lambda_n |\hat{\xi}_n|^2, \end{aligned}\right\} \qquad (14.8\text{-}3)$$

где λ_k — собственное значение, соответствующее y_k (см. также п. 13.5-4, b).

✱ Вопросу о спектральном представлении операторов в произвольном гильбертовом пространстве (*спектральный анализ операторов*) посвящена обширная литература; см., например, [13.4], [13.6]. ✱

14.8-5. Определение собственных значений и собственных векторов: конечномерный случай (см. также пп. 13.4-5 и 13.5-5; численные методы см. в п. 20.3-5). Если $A \equiv [a_{ik}]$ — матрица размера $n \times n$, представляющая линейный оператор A относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то собственные значения λ и собственные векторы $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n$ оператора A определяют следующим образом:

1. Собственные значения находят как корни алгебраического уравнения n-й степени (*характеристического уравнения*)

$$\det(A - \lambda I) \equiv \det(A - \lambda I) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

2. Координаты $\eta_1^{(j)}, \eta_2^{(j)}, \ldots, \eta_n^{(j)}$ всех m_j линейно независимых собственных векторов

$$\mathbf{y}^{(j)}=\eta_1^{(j)}\mathbf{e}_1+\eta_2^{(j)}\mathbf{e}_2+\ldots+\eta_n^{(j)}\mathbf{e}_n,$$

соответствующих каждому отдельному собственному значению λ_j, получают, решая систему n однородных линейных уравнений

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_j)\,\eta_1^{(j)}+\quad a_{12}\eta_2^{(j)}+\ldots+a_{1n}\eta_n^{(j)}&=0,\\ a_{21}\eta_1^{(j)}+(a_{22}-\lambda_j)\,\eta_2^{(j)}+\ldots+a_{2n}\eta_n^{(j)}&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}\eta_1^{(j)}+\quad a_{n2}\eta_2^{(j)}+\ldots+(a_{nn}-\lambda_j)\,\eta_n^{(j)}&=0,\end{aligned}$$

матрица которой имеет ранг $n-m_j$ (п. 1.9-5).

m_j матриц-столбцов $\mathbf{y}^{(j)}=\begin{pmatrix}\eta_1^{(j)}\\ \eta_2^{(j)}\\ \ldots\\ \eta_n^{(j)}\end{pmatrix}$ называются **модальными столбцами** (или просто **собственными векторами**) данной матрицы A, соответствующими собственному значению λ_j. Каждый модальный столбец можно умножить на произвольную постоянную, отличную от нуля.

14.8-6. Приведение и диагонализация матриц. Преобразование к главным осям (см. также п. 14.8-2).

(a) Каждая конечная система линейно независимых собственных векторов $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_s$, соответствующих одному и тому же собственному значению линейного оператора $\mathbf{A}$, порождает подпространство $\mathcal{U}_1$, инвариантное относительно $\mathbf{A}$ (п. 14.8-3, b). Если $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_s$ взять в качестве первых s базисных векторов, то оператор $\mathbf{A}$ будет представляться матрицей вида

$$A\equiv\left(\begin{array}{c:c}A_1 & \tilde{A}\\ \hdashline [0] & \hat{A}\end{array}\right). \tag{14.8-4}$$

(b) Пусть, в частности, $\mathbf{A}$ — *нормальный* оператор в конечномерном векторном пространстве размерности n. Тогда метод п. 14.8-5 дает ровно n линейно независимых собственных векторов

$$\mathbf{y}^{(j)}=\eta_1^{(j)}\mathbf{e}_1+\eta_2^{(j)}\mathbf{e}_2+\ldots+\eta_n^{(j)}\mathbf{e}_n.$$

Соответствующие n модальных столбцов образуют невырожденную **модальную матрицу**

$$T\equiv[t_{ik}],\qquad \text{где}\quad t_{ik}=\eta_i^{(j)}, \tag{14.8-5}$$

причем каждому отдельному собственному значению λ_j соответствует m_j соседних столбцов; $n=m_1+m_2+\ldots$ столбцов имеют индексами последовательные значения $k=1, 2, \ldots, n$. *Преобразование координат пассивного типа*

$$x=T\tilde{x} \tag{14.8-6}$$

(п. 14.6-1) *вводит в качестве координатного базиса n собственных векторов $\mathbf{y}^{(j)}$ нормального оператора $\mathbf{A}$. Преобразование подобия*

$$\tilde{A}=T^{-1}AT \tag{14.8-7}$$

дает матрицу $\tilde{A}$, представляющую оператор **A** в новой системе координат; $\tilde{A}$ есть клеточная матрица

$$\tilde{A} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & [0] & \dots \\ [0] & \tilde{A}_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{14.8-8}$$

где каждая подматрица $\tilde{A}_j$ соответствует собственному значению λ_j оператора **A**, отличному от других его собственных значений, и имеет ровно m_j строк и m_j столбцов (см. также п. 14.8-4, с).

(с) Если n собственных векторов, определяющих столбцы модальной матрицы (5), *попарно ортогональны*, то преобразование подобия (7) дает диагональную матрицу $\tilde{A}$ (приведение данной матрицы A к диагональному виду, диагонализация, п. 13.4-4, а). Чтобы получить матрицу T преобразования, приводящего данную матрицу A, представляющую нормальный оператор **A**, к диагональному виду, поступают следующим образом:

1. *Если все собственные значения* λ_j — *простые* (это верно, если характеристическое уравнение не имеет кратных корней), то матрицу A диагонализирует каждая модальная матрица (5).

2. *Если существуют кратные собственные значения* λ_j, то с помощью процесса Грама — Шмидта (п. 14.7-4, b) ортогонализируем каждое множество m_j собственных векторов $\mathbf{y}^{(j)} = \eta_1^{(j)}\mathbf{e}_1 + \eta_2^{(j)}\mathbf{e}_2 + \dots$ $\dots + \eta_n^{(j)}\mathbf{e}_n$. n модальных столбцов $\tilde{\mathbf{y}}^{(j)} = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1^{(j)} \\ \tilde{\eta}_2^{(j)} \\ \dots \\ \tilde{\eta}_n^{(j)} \end{pmatrix}$, представляющих получающиеся в результате $m_1 + m_2 + \dots = n$ попарно ортогональных собственных векторов

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(j)} = \tilde{\eta}_1^{(j)}\mathbf{e}_1 + \tilde{\eta}_2^{(j)}\mathbf{e}_2 + \dots + \tilde{\eta}_n^{(j)}\mathbf{e}_n,$$

составляют тогда искомую матрицу преобразования T.

(d) Во многих приложениях первоначальный координатный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$ $\dots, \mathbf{e}_n$ является ортонормированным (прямоугольные декартовы координаты), так что

$$(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}) \equiv x^*Ax \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\bar{\xi}_i\xi_k \tag{14.8-9}$$

(п. 14.7-4, а), а в качестве нового координатного базиса берется ортонормированная система собственных векторов $\tilde{\mathbf{y}}^{(j)}$ (получаемая, если нужно, с помощью процесса Грама — Шмидта). Тогда каждая модальная матрица T, образованная из $\tilde{\mathbf{y}}^{(j)}$, является унитарной матрицей. Унитарное преобразование координат (6), вводящее в качестве базисных векторов n ортонормированных собственных векторов, называется **преобразованием к главным осям** для оператора **A** (см. также пп. 2.4-7 и 3.5-6).

Преобразование к главным осям для эрмитова оператора **A** приводит соответствующую эрмитову форму (9) к ее нормальной форме (13.5-9) (см. также п. 13.5-4).

(е) *Два эрмитовых оператора* **A** *и* **B** *могут быть в одном и том же базисе представлены диагональными матрицами в том и только в том случае, если* **BA** = **AB** (см. также пп. 13.4-4, b и 13.5-5).

14.8-7. «Обобщенная» задача о собственных значениях (см. также пп. 13.5-5 и 15.4-5).

(a) В некоторых приложениях требуется найти «собственные векторы» $\mathbf{y}$ и «собственные значения» μ, определяемые соотношением вида

$$\mathsf{A}\mathbf{y} = \mu\mathsf{B}\mathbf{y} \qquad (\mathbf{y} \neq 0), \tag{14.8-10}$$

где B — невырожденный оператор. Векторы $\mathbf{y}$ и числа μ обязательно являются собственными векторами и собственными значениями оператора $\mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}$; если B — тождественный оператор, то задача сводится к задаче, определяемой равенством (2). Если A и B — *эрмитовы* операторы и B *положительно определен* (п. 14.4-4), то

1) *все собственные значения* μ *действительны;*
2) *можно ввести новое скалярное произведение*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathsf{B}} \equiv (\mathbf{a}, \mathsf{B}\mathbf{b}) \tag{14.8-11}$$

(см. также п. 14.2-6, а). По отношению к этому новому скалярному произведению оператор $\mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}$ оказывается эрмитовым, и к нему применимы теоремы об ортогональности и о полноте из п. 14.8-4, с. В частности, собственные векторы $\mathbf{y}$, соответствующие различным собственным значениям μ, *попарно ортогональны относительно скалярного произведения* (11) (см. также п. 14.7-3, а).

(b) Рассмотрим конечномерное унитарное векторное пространство и ортонормированную систему координат $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, так что $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k \beta_k$ (п. 14.7-4, а). Пусть A и B представляются эрмитовыми матрицами $A \equiv [a_{ik}]$ и $B \equiv [b_{ik}]$, причем матрица B является положительно определенной. Тогда собственные значения μ, определяемые равенством (10), совпадают с корнями алгебраического уравнения n-й степени

$$\det(A - \mu B) \equiv \det[a_{ik} - \mu b_{ik}] = 0 \tag{14.8-12}$$

(*характеристическое уравнение для «обобщенной» задачи о собственных значениях*).

Для каждого корня μ_j кратности m_j существует ровно m_j линейно независимых собственных векторов $\mathbf{y}^{(j)} = \eta_1^{(j)}\mathbf{u}_1 + \eta_2^{(j)}\mathbf{u}_2 + \ldots + \eta_n^{(j)}\mathbf{u}_n$; координаты $\eta_i^{(j)}$ этих векторов получаются из системы линейных однородных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} - \mu_j b_{ik})\, \eta_k^{(j)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14.8-13}$$

Применяя к $m_1 + m_2 + \ldots = n$ собственным векторам процесс Грама—Шмидта (п. 14.7-4, b), находим полную ортонормированную систему векторов относительно нового скалярного произведения

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathsf{B}} = a^* B b = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \bar{\alpha}_i \beta_k. \tag{14.8-14}$$

Если в качестве координатного базиса взять эту ортонормированную систему собственных векторов, подобно тому как это было сделано в п. 14.8-6, с, то эрмитовы формы $(\mathbf{x}, \mathsf{A}\mathbf{x}) = x^* A x$ и $(\mathbf{x}, \mathsf{B}\mathbf{x}) = x^* B x$ примут вид (13.5-12) (*одновременное приведение двух эрмитовых форм к сумме квадратов,* п. 13.5-5).

(c) Аналогичная «обобщенная» задача о собственных значениях для случая бесконечномерных векторных пространств рассматривается в п. 15.4-5.

14.8-8. Задачи о собственных значениях как задачи о стационарных значениях (см. также п. 15.4-7).

(а) Рассмотрим эрмитов оператор **A** в конечномерном унитарном векторном пространстве $\mathcal{U}$ и выберем в $\mathcal{U}$ ортонормированный координатный базис [1]) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, так что **A** представляется эрмитовой матрицей $A \equiv [a_{ik}]$. Важная задача нахождения собственных векторов $\mathbf{y}^{(j)} = \eta_1^{(j)}\mathbf{u}_1 + \eta_2^{(j)}\mathbf{u}_2 + \ldots + \eta_n^{(j)}\mathbf{u}_n$ и соответствующих собственных значений λ_j оператора **A** в точности эквивалентна каждой из следующих задач:

1. Найти каждый вектор $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ (т. е. его координаты η_i), для которого

$$\frac{(\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{y})}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \equiv \frac{y^* A y}{y^* y} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\bar{\eta}_i\eta_k}{\sum_{i=1}^{n}\bar{\eta}_i\eta_i} \quad (\textit{частное Релея}) \tag{14.8-15}$$

принимает стационарное значение. Эти стационарные значения $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(j)}$ определяют λ_j как отношение $\dfrac{(\mathbf{y}^{(j)}, \mathbf{A}\mathbf{y}^{(j)})}{(\mathbf{y}^{(j)}, \mathbf{y}^{(j)})}$.

2. Найти каждый вектор $\mathbf{y}$, для которого форма

$$(\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{y}) \equiv y^* A y \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\bar{\eta}_i\eta_k \tag{14.8-16}$$

принимает стационарное значение при условии, что

$$(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \equiv y^* y \equiv \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2 = 1. \tag{14.8-17}$$

Эти стационарные значения $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(j)}$ определяют $\lambda_j = (\mathbf{y}^{(j)}, \mathbf{A}\mathbf{y}^{(j)})$.

3. Найти каждый вектор $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, для которого скалярное произведение $(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ принимает стационарное значение при условии, что $(\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{y}) = 1$. Эти стационарные значения $\mathbf{y}^{(j)}$ дают $\lambda_j = \dfrac{1}{(\mathbf{y}^{(j)}, \mathbf{y}^{(j)})}$.

Пусть собственные значения оператора **A** занумерованы в порядке возрастания, причем собственное значение кратности m повторяется m раз: $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. *Наименьшее собственное значение* λ_1 *равно минимальному значению частного Релея* (15) *для произвольного вектора* $\mathbf{y} \in \mathcal{U}$. r-е собственное значение λ_r в этой последовательности подобным же образом меньше или равно частному Релея для всех ненулевых векторов, ортогональных ко всем собственным векторам, соответствующим собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}$. Число λ_r есть *максимум* минимума $\min\limits_{\mathbf{y} \in \mathcal{U}_r} (\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{y})/(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ *для произвольных* $(r-1)$-*мерных подпространств* $\mathcal{U}_r$ *пространства* $\mathcal{U}$ (*принцип минимакса Куранта*).

Последние теоремы можно высказать и для задач 2 и 3, и для максимумов вместо минимумов; заметим, что минимум в задачах 1 и 2 соответствует максимуму в задаче 3, и наоборот. Эрмитова форма $(\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{y})$ обычно имеет прямой физический смысл. Задача 3 собственным значениям оператора **A** ставит в соответствие главные оси некоторой поверхности второго порядка (см. также пп. 2.4-7 и 3.5-6).

(b) Обобщения. Теория п. 14.8-8, а может быть распространена на «обобщенную» задачу о собственных значениях, определяемую условием $\mathbf{A}\mathbf{y} =$

---

[1]) В большинстве приложений для удобства берут ортонормированный базис; в общем случае нужно только в равенствах (15) — (17) сделать замену $(\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{y}) \equiv y^* G A y$ и $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \equiv y^* G y$.

$= \mu$**By**, где **A** — эрмитов, а **B** — положительно определенный эрмитов оператор (п. 14.8-7). Нужно только в формулировке каждой задачи из п. 14.8-8, а заменить (y, y) на $(\mathbf{y}, \mathbf{y})_{\mathbf{B}} \equiv (\mathbf{y}, \mathbf{By})$. При этом частное Релея (15) заменяется отношением

$$\frac{(\mathbf{y}, \mathbf{Ay})}{(\mathbf{y}, \mathbf{By})} \equiv \frac{y^* A y}{y^* B y} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \bar{\eta}_i \eta_k}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \bar{\eta}_i \eta_k} \tag{14.8-18}$$

(*частное Релея для «обобщенной» задачи о собственных значениях*).

Аналогичные теоремы справедливы и для подходящих классов операторов в гильбертовых пространствах; в этом случае формы (y, Ay), (y, y) и (y, By) могут оказаться не суммами, а интегралами, так что задачи о стационарных значениях из п. 14.8-8, а превращаются в вариационные задачи (п. 15.4-7).

14.8-9. Границы для собственных значений линейных операторов (см. также п. 15.4-10). Для исследования собственных значений часто оказываются полезными следующие теоремы.

(a)* *Для каждого собственного значения* λ *линейного оператора* **A**, *представляемого матрицей* $A \equiv [a_{ik}]$ *размера* $n \times n$,

$$|\lambda| \leqslant \min(P, Q), \tag{14.8-19}$$

где

$$P = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|, \qquad Q = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}|.$$

Для действительной и мнимой частей характеристических чисел имеют место оценки:

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} [\operatorname{Re} a_{ii} - P_i] \leqslant \operatorname{Re} \lambda \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} [\operatorname{Re} a_{ii} + P_i],$$

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} [\operatorname{Im} a_{ii} - P_i] \leqslant \operatorname{Im} \lambda \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} [\operatorname{Im} a_{ii} + P_i],$$

где $P_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$. В этих оценках P_i можно заменить на $Q_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ji}|$.

Если дополнительно предположить, что $|a_{ii}| > P_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$|\lambda| \geqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} [|a_{ii}| - P_i].$$

(Величины P_i могут быть заменены на Q_i.)

Действительная часть $\operatorname{Re} \lambda$ *лежит между наименьшим и наибольшим собственными значениями матрицы* $H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$, *а мнимая часть* $\operatorname{Im} \lambda$ — *между наименьшим и наибольшим собственными значениями матрицы* $H_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$ (см. также п. 13.3-4, а).

(b) Для *эрмитовых* матриц и операторов

$$|\lambda|^2 \leqslant \sum_i \sum_k |a_{ik}|^2, \qquad |\lambda| \leqslant \|\mathbf{A}\|. \tag{14.8-20}$$

(c) Теоремы сравнения. Пусть $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ — последовательность (с учетом кратностей) собственных значений конечномерной задачи о

собственных значениях (10), где A и B — эрмитовы операторы, причем B является положительно определенным. Тогда:

1) *прибавление положительно определенного эрмитова оператора к* A *не может уменьшить ни одно из собственных значений* μ_r *в этой последовательности;*

2) *прибавление положительно определенного эрмитова оператора к* B *не может увеличить ни одно из собственных значений* μ_r;

3) *если векторы* **y** *рассматривать только в некотором* $(n-m)$-*мерном подпространстве пространства* $\mathcal{U}$, *то* $n-m$ *собственных значений* $\mu'_1 \leqslant \mu'_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu'_{n-m}$ *задачи, получаемой при таком ограничении, будут удовлетворять соотношениям*

$$\mu_r \leqslant \mu'_r \leqslant \mu_{r+m} \qquad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ n-m). \tag{14.8-21}$$

Эти ограничения обычно принимают вид m независимых линейных уравнений, связывающих векторные координаты η_i.

Эти теоремы применимы к операторам в гильбертовых пространствах, если A *и* B — *положительно определенные операторы, дающие дискретную последовательность* $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots$ *с конечными кратностями.*

14.8-10. Неоднородные линейные векторные уравнения (см. также пп. 1.9-4, 15.3-7 и 15.4-12).

(a) Если A — ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве, то векторное уравнение

$$\mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{f} \tag{14.8-22}$$

имеет для каждого данного вектора **f** единственное решение **x** в том и только в том случае, если скаляр λ не принадлежит спектру оператора A (п. 14.8-3, d). *Если* λ *есть собственное значение* λ_1 *оператора* A *в смысле равенства* (2), *то уравнение* (22) *имеет решение только в том случае, если данный вектор* **f** *ортогонален каждому собственному вектору оператора* A*, *соответствующему собственному значению* $\bar{\lambda}_1$. В этом последнем случае существует бесконечное множество решений: решением является каждая сумма любого частного решения и произвольной линейной комбинации собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_1.

(b) В важном частном случае

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}, \tag{14.8-23}$$

где A — ограниченный нормальный оператор, единственное решение **x** для каждого данного вектора **f** существует в том и только в том случае, если из $\mathbf{A}\mathbf{x}=0$ следует $\mathbf{x}=0$, т. е. если A — невырожденный оператор. Если A — вырожденный оператор, то уравнение (23) имеет решение только в том случае, если вектор **f** ортогонален каждому собственному вектору оператора A*, соответствующему собственному значению нуль.

(c) Для эрмитова оператора $\mathbf{A}=\mathbf{A}^*$, имеющего ортонормированную систему собственных векторов $\mathbf{y}_k$, для которых $\mathbf{f}=\sum_{k=1}^{\infty}(\mathbf{y}_k, \mathbf{f})\,\mathbf{y}_k$, решение уравнения (22) дается формулой

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{y}_k, \mathbf{f})}{\lambda_k - \lambda}\,\mathbf{y}_k, \tag{14.8-24}$$

где λ_k — (не обязательно различные) собственные значения, соответствующие каждому вектору $\mathbf{y}_k$.

14.9. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

14.9-1. Представления групп.

(a) *Каждая группа* (п. 12.2-1) *может быть* **представлена** *гомоморфизмом* (п. 12.1-6), *отображающим ее в группу невырожденных линейных преобразований некоторого векторного пространства* **(представляющего пространства, пространства-носителя)** *и, следовательно, в некоторую группу невырожденных матриц* (это — одна из форм *теоремы Кэли*, сформулированной в п. 12.2-9, b). **Представление степени или размерности** n **группы** G **в поле** F есть группа матриц A, B, ... размера $n\times n$ над полем F, связанная с элементами a, b, ... группы G гомоморфизмом $A=A(a)$, $B=B(b)$, ..., так что из $ab=c$ для всех a и b из группы G следует, что $A(a)B(b)=C(c)$ (*условие представления*). Число n равно линейной размерности представляющего пространства. Представление называется **точным (истинным)**, если оно взаимно однозначно (и, таким образом, является изоморфизмом, п. 12.1-6).

Каждая группа допускает в качестве представляющего пространства некоторое комплексное векторное пространство, т. е. каждая группа имеет представление в поле комплексных чисел. Такое представление позволяет описать определяющую операцию произвольной группы в терминах сложения и умножения чисел (см. также пп. 12.1-1 и 14.1-1). В большинстве приложений речь идет о группах преобразований (п. 12.2-8; примеры см в п. 14.10-7).

Каждая группа $a_1, a_2, \ldots, a_g$ *конечного порядка* g *допускает точное представление, содержащее* g *линейно независимых матриц перестановки* (п. 13.2-6) $A_j(a_j)\equiv[a_{ik}(a_j)]$, *определяемых условиями*

$$a_{ik}(a_j)=\left\{\begin{array}{l}1, \text{ если } a_i^{-1}a_ja_k=E,\\ 0 \text{ в противном случае}\end{array}\right\} \quad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ g), \tag{14.9-1}$$

где E — *единичный элемент данной группы* (*регулярное представление* конечной группы). *Таким образом, каждая конечная группа изоморфна некоторой группе перестановок* (см. также п. 12.2-8).

(b) Два представления $\mathcal{R}$ и $\tilde{\mathcal{R}}$ группы G называются **подобными или эквивалентными**, если все пары матриц $A(a)$ представления $\mathcal{R}$ и $\tilde{A}(a)$ представления $\tilde{\mathcal{R}}$ связаны одним и тем же преобразованием подобия (п. 13.4-1, b) $\tilde{A}=T^{-1}AT$. В этом случае говорят, что матрицы $A(a)$ и $\tilde{A}(a)$ описывают одно и то же линейное преобразование $\mathbf{A}(a)$ представляющего пространства, общего для $\mathcal{R}$ и $\tilde{\mathcal{R}}$ (см. также п. 14.6-2).

Представление $\mathcal{R}$ называется **ограниченным, унитарным** и/или **ортогональным**, если соответствующим свойством обладают все его матрицы. *Каждое представление конечной группы и каждое унитарное представление ограничено. Для каждого ограниченного представления существует эквивалентное унитарное представление.*

(c) **Ранг** любого представления $\mathcal{R}$ есть наибольшее число линейно независимых матриц[1]) в $\mathcal{R}$.

14.9-2. Приведение представлений.

(a) Представление $\mathcal{R}$ группы G называется **приводимым**[2]), если представляющее пространство $\mathcal{U}$ имеет собственное подпространство $\mathcal{U}_1$, инвариантное относительно $\mathcal{R}$, т. е. относительно каждого линейного преобразования,

---

[1]) Так как матрицы можно рассматривать как векторы, линейная независимость матриц определяется точно так же, как в п. 14.2-3.

[2]) Определения в этом пункте применимы и к любому множеству линейных преобразований в векторном пространстве или к соответствующему множеству матриц (не обязательно группе).

описываемого матрицей из $\mathscr{R}$ (п. 14.5-2). Это верно в том и только в том случае, если существует преобразование подобия

$$\tilde{A} = T^{-1}AT,$$

одновременно переводящее матрицы $A(a)$, $B(b)$, ... представления $\mathscr{R}$ в соответствующие матрицы вида

$$\tilde{A}(a) \equiv \begin{pmatrix} A_1(a) & \hat{A}(a) \\ [0] & A_2(a) \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}(b) \equiv \begin{pmatrix} B_1(b) & \hat{B}(b) \\ [0] & B_2(b) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \tag{14.9-2}$$

где $A_1(a)$, $B_1(b)$, ... — квадратные матрицы одного и того же порядка. Матрицы $A_1(a)$, $B_1(b)$, ... — образуют представление $\mathscr{R}_1$ данной группы G с представляющим пространством $\mathscr{U}_1$. Представление, которое не является приводимым, называется **неприводимым**.

(b) Представление $\mathscr{R}$ называется **разложимым**[1]), если его представляющее пространство $\mathscr{U}$ является прямой суммой $\mathscr{U} = \mathscr{U}_1 \oplus \mathscr{U}_2 \oplus \ldots$ (п. 12.7-5, a) подпространств $\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2$, ..., инвариантных относительно $\mathscr{R}$. Это имеет место в том и только в том случае, если существует преобразование подобия $\tilde{A} = T^{-1}AT$, одновременно переводящее матрицы $A(a)$, $B(b)$, ... представления $\mathscr{R}$ в соответствующие клеточные матрицы

$$\tilde{A}(a) \equiv \begin{pmatrix} A_1(a) & [0] & \ldots \\ [0] & A_2(a) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}(b) \equiv \begin{pmatrix} B_1(b) & [0] & \ldots \\ [0] & B_2(b) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \tag{14.9-3}$$

(прямые суммы матриц, п. 13.2-9), где соответствующие подматрицы имеют один и тот же порядок. Каждое множество матриц $A_i(a)$, $B_i(b)$, ... $(i = 1, 2, \ldots)$ образует представление $\mathscr{R}_i$ данной группы G с представляющим пространством $\mathscr{U}_i$. Представление $\mathscr{R}$ записывается как прямая сумма $\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 \oplus \oplus \mathscr{R}_2 \oplus \ldots$

(c) Представление $\mathscr{R}$ называется **вполне приводимым**, если оно разложимо на неприводимые представления **(неприводимые компоненты)** $\mathscr{R}^{(1)}$, $\mathscr{R}^{(2)}$, ...

(d) Условия приводимости (см. также п. 14.9-5, b). *Каждое ограниченное представление (и, в частности, каждое представление конечной группы) либо вполне приводимо, либо неприводимо.*

Группа G имеет разложимое представление в том и только в том случае, если она является прямым произведением (п. 12.7-2) *простых групп* (п. 12.2-5, b).

Ограниченное представление $\mathscr{R}$ вполне приводимо в том и только в том случае, если существует матрица Q, не имеющая вида αI, перестановочная с каждой матрицей из $\mathscr{R}$. Неприводимые представления коммутативных (абелевых) групп необходимо одномерны.

Если все соответствующие матрицы A, $\tilde{A}$ двух неприводимых представлений $\mathscr{R}$ и $\tilde{\mathscr{R}}$ связаны одним и тем же преобразованием $Q\tilde{A} = A\tilde{Q}$, то либо $\mathscr{R}$ и $\tilde{\mathscr{R}}$ эквивалентны, либо $Q = [0]$ (лемма Шура).

14.9-3. Неприводимые представления группы.

(a) *Разложение $\mathscr{R} = \mathscr{R}^{(1)} \oplus \mathscr{R}^{(2)} \oplus \ldots$ данного вполне приводимого представления $\mathscr{R}$ некоторой группы на неприводимые компоненты единственно с точностью до эквивалентности и перестановки порядка слагаемых. Каждое*

---

[1]) Термины *приводимое*, *разложимое* и *вполне приводимое* различными авторами переставляются по-разному. В действительности в случае *ограниченных* матриц, преобразований и представлений, а значит, для всех представлений конечных групп, они эквивалентны (п. 14.9-2).

вполне приводимое представление однозначно определяется (*с точностью до эквивалентности*) *своими неприводимыми компонентами*. Если $\mathscr{R}^{(j)}$ — одно из m_j имеющихся взаимно эквивалентных неприводимых компонент представления $\mathscr{R}$ $(j=1,\ 2,\ \ldots)$, то можно писать

$$\mathscr{R}=m_1\mathscr{R}^{(1)}\oplus m_2\mathscr{R}^{(2)}\oplus\ldots$$

(b) *Для каждой группы G конечного порядка g*

1) *число m различных неэквивалентных неприводимых представлений конечно и равно числу различных классов сопряженных элементов* (п. 12.2-5, а);

2) *если n_j — размерность j-го неприводимого представления, то его ранг равен n_j^2* (*теорема Бернсайда*); *ранг каждого представления $\mathscr{R}$ группы G равен сумме рангов n_j^2 различных неприводимых компонент $\mathscr{R}$*;

3) *каждое число n_j является делителем g и*

$$n_1^2+n_2^2+\ldots+n_m^2=g; \tag{14.9-4}$$

4) *регулярное представление группы G* (п. 14.9-1, а) *содержит j-е неприводимое представление группы G ровно n_j раз.*

(c) Нахождение полного множества неприводимых представлений группы G операторов представляет особый интерес как ключ к решению некоторых задач о собственных значениях. *Если* H — *эрмитов оператор, перестановочный с каждым оператором из группы G, то между различными собственными значениями λ_i оператора* H *и неэквивалентными неприводимыми представлениями $\mathscr{R}^{(j)}$ группы G существует взаимно однозначное соответствие, и геометрическая кратность каждого собственного значения λ_i равна размерности $\mathscr{R}^{(j)}$* (классификация собственных значений в квантовой механике из соображений симметрии [13.7]).

14.9-4. Характер представления.

(a) *Характер* представления $\mathscr{R}$ есть функция

$$\chi(a)\equiv \operatorname{Tr}[A(a)], \tag{14.9-5}$$

определенная на элементах a группы G, представляемой $\mathscr{R}$. *Сопряженные элементы группы* (п. 12.2-5, а) *имеют равные значения характера.*

Для каждого ограниченного представления

$$\chi(a^{-1})\equiv\overline{\chi(a)}. \tag{14.9-6}$$

Два вполне приводимых представления одной и той же группы G эквивалентны в том и только в том случае, если их характеры совпадают.

(b) Характеры неприводимых представлений называются **простыми** или **примитивными характерами**, а характеры приводимых представлений — **составными характерами**. *Из $\mathscr{R}=\mathscr{R}_1\oplus\mathscr{R}_2\oplus\ldots$ следует $\chi(a)\equiv\chi_1(a)+\chi_2(a)+\ldots$, где $\chi(a)$, $\chi_1(a)$, $\chi_2(a)$, ... — характеры соответственно представлений $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$, ...*

14.9-5. Соотношения ортогональности (см. также п. 14.9-6).

(a) *Примитивные характеры $\chi^{(1)}(a)$, $\chi^{(2)}(a)$, ..., соответствующие неэквивалентным неприводимым представлениям $\mathscr{R}^{(1)}$, $\mathscr{R}^{(2)}$, ... конечной группы G, удовлетворяют соотношениям*

$$\text{средн. ар. } \left\{\overline{\chi^{(j)}(a)}\,\chi^{(j')}(a)\right\}=\frac{1}{g}\sum_{a\in G}\overline{\chi^{(j)}(a)}\,\chi^{(j')}(a)=$$

$$=\delta_{jj'}=\begin{cases}0, & \text{если } j\neq j',\\ 1, & \text{если } j=j'\end{cases}\quad (j,\ j'=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{14.9-7}$$

Для каждого вполне приводимого представления $\mathcal{R} = m_1\mathcal{R}^{(1)} \oplus m_2\mathcal{R}^{(2)} \oplus \ldots$ *группы* G

$$\chi(a) \equiv m_1\chi^{(1)}(a) + m_2\chi^{(2)}(a) + \ldots, \tag{14.9-8}$$

$$m_j = \text{средн. ар.} \left\{\overline{\chi^{(j)}(a)}\,\chi(a)\right\} = \frac{1}{g}\sum_{a\in G}\overline{\chi^{(j)}(a)}\,\chi(a), \tag{14.9-9}$$

$$\text{средн. ар.} \left\{\overline{\chi(a)}\,\chi(a)\right\} = \frac{1}{g}\sum_{a\in G}|\chi(a)|^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots \geqslant 1. \tag{14.9-10}$$

Если $\mathcal{R}$ неприводимо, то средн. ар. $\left\{|\chi(a)|^2\right\} = 1$.

(b) Каждое из m неэквивалентных неприводимых представлений $\mathcal{R}^{(j)}$ конечной группы G *эквивалентно соответствующему унитарному неприводимому представлению, содержащему матрицы* $\left[u_{ik}^{(j)}(a)\right]$ (см. также п. 14.9-1, b). *Элементы этих унитарных матриц удовлетворяют соотношениям*

$$\text{средн. ар.} \left\{\overline{u_{ik}^{(j)}(a)}\,u_{i'k'}^{(j')}(a)\right\} = \frac{1}{g}\sum_{a\in G}\overline{u_{ik}^{(j)}(a)}\,u_{i'k'}^{(j')}(a) = \frac{1}{n_j}\,\delta_{jj'}\delta_{ii'}\delta_{kk'} \tag{14.9-11}$$

$$(j,\ j' = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_j;\ i',\ k' = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_{j'}).$$

14.9-6. Прямые произведения представлений.

(a) Если $\mathcal{R}_1$ — n_1-мерное, а $\mathcal{R}_2$ — n_2-мерное представления одной и той же группы G, то матрицы размера $n_1n_2\times n_1n_2$, получаемые как прямые произведения (п.13.2-10) матриц из $\mathcal{R}_1$ на матрицы из $\mathcal{R}_2$, образуют n_1n_2-мерное представление группы G — **прямое (кронекеровское) произведение** $\mathcal{R}_1\otimes\mathcal{R}_2$ представлений $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ (см. также п. 12.7-2). Его представляющее пространство является прямым произведением представляющих пространств для $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ (п. 12.7-3). *Характер* $\chi(a)$ *представления* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1\otimes\mathcal{R}_2$ *равен произведению характера* $\chi_1(a)$ *представления* $\mathcal{R}_1$ *и характера* $\chi_2(a)$ *представления* $\mathcal{R}_2$:

$$\chi(a) \equiv \chi_1(a)\,\chi_2(a). \tag{14.9-12}$$

Если $\mathcal{R}_1$ *и* $\mathcal{R}_2$ *ограничены или унитарны, то это же верно и для* $\mathcal{R}_1\otimes\mathcal{R}_2$.

(b) *Прямое произведение* $\mathcal{R}^{(1)}\otimes\mathcal{R}^{(2)}$ *двух ограниченных неприводимых представлений* $\mathcal{R}^{(1)}$ *и* $\mathcal{R}^{(2)}$ *группы* G *неприводимо, если размерность представления* $\mathcal{R}^{(1)}$ *и/или* $\mathcal{R}^{(2)}$ *равна* 1; *в противном случае* $\mathcal{R}^{(1)}\otimes\mathcal{R}^{(2)}$ *вполне приводимо.* С помощью этого последнего факта можно из данного неприводимого представления группы G получать новые ее неприводимые представления.

(c) *Неприводимые представления прямого произведения* $G_1\otimes G_2$ *двух групп* G_1 *и* G_2 (п. 12.7-2) *являются прямыми произведениями* $R_1^{(j)}\otimes R_2^{(j')}$ *неприводимых представлений* $R_1^{(j)}$ *группы* G_1 и $R_2^{(j')}$ *группы* G_2.

14.9-7. Представления колец, полей и линейных алгебр (см. также п. 12.3-1 и 12.4-2). Кольца, поля и линейные алгебры также могут быть представлены подходящими классами матриц или линейных преобразований. В частности, *линейная алгебра порядка* n^2 *над полем* F, *имеющая единицу, изоморфна алгебре матриц порядка* $n\times n$ *над полем* F (*регулярное представление линейной алгебры*, см. также пп. 14.9-1, а и 14.10-6).

14.10. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВРАЩЕНИЙ

14.10-1. Вращения в трехмерном евклидовом векторном пространстве.

(a) *Каждое ортогональное линейное преобразование*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{I}) \tag{14.10-1a}$$

в трехмерном евклидовом векторном пространстве (п. 14.2-7, а) *сохраняет*

модули векторов и углы между векторами (пп. 14.4-5 и 14.4-6). Такое преобразование называется (собственным) **вращением**, если $\det(\mathbf{A})=1$, т. е. если это преобразование, кроме того, сохраняет *относительную ориентацию любых трех базисных векторов* (и потому *правую и левую системы координат, векторное произведение двух векторов и смешанное произведение трех векторов*). Преобразование (1*a*) с $\det(\mathbf{A})=-1$ называется **несобственным вращением** или **вращением с отражением.**

(b) Пусть $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ — любой ортонормированный базис (п. 14.7-4), и пусть

$$\mathbf{x}=\xi_1\mathbf{u}_1+\xi_2\mathbf{u}_2+\xi_3\mathbf{u}_3, \qquad \mathbf{x}'=\xi_1'\mathbf{u}_1+\xi_2'\mathbf{u}_2+\xi_3'\mathbf{u}_3.$$

Каждое преобразование (1*a*) задается формулами

$$\left.\begin{aligned}\xi_1'&=a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+a_{13}\xi_3,\\ \xi_2'&=a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+a_{23}\xi_3,\\ \xi_3'&=a_{31}\xi_1+a_{32}\xi_2+a_{33}\xi_3\end{aligned}\right\} \tag{14.10-1b}$$

или в матричной форме

$$x'=Ax, \tag{14.10-1c}$$

где для собственных вращений

$$\det[a_{ik}]=\det(A)=1. \tag{14.10-2}$$

Так как рассматриваемая система координат является *ортонормированной*, действительная матрица $A\equiv[a_{ik}]$, описывающая каждое вращение, ортогональна ($A'A=AA'=I$, см. также п. 14.7-5), т. е.

$$\sum_{j=1}^{3}a_{ij}a_{kj}=\sum_{j=1}^{3}a_{ji}a_{jk}=\begin{Bmatrix}0, & \text{если} & i\neq k,\\ 1, & \text{если} & i=k\end{Bmatrix} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3), \tag{14.10-3}$$

и каждый коэффициент a_{ik} равен алгебраическому дополнению элемента a_{ki} в определителе $\det[a_{ik}]$. Любые три из коэффициентов a_{ik} определяют все 9.

Геометрически коэффициент a_{ik} есть косинус угла между базисным вектором $\mathbf{u}_i$ и повернутым базисным вектором $\mathbf{u}_k'=\mathbf{A}\mathbf{u}_k=\sum_{j=1}^{3}a_{jk}\mathbf{u}_j$ (см. также п. 14.5-1):

$$a_{ik}=\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_k'=\mathbf{u}_i\cdot(\mathbf{A}\mathbf{u}_k) \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3). \tag{14.10-4}$$

14.10-2. Угол поворота. Ось вращения.

(a) Вращение (1) поворачивает радиус-вектор $\mathbf{x}$ каждой точки трехмерного евклидова пространства на **угол поворота** δ вокруг направленной **оси вращения**, точки которой инвариантны. Угол поворота δ и направляющие косинусы c_1, c_2, c_3 положительной оси вращения определяются формулами

$$\left.\begin{aligned}&\cos\delta=\frac{1}{2}\Big[\operatorname{Tr}(\mathbf{A})-1\Big]=\frac{1}{2}\Big[\operatorname{Tr}(A)-1\Big]=\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22}+a_{33}-1),\\ &c_1=\frac{a_{32}-a_{23}}{2\sin\delta}, \qquad c_2=\frac{a_{13}-a_{31}}{2\sin\delta}, \qquad c_3=\frac{a_{21}-a_{12}}{2\sin\delta},\end{aligned}\right\} \tag{14.10-5}$$

так что $\delta>0$ *соответствует вращению правого винта, вворачиваемого в направлении положительной оси вращения.* Либо знак угла δ, либо направление оси вращения могут выбираться произвольно.

Направление положительной оси вращения — это направление собственного вектора $c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3$, соответствующего собственному значению $+1$ оператора $\mathbf{A}$ и находимого путем приведения матрицы A к диагональному виду (п. 14.8-6) Остальными собственными значениями оператора $\mathbf{A}$ являются $\cos\delta\pm i\sin\delta=e^{\pm i\delta}$.

(b) Матрица преобразования A, соответствующая данному вращению, описываемому числами δ, c_1, c_2, c_3, есть

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \cos\delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-\cos\delta) \begin{pmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_2c_1 & c_2^2 & c_2c_3 \\ c_3c_1 & c_3c_2 & c_3^2 \end{pmatrix} + \sin\delta \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14.10\text{-}6)$$

14.10-3. Параметры Эйлера и вектор Гиббса.

(a) Четыре симметричных **параметра Эйлера**

$$\lambda = c_1 \sin\frac{\delta}{2}, \quad \mu = c_2 \sin\frac{\delta}{2}, \quad \nu = c_3 \sin\frac{\delta}{2}, \quad \rho = \cos\frac{\delta}{2} \quad (14.10\text{-}7)$$
$$(\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2=1)$$

однозначно определяют вращение, так как из равенства (6) следует:

$$A \equiv \begin{pmatrix} \lambda^2-\mu^2-\nu^2+\rho^2 & 2(\lambda\mu-\nu\rho) & 2(\nu\lambda+\mu\rho) \\ 2(\lambda\mu+\nu\rho) & \mu^2-\nu^2-\lambda^2+\rho^2 & 2(\mu\nu-\lambda\rho) \\ 2(\nu\lambda-\mu\rho) & 2(\mu\nu+\lambda\rho) & \nu^2-\lambda^2-\mu^2+\rho^2 \end{pmatrix}, \quad (14.10\text{-}8)$$

параметры λ, μ, ν, ρ и $-\lambda, -\mu, -\nu, -\rho$ представляют одно и то же вращение.

(b) **Вектор Гиббса**

$$\mathbf{G} = G_1\mathbf{u}_1 + G_2\mathbf{u}_2 + G_3\mathbf{u}_3,$$

где

$$G_1 = c_1 \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\lambda}{\rho}, \quad G_2 = c_2 \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\mu}{\rho}, \quad G_3 = c_3 \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\nu}{\rho}, \quad (14.10\text{-}9)$$

также однозначно определяет вращение. Повернутый вектор $\mathbf{x}'$ можно записать в виде

$$\mathbf{x}' = \mathsf{A}\mathbf{x} = \cos^2\frac{\delta}{2}\,[(1-|\mathbf{G}|^2)\,\mathbf{x} + 2(\mathbf{G}\cdot\mathbf{x})\,\mathbf{G} + 2\mathbf{G}\times\mathbf{x}]. \quad (14.10\text{-}10)$$

14.10-4. Представление векторов и вращений спиновыми матрицами и кватернионами. Параметры Кэли — Клейна.

(a) Если задан ортонормированный базис $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, то каждый действительный вектор $\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{u}_1 + \xi_2\mathbf{u}_2 + \xi_3\mathbf{u}_3$ может быть представлен (вообще говоря, комплексной) эрмитовой матрицей размера 2×2

$$H \equiv \begin{pmatrix} \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & -\xi_3 \end{pmatrix} \equiv \xi_1S_1 + \xi_2S_2 + \xi_3S_3, \quad (14.10\text{-}11)$$

где эрмитовые **спиновые матрицы Паули**

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14.10\text{-}12)$$

соответствует базисным векторам $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$. Соответствие (11) является изоморфизмом, сохраняющим результат сложения векторов и умножения векторов на (действительные) скаляры.

Для каждого вращения (1) вектор вращения

$$\mathbf{x}' = \mathsf{A}\mathbf{x} = \xi_1'\mathbf{u}_1 + \xi_2'\mathbf{u}_2 + \xi_3'\mathbf{u}_3$$

представляется матрицей

$$H' = \xi_1' S_1 + \xi_2' S_2 + \xi_3' S_3 = UHU^*, \tag{14.10-13}$$

где U — (вообще говоря, комплексная) унитарная матрица с определителем, равным 1 (**унимодулярная** матрица):

$$U = \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}, \quad U^* = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \tag{14.10-14}$$

где

$$\left. \begin{aligned} & a = \rho + i\nu, \quad b = \mu + i\lambda, \\ & |a|^2 + |b|^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1. \end{aligned} \right\} \tag{14.10-15}$$

Комплексные числа a, b определяют соответствующее вращение однозначно, но a, b и $-a$, $-b$ (а потому матрицы U и $-U$) описывают одно и то же вращение. Числа a, b, $-\bar{b}$, $\bar{a}$ или числа $\bar{a}$, $i\bar{b}$, $-ib$, a называются **параметрами Кэли — Клейна** данного вращения.

Геометрически комплексные параметры a, b определяют преобразование комплексной плоскости

$$u' = \frac{au - \bar{b}}{bu + \bar{a}} \quad (|a|^2 + |b|^2 = 1)$$

(дробно-линейное преобразование, п. 7.9-2), переводящее стереографическую проекцию u точки (ξ_1, ξ_2, ξ_3) сферы на комплексную плоскость (п. 7.2-4) в стереографическую проекцию u' повернутой точки (ξ_1', ξ_2', ξ_3').

(**b**) Линейные комбинации матриц I, iS_1, iS_2 и iS_3 с действительными коэффициентами образуют представление алгебры кватернионов (п. 12.4-2), скаляры которой соответствуют действительным кратным матрицы I, а образующие соответствуют матрицам iS_1, iS_2, iS_3, причем

$$\left. \begin{aligned} & S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = I, \\ & S_2 S_3 = -S_3 S_2 = iS_1, \quad S_3 S_1 = -S_1 S_3 = iS_2, \\ & S_1 S_2 = -S_2 S_1 = iS_3. \end{aligned} \right\} \tag{14.10-16}$$

Каждая комплексная матрица размера 2×2 может быть представлена в виде такой линейной комбинации; в частности,

$$\left. \begin{aligned} U &= \rho I - i(\lambda S_1 + \mu S_2 + \nu S_3), \\ U^* &= \rho I + i(\lambda S_1 + \mu S_2 + \nu S_3) \end{aligned} \right\} \text{(представление вращения кватернионами).} \tag{14.10-17}$$

Снова матрицы U и $-U$ определяют одно и то же вращение однозначно.

14.10-5. Вращения вокруг осей координат. Следующие матрицы преобразования описывают правые вращения вокруг положительных координатных осей:

$$A_1(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \text{ (вращение на угол } \psi \text{ вокруг } \mathbf{u}_1), \tag{14.10-18 a}$$

$$A_2(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \text{ (вращение на угол } \psi \text{ вокруг } \mathbf{u}_2), \tag{14.10-18 b}$$

$$A_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (вращение на угол } \psi \text{ вокруг } \mathbf{u}_3). \tag{14.10-18 c}$$

Заметим, что

$$A_i^{-1}(\psi) \equiv A_i'(\psi) \equiv A_i(-\psi) \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (14.10\text{-}19)$$

14.10-6. Углы Эйлера.

(а) Каждая матрица $A \equiv [a_{ik}]$, описывающая собственное вращение в трехмерном евклидовом пространстве, может быть различными способами представлена в виде произведения трех матриц (18), и, в частности, так:

$$A \equiv A_3(\alpha) A_2(\beta) A_3(\gamma) \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} (\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma) & -(\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma) & \cos\alpha\sin\beta \\ (\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma) & (-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma) & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv A_{32}(\alpha, \beta, \gamma). \qquad (14.10\text{-}20)$$

Три угла Эйлера α, β, γ однозначно определяют вращение; в свою очередь, они однозначно определяются данным вращением с точностью до целочисленного кратного 2π, за исключением случая, когда $\beta = 0$ («карданов подвес», п. 14.10-6, d).

Оси x', y', z' прямоугольной декартовой системы координат (рассматриваемые как твердое тело), вначале направленные вдоль векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, можно повернуть так, чтобы они стали направлены вдоль векторов $\mathbf{u}_1'$, $\mathbf{u}_2'$, $\mathbf{u}_3'$ с помощью трех последовательных вращений (18) (см. рис. 14.10-1; обратите внимание на п. 14.6-3, где объясняется, казалось бы, обратный порядок матриц в равенстве (20)):

1) Поворот вокруг оси z' на угол Эйлера α,

2) поворот вокруг оси y' на угол Эйлера β,

3) поворот вокруг оси z' на угол Эйлера γ.

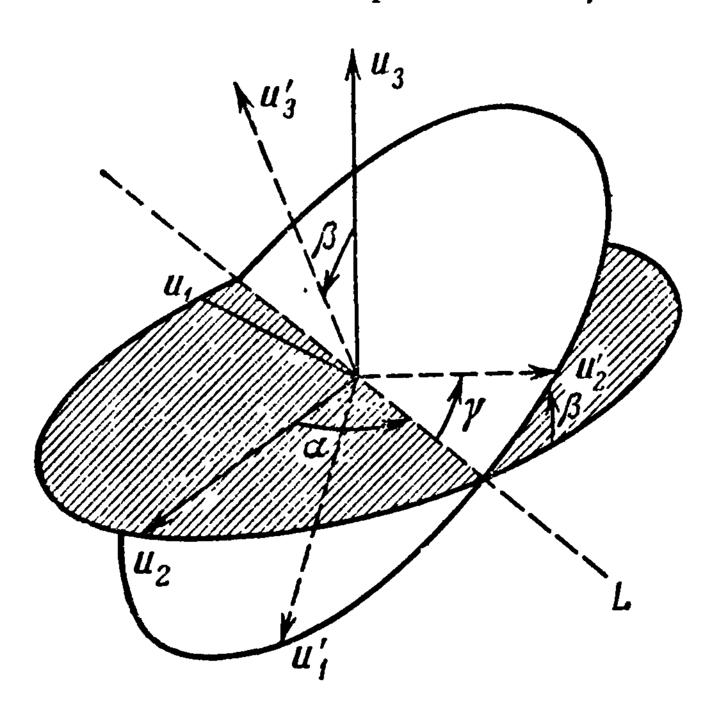


Рис. 14.10-1. Углы Эйлера α, β, γ. Ось OL второго вращения (на угол β) часто называют *линией узлов*. Заметим, что α и β — сферические координаты вектора $\mathbf{u}_3'$ в системе $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$.

Обратное вращение $\mathbf{A}^{-1}$ (переводящее вектор $\mathbf{x}'$ в исходный вектор $\mathbf{x}$) представляется матрицей

$$A^{-1} \equiv A' \equiv A_3(-\gamma) A_2(-\beta) A_3(-\alpha) \equiv$$
$$\equiv A_{32}(-\gamma, -\beta, -\alpha) \equiv$$
$$\equiv A_{32}(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha). \qquad (14.10\text{-}21)$$

Существует шесть способов, которыми матрицу вращения (1) можно выразить в виде произведения

$$A \equiv A_i(\psi_1) A_k(\psi_2) A_i(\psi_3) \equiv A_{ik}(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \qquad (i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k), \qquad (14.10\text{-}22)$$

вращений вокруг двух различных осей координат. Из других получающихся

в результате систем углов Эйлера часто пользуются той, которая определяется произведением

$$A \equiv A_3(\alpha') A_1(\beta') A_3(\gamma') \equiv A_{31}(\alpha', \beta', \gamma'). \qquad (14.10\text{-}23)$$

Она связана с системой (20) соотношениями

$$\alpha' = \alpha + \pi/2, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma - \pi/2. \qquad (14.10\text{-}24)$$

(b) Кроме того, существует шесть способов представления матрицы вращения A в виде произведения

$$\begin{gathered} A \equiv A_i(\theta_1) A_j(\theta_2) A_k(\theta_3) \equiv A_{ijk}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ (i, j, k = 1, 2, 3;\ i \neq j,\ i \neq k,\ j \neq k) \end{gathered} \qquad (14.10\text{-}25)$$

вращений вокруг *трех* различных осей координат. В частности, матрица

$$A \equiv A_1(\varphi) A_2(\theta) A_3(\psi) \equiv$$
$$\equiv \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\theta\sin\psi & \sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\theta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\cos\theta \\ -\cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\theta\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix} \equiv$$
$$\equiv A_{123}(\varphi, \theta, \psi) \qquad (14.10\text{-}26)$$

часто используется для описания положения самолета или космического корабля, совершившего последовательно поворот на угол крена φ, угол

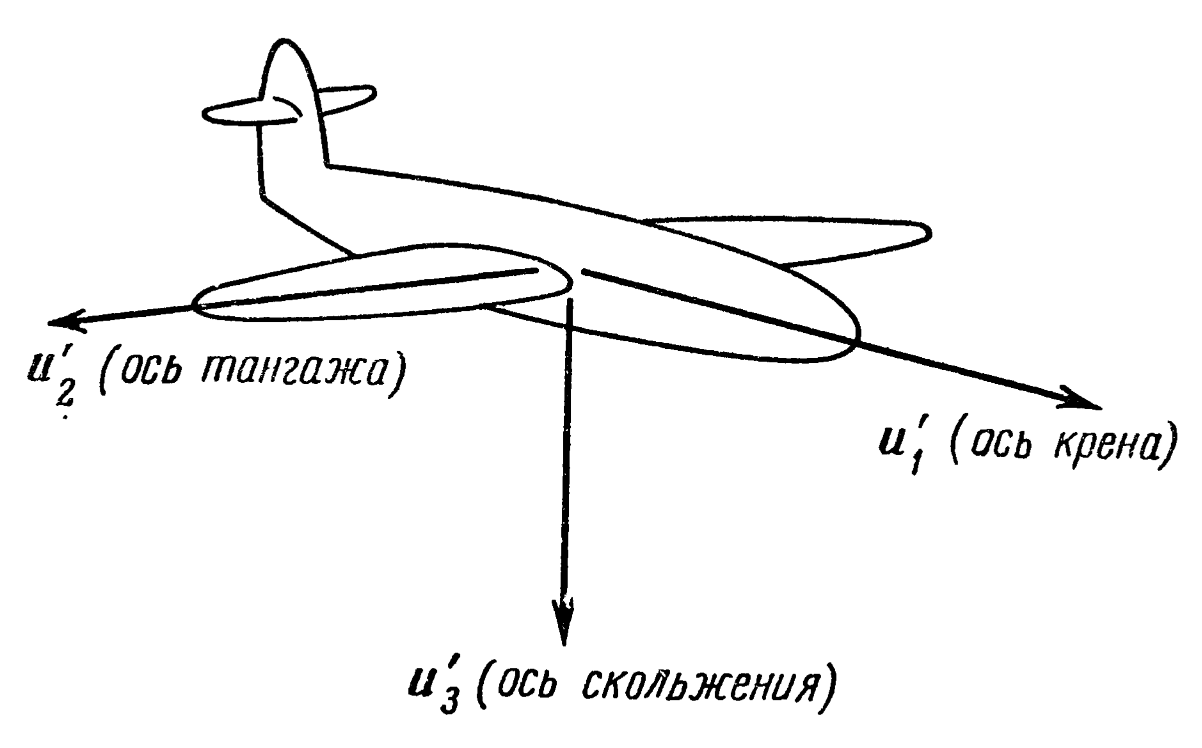


Рис. 14.10-2. Подвижные оси самолета.

тангажа θ и угол курса ψ вокруг осей, проходящих через его центр тяжести и направленных соответственно вперед, в сторону его правого борта и к его дну (рис. 14.10-2).

(c) И без того большой набор, состоящий из 12 систем углов Эйлера, определенных выше, еще увеличивается из-за того, что некоторые авторы один или несколько из углов Эйлера берут с обратным знаком и что иногда в литературе пользуются левыми системами координат. Кроме того, нужно предостеречь читателя, что ему необходимо проверять, определено ли данное преобразование с помощью углов Эйлера как *оператор* («активная» интерпретация, п. 14.5-1) или как *преобразование координат* («пассивная» интерпретация, п. 14.6-1), так как можно спутать матрицы A и $A^{-1} = A'$. В частности, матрица $x = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ координат вектора **x** в неподвижной системе $\mathbf{u}_i$ и матрица $\tilde{x} \equiv \{\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3\}$ его координат в повернутой системе $\mathbf{u}'_k$ связаны отношениями

$$x = A\tilde{x}, \qquad \tilde{x} = A^{-1}x = A'x, \qquad (14.10\text{-}27)$$

а матрицы из базисных векторов (п. 14.6-2) преобразуются по формулам

$$(\mathbf{u}_1'\ \mathbf{u}_2'\ \mathbf{u}_3') = (\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3)\,A \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1' \\ \mathbf{u}_2' \\ \mathbf{u}_3' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}. \qquad (14.10\text{-}28)$$

См. также п. 14.6-3.

(d) Параметры c_1, c_2, c_3, δ и λ, μ, ν, ρ легко выразить через углы Эйлера с помощью равенств (5) и матрицы углов Эйлера. Таким образом[1]),

$$\left.\begin{aligned} &\lambda = c_1 \sin\frac{\delta}{2} = \sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}, \\ &\qquad\qquad a = e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2}, \\ &\mu = c_2 \sin\frac{\delta}{2} = \cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}, \\ &\gamma = c_3 \sin\frac{\delta}{2} = \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}, \\ &\qquad\qquad b = e^{-i\frac{\alpha-\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2}. \\ &\rho = \cos\frac{\delta}{2} = \cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}, \end{aligned}\right\} \qquad (14.10\text{-}29)$$

Заметим, что прибавление 2π к одному из углов Эйлера меняет знак всех параметров (29) и не меняет матрицы вращения A.

Если $\psi_2 = 0$ в равенстве (22) или $\theta_2 = \pi/2$ в равенстве (25) (например, $\beta = 0$, $\beta' = 0$ или $\theta = \pi/2$), то два остающихся угла Эйлера уже однозначно не определяют данное вращение («карданов подвес»). Таким образом, углы Эйлера можно применять для описания вращений лишь при известных ограничениях.

14.10-7. Бесконечно малые вращения, непрерывное вращение и угловая скорость (см. также пп. 5.3-2 и 14.4-9).

(a) Бесконечно малое трехмерное вращение на бесконечно малый угол $d\delta$ вокруг оси вращения с направляющими косинусами c_1, c_2, c_3 описывается соотношением

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + d\mathbf{x}' = (\mathsf{I} + d\mathsf{A})\,\mathbf{x}. \qquad (14.10\text{-}30)$$

$\mathsf{I} + d\mathsf{A}$ есть ортогональное бесконечно малое преобразование, так что преобразование $d\mathsf{A}$ кососимметрично (п. 14.4-10). В ортонормированном координатном базисе $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ преобразование $d\mathsf{A}$ описывается кососимметрической матрицей

$$dA \equiv \left[\frac{d}{d\delta}\, a_{ik}\,|_{\delta=0}\right] d\delta \equiv \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix} d\delta, \qquad (14.10\text{-}31)$$

получаемой дифференцированием соотношения (6). Отметим, что

$$d\mathbf{x}' = (d\mathsf{A})\,\mathbf{x} = (\mathbf{c} \times \mathbf{x})\,d\delta, \qquad (14.10\text{-}32)$$

где $\mathbf{c} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3$ — единичный вектор в направлении положительной оси вращения.

Вот более общее утверждение. *Если* W — *любой кососимметрический линейный оператор в трехмерном евклидовом векторном пространстве* $\mathcal{U}$, *пред-*

---

[1]) a и b определены в п. 14.10-4. Заметим, что иногда употребляются несколько другие определения параметров Кэли — Клейна.

ставляемый в ортонормированном координатном базисе $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ *кососимметрической матрицей*

$$W \equiv \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix},$$

то для каждого вектора $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{w} \times \mathbf{x},$$

где $\mathbf{w} = w_1\mathbf{u}_1 + w_2\mathbf{u}_2 + w_3\mathbf{u}_3$ (см. также п. 16.9-2).

(b) Для непрерывного трехмерного вращения, описываемого соотношением[1])

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x},$$

где $\mathbf{x}$ — постоянный вектор, формула (32) дает

$$\frac{d\mathbf{x}'(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\,\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x}'(t) \equiv \boldsymbol{\omega}(t) \times [\mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}]. \qquad (14.10\text{-}33a)$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$, выражающийся через неподвижные и вращающиеся базисные векторы по формулам

$$\boldsymbol{\omega}(t) \equiv \omega_1(t)\,\mathbf{u}_1 + \omega_2(t)\,\mathbf{u}_2 + \omega_3(t)\,\mathbf{u}_3 \equiv$$

$$\equiv \bar{\omega}_1(t)\,\mathbf{u}_1'(t) + \bar{\omega}_2(t)\,\mathbf{u}_2'(t) + \bar{\omega}_3(t)\,\mathbf{u}_3'(t), \qquad (14.10\text{-}33b)$$

направлен вдоль мгновенной оси вращения (оси вращения $\mathbf{x}' \to \mathbf{x}' + d\mathbf{x}'$), а $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ есть **мгновенная скорость вращения** относительно t. Если параметр t есть время, то вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ называется **угловой скоростью вращения**.

Из равенств (33) получаем

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \Omega(t)\,\mathbf{A}(t), \qquad (14.10\text{-}34)$$

где Ω — кососимметрический оператор, описываемый в системах координат $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ и $\mathbf{u}_1'(t)$, $\mathbf{u}_2'(t)$, $\mathbf{u}_3'(t)$ соответственно матрицами

$$\left.\begin{aligned} \Omega(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{\Omega}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\omega}_3(t) & \bar{\omega}_2(t) \\ \bar{\omega}_3(t) & 0 & -\bar{\omega}_1(t) \\ -\bar{\omega}_2(t) & \bar{\omega}_1(t) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad (14.10\text{-}35)$$

Пользуясь соотношениями (14.6-8) и тем, что $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}'$, находим

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \equiv \Omega\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}\bar{\Omega}, \qquad \Omega \equiv \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}', \qquad \bar{\Omega} \equiv \mathbf{A}'\frac{d\mathbf{A}}{dt}. \qquad (14.10\text{-}36)$$

---

[1]) Здесь, как и ранее, $\mathbf{x}'$ — *не производная*, а вектор, получающийся из $\mathbf{x}$ в результате вращения.

Подставляя (8), (20) или (26) в (36), получаем соотношения между компонентами угловой скорости и элементами матриц (направляющими косинусами), параметрами Эйлера и углами Эйлера. В частности,

$$\frac{dA}{dt} \equiv \frac{d}{dt}[a_{ik}] \equiv \begin{pmatrix} \bar\omega_3 a_{12} - \bar\omega_2 a_{13} & \bar\omega_1 a_{13} - \bar\omega_3 a_{11} & \bar\omega_2 a_{11} - \bar\omega_1 a_{12} \\ \bar\omega_3 a_{22} - \bar\omega_2 a_{23} & \bar\omega_1 a_{23} - \bar\omega_3 a_{21} & \bar\omega_2 a_{21} - \bar\omega_1 a_{22} \\ \bar\omega_3 a_{32} - \bar\omega_2 a_{33} & \bar\omega_1 a_{33} - \bar\omega_3 a_{31} & \bar\omega_2 a_{31} - \bar\omega_1 a_{32} \end{pmatrix}, \quad (14.10\text{-}37)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_1(t) &\equiv 2(\dot\lambda\rho - \lambda\dot\rho - \dot\mu\nu + \mu\dot\nu) \equiv \\ &\equiv -\sin\alpha\frac{d\beta}{dt} + \cos\alpha\sin\beta\frac{d\gamma}{dt}; \\ \omega_2(t) &\equiv 2(\dot\mu\rho - \mu\dot\rho - \dot\nu\lambda + \nu\dot\lambda) \equiv \\ &\equiv \cos\alpha\frac{d\beta}{dt} + \sin\alpha\sin\beta\frac{d\gamma}{dt}; \\ \omega_3(t) &\equiv 2(\dot\nu\rho - \nu\dot\rho - \dot\lambda\mu + \lambda\dot\mu) \equiv \\ &\equiv \frac{d\alpha}{dt} + \cos\beta\frac{d\gamma}{dt}; \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{(компоненты } \omega(t) \\ \text{в неподвижной} \\ \text{системе координат)}\end{matrix} \quad (11.10\text{-}38)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar\omega_1(t) &\equiv 2(\dot\lambda\rho - \lambda\dot\rho + \dot\mu\nu - \mu\dot\nu) \equiv \\ &\equiv -\sin\beta\cos\gamma\frac{d\alpha}{dt} + \sin\gamma\frac{d\beta}{dt} \equiv \\ &\equiv \cos\theta\cos\psi\frac{d\varphi}{dt} + \sin\psi\frac{d\theta}{dt}; \\ \bar\omega_2(t) &\equiv 2(\dot\mu\rho - \mu\dot\rho + \dot\nu\lambda - \nu\dot\lambda) \equiv \\ &\equiv \sin\beta\sin\gamma\frac{d\alpha}{dt} + \cos\gamma\frac{d\beta}{dt} \equiv \\ &\equiv -\cos\theta\sin\psi\frac{d\varphi}{dt} + \cos\psi\frac{d\theta}{dt}; \\ \bar\omega_3(t) &\equiv 2(\dot\nu\rho - \nu\dot\rho + \dot\lambda\mu - \lambda\dot\mu) \equiv \\ &\equiv \cos\beta\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} \equiv \sin\theta\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}; \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{(компоненты } \omega(t) \\ \text{во вращающейся} \\ \text{системе координат)}\end{matrix} \quad (14.10\text{-}39)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &\equiv \frac{1}{\cos\theta}(\bar\omega_1\cos\psi - \bar\omega_2\sin\psi), \\ \frac{d\theta}{dt} &\equiv \bar\omega_1\sin\psi + \bar\omega_2\cos\psi, \\ \frac{d\psi}{dt} &\equiv (\bar\omega_2\sin\psi - \bar\omega_1\cos\psi)\operatorname{tg}\theta + \bar\omega_2. \end{aligned}\right\} \quad (14.10\text{-}40)$$

14.10-8. Группа трехмерных вращений и ее представления (см. также пп. 12.2-1—12.2-12 и 14.9-1—14.9-6).

(а) Ортогональные преобразования (1) трехмерного евклидова векторного пространства в себя необходимо ограничены и невырождены и образуют **группу трехмерных вращений-отражений** $R_3^{\pm}$. Собственные вращения ($\det(\mathrm{A}) = 1$) образуют нормальный делитель группы $R_3^{\pm}$, **группу трехмерных вращений** R_3^{+}. Ни группа $R_3^{\pm}$, ни группа R_3^{+} не коммутативны.

Вращения, имеющие один и тот же по абсолютной величине угол вращения $|\delta|$, принадлежат к одному и тому же классу сопряженных элементов. Вращения вокруг произвольной фиксированной оси образуют коммутативную подгруппу группы R_3^{+} (двумерные вращения).

$R_3^{\pm}$ является подгруппой группы всех невырожденных линейных преобразований евклидова векторного пространства на себя (**полная линейная группа, ПЛГ**). Заметим, что каждое преобразование из ПЛГ является произведением собственного или несобст-

венного вращения и неотрицательного симметрического преобразования (аффинного преобразования, сжатия или растяжения; см. также пп. 14.4-8 и 13.3-4).

(b) Неприводимые представления группы R_3^+. *Матрицы* (20) *образуют неприводимое унитарное двукратное представление группы* R_3^+ *в поле комплексных чисел*, т. е. группа трехмерных вращений R_3^+ представляется группой унитарных преобразований с определителем 1 двумерного унитарного векторного пространства на себя **(двумерная унимодулярная унитарная группа, специальная унитарная группа, СУГ).**

Справедливо и более общее утверждение. Группа трехмерных вращений R_3^+ имеет ограниченные неприводимые представления размерностей $n=2$, 3, 4, ... Полную систему унитарных неприводимых представлений удобно обозначить символами $\mathscr{R}^{(1/2)}$, $\mathscr{R}^{(1)}$, $\mathscr{R}^{(3/2)}$, ..., где $\mathscr{R}^{(j)}$ имеет размерность $n=2j+1$, а матрица размера $(2j+1)\times(2j+1)$, представляющая вращение с параметрами Кэли—Клейна a, b, $-\bar{b}$, $\bar{a}$ (п. 14.10-4) или углами Эйлера α, β, γ (п. 14.10-6), имеет вид

$$\left[U_{mq}^{(j)}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\right]\equiv$$

$$\equiv\left[\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!\,(j+q)!\,(j-q)!}}{(j-m-h)!\,(j+q-h)!\,(h-q+m)!\,h!}(\bar{a})^{j-m-h}a^{j+q-h}(\bar{b})^{h+m-q}b^h\right]\equiv$$

$$\equiv\left[\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!\,(j+q)!\,(j-q)!}}{(j-m-h)!\,(j+q-h)!\,(h-q+m)!\,h!}\times\right.$$

$$\left.\times e^{-i(m\alpha+q\gamma)}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2j-m+q-2h}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{m-q+2h}\right] \qquad (14.10\text{-}41)$$

$$\left(j=\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \ldots;\ m,\ q=-j,\ -j+1,\ \ldots,\ j-1,\ j\right).$$

Считается, что $1/(N!)=0$ при $N<0$, и поэтому каждая сумма имеет только конечное число членов. *Представление* $\mathscr{R}^{(j)}$ *является точным (взаимно однозначным) при* $j=1$, 2, ... *и двукратным при* $j={}^1/_2$, ${}^3/_2$, ... (см. также п. 14.10-4). Характером (п. 14.9-4) представления $\mathscr{R}^{(j)}$ служит функция

$$\chi^{(j)}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\equiv\operatorname{Tr}\left[U_{mq}^{(j)}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\right]\equiv\frac{\sin(j+{}^1/_2)\,\delta}{\sin(\delta/2)} \qquad (14.10\text{-}42)$$

$$(j=0,\ {}^1/_2,\ 1,\ {}^3/_2,\ \ldots),$$

где δ — угол поворота, определенный в п. 14.10-2.

Особые индексы j, m и q, применяемые для $\mathscr{R}^{(j)}$ и $U_{mq}^{(j)}$, — это как раз индексы, связанные с *сферическими функциями степени* j (п. 21.8-12). Для целочисленных значений j эти функции образуют $(2j+1)$-мерное представляющее пространство для $\mathscr{R}^{(j)}$ с функциями (21.8-66) в качестве ортонормированного базиса.

ГЛАВА 15

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

15.1. ВВЕДЕНИЕ. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

15.1-1. Вводные замечания. *Функциональный анализ* рассматривает подходящим образом выбранные классы функций как множества «точек» в топологических пространствах (гл. 12) и, в частности, классы функций, состоящих из *многомерных векторов*, допускающих определение *скалярного произведения* (п. 15.2-1) и *разложения по ортогональным функциям* (базисным векторам, см. п. 15.3-4). Изящные и богатые геометрическими аналогиями выводы теории линейных преобразований, введенной в гл. 14, распространяются на широкий класс операций, включающий линейные интегральные преобразования и дифференцирование. Решения линейных дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными, и линейных интегральных уравнений находятся путем более или менее простого обобщения решения систем линейных уравнений, в частности, сюда могут быть включены задачи о собственных значениях (пп. 14.8-3 и 15.4-5).

В пп. 15.3-1—15.3-10 рассматриваются линейные интегральные уравнения, в пп. от 15.4-1 до 15.4-12 вводятся линейные краевые задачи и задачи о собственных значениях для дифференциальных уравнений. Остальная часть главы содержит различные методы решения линейных краевых задач, а именно:

1. Разложения по собственным функциям (п.15.4-12); этот метод может быть расширен включением различных методов интегральных преобразований (п. 10.5-1).
2. Функции Грина (пп. 15.5-1, 15.5-3, 15.6-6, 15.6-9).
3. Сведение к интегральным уравнениям (п.15.3-2).
4. Вариационные методы (п. 15.4-7, см. также пп. 11.7-1—11.7-3). В частности, в пп. 15.6-1—15.6-10 рассматриваются краевые задачи для *уравнений Лапласа и Пуассона* (теория потенциала) и пространственная форма волнового уравнения.

Несмотря на то, что многие практические задачи поддаются лишь численному решению (п. 20.9-4), общая и интуитивно наглядная точки зрения функционального анализа предоставляют возможность далеко идущего проникновения в теорию поведения колебательных систем, атомных явлений и т. д.

15.1-2. Обозначения (см. также п. 15.4-1). На всем протяжении пп. с 15.2-1 до 15.5-4 $\Phi(x)$, $f(x)$, $F(x)$, ... обозначают или функции одной независимой переменной x или, для краткости, функции нескольких переменных x^1, x^2, ..., x^n (см. также пп. 6.2-1 и 16.1-2). *В одномерном случае* dx есть просто дифференциал, в *многомерном случае*

$$dx \equiv dx^1\, dx^2 \ldots dx^n.$$

Интеграл

$$I = \int\limits_V f(\xi)\, d\xi \tag{15.1-1}$$

представляет в одномерном случае определенный интеграл

$$I = \int\limits_a^b f(\xi)\, d\xi$$

по ограниченному или неограниченному интервалу $V \equiv (a, b)$, а в n-мерном случае — n-кратный интеграл

$$I = \iint\limits_V \ldots \int f(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)\, d\xi^1\, d\xi^2 \ldots d\xi^n \tag{15.1-2}$$

по области V в n-мерном пространстве. Как правило, возможно ввести элемент объема $dV(\xi) = \sqrt{|g(\xi)|}\, d\xi$ так, что каждый интеграл (2) приобретает вид *объемного интеграла* (пп. 6.2-3, 15.4-1,b и 16.10-10).

15.2. ФУНКЦИИ КАК ВЕКТОРЫ. РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

15.2-1. Квадратично интегрируемые функции как векторы. Скалярное произведение и нормирование[1]).

(a) Действительная или комплексная функция, определенная на измеримом множестве E «точек» (x) или $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, **квадратично интегрируема** на E, если существует в смысле Лебега интеграл $\int\limits_E |f(\xi)|^2\, d\xi$ (п. 4.6-15).

Класс L_2 (более точно $L_2(V)$) всех действительных или комплексных квадратично интегрируемых функций на некотором интервале или в некоторой области соответственно образует бесконечномерное *действительное* или *комплексное унитарное векторное пространство* (п. 14.2-6), если рассматривать функции $f(x)$, $h(x)$, ... как векторы и определить

вектор-сумму *функций* $f(x)$ и $h(x)$ как $f(x) + h(x)$;

произведение вектора $f(x)$ *на скаляр* α как $\alpha f(x)$;

скалярное произведение векторов $f(x)$ и $h(x)$ как

$$(f, h) \equiv \int\limits_V \gamma(\xi)\, \overline{f(\xi)}\, h(\xi)\, d\xi, \tag{15.2-1}$$

где $\gamma(x)$ — данная действительная неотрицательная функция (**весовая функция**), квадратично интегрируемая на V. Замене весовой функции соответствует замена независимой переменной; во многих приложениях $\gamma(x) \equiv 1$ или $\gamma(\xi)\, d\xi$ есть элемент объема (п. 15.4-1, b).

Линейная независимость множества функций (векторов) в L_2 определяется способом п. 1.9-3 (см. также п. 14.2-3). *Квадратично интегрируемые функции* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_m(x)$ *линейно независимы тогда и только тогда, когда определитель Грама* $\det[(f_i, f_k)]$ *отличен от нуля* (см. также п. 14.2-6, a).

(b) Как и в п. 14.2-7, **норма** функции (вектора) $f(x)$ в L_2 есть число

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} \equiv \left[\int\limits_V \gamma(\xi)\, |f(\xi)|^2\, d\xi\right]^{1/2}. \tag{15.2-2}$$

Функция $f(x)$ (необходимо квадратично интегрируемая) **нормируема** тогда и только тогда, когда $\|f\|$ существует и отлична от нуля. Умножение на $1/\|f\|$ нормируемой функции $f(x)$ доставляет функцию $f(x)/\|f\|$ с единичной нормой (**нормирование** $f(x)$).

(c) Скалярное произведение, определенное равенством (1), имеет свойства, перечисленные в п. 14.2-6. В частности, *если* $f(x)$, $h(x)$ *и действительная неотрицательная весовая функция* $\gamma(x)$ *квадратично интегрируемы на* V, *то имеет место неравенство Коши — Шварца*

$$|(f, h)|^2 \equiv \left|\int\limits_V \gamma \bar{f} h\, d\xi\right|^2 \leqslant \int\limits_V \gamma |f|^2\, d\xi \int\limits_V \gamma |h|^2\, d\xi \equiv (f, f)(h, h) \tag{15.2-3}$$

---

[1]) Обозначения см. п. 15.1-2.

и *неравенство Минковского*

$$\|f+h\|=$$
$$=\left(\int_V \gamma\,|f+h|^2\,d\xi\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_V \gamma\,|f|^2\,d\xi\right)^{1/2}+\left(\int_V \gamma\,|h|^2\,d\xi\right)^{1/2} \equiv \|f\|+\|h\|. \qquad (15.2\text{-}4)$$

15.2-2. Метрика и сходимость в L_2. Сходимость в среднем (см. также пп. 12.5-2—12.5-4, 14.2-7 и 18.6-3).

(a) Как унитарное векторное пространство, L_2 допускает введение *расстояния между функциями* (*метрика*, п. 12.5-2)

$$d(f,\ h) \equiv \|f-h\| \equiv \left[\int_V \gamma(\xi)\,|f(\xi)-h(\xi)|^2\,d\xi\right]^{1/2}. \qquad (15.2\text{-}5)$$

Корень (5) из среднего квадратичного разности между $f(x)$ и $h(x)$ равен нулю (метрическая эквивалентность $f(x)$ и $h(x)$) тогда и только тогда, когда $f(x)=h(x)$ для почти всех x в V (п. 4.6-14, b).

(b) Сходимость в среднем. Метрика (5) порождает следующее определение сходимости по метрике в L_2. Для данного интервала или области V последовательность квадратично интегрируемых функций $s_0(x)$, $s_1(x)$, ... **сходится в среднем** (с индексом 2) к пределу $s(x)$ ($s_n(x) \xrightarrow[\text{в среднем}]{} s(x)$ при $n\to\infty$), если

$$d^2(s_n,\ s) \equiv \|s_n-s\|^2 \equiv \int_V \gamma(\xi)\,|s_n(\xi)-s(\xi)|^2\,d\xi \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \qquad (15.2\text{-}6)$$

В этом случае последовательность определяет ее **предел в среднем:** $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ s_n(x)=s(x)$, *единственным образом почти всюду в* V и, в частности, в каждой точке непрерывности $s(x)$. Сходимость в среднем не обязательно имеет своим следствием обычную сходимость последовательности $s_0(x)$, $s_1(x)$, ... в каждой точке, а обычная сходимость последовательности в каждой точке области V не имеет следствием сходимость в среднем. В частности, бесконечный ряд квадратично интегрируемых функций $a_0(x)+a_1(x)+a_2(x)+\ldots$ сходится в среднем к пределу $s(x)$, если

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \xrightarrow[\text{в среднем}]{} s(x) \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

В этом случае пишут

$$a_0(x)+a_1(x)+a_2(x)+\ldots \underset{\text{в среднем}}{=} s(x).$$

(c) Полнота L_2. Теорема Рисса—Фишера. Пространство L_2, ассоциированное с данным интервалом или областью V, является *полным* (п. 12.5-4, a). Именно, *каждая фундаментальная последовательность квадратично интегрируемых функций* $s_0(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x)$, ..., *т. е. последовательность, для которой* $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} d(s_m,\ s_n)=0$, *сходится в среднем к квадратично интегрируемой функции* $s(x)$ *и определяет* $s(x)$ *однозначно для почти всех* x *в* V (*теорема Рисса—Фишера*).

Замечание. Свойство полноты, выраженное теоремой Рисса — Фишера, превращает L_2 в *гильбертово пространство* (п. 14.2-7, c); в нем можно ввести ортонормированный базис со всеми свойствами, указанными в пп. 14.7-4 и 15.2-4. Это является важным обстоятельством для использования интегрирования по Лебегу и сходимости в среднем.

(d) По определению, $f(x,\ \alpha) \xrightarrow[\text{в среднем}]{} F(x)$ при $\alpha\to a$, если

$$\lim_{\alpha\to a} \|f(x,\ \alpha)-F(x)\|=0.$$

15.2-3. Ортогональные функции и ортонормированные последовательности функций (см. также п. 14.7-3).

(a) Две квадратично интегрируемые функции $f(x)$, $h(x)$ называются взаимно **ортогональными** (ортогональными относительно действительной неотрицательной весовой функции $\gamma(x)$ [1])), если

$$(f,\ h) \equiv \int_V \gamma(\xi)\,\overline{f(\xi)}\,h(\xi)\,d\xi = 0. \tag{15.2-7}$$

Последовательность функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... называется **ортонормированной**, если

$$(u_i,\ u_k) \equiv \int_V \gamma \bar{u}_i u_k\,d\xi = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k \end{cases} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{15.2-8}$$

Каждое множество нормируемых взаимно ортогональных функций (*и, в частности, каждая ортонормированная последовательность*) *является линейно независимым.*

(b) Неравенство Бесселя. *Для любой конечной или бесконечной ортонормированной последовательности* $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... *и любой квадратично интегрируемой на* V *функции* $f(x)$ *выполняется неравенство Бесселя*

$$\sum_k |(u_k,\ f)|^2 \leqslant (f,\ f). \tag{15.2-9}$$

Знак равенства возможен тогда и только тогда, когда $f(x)$ *принадлежит линейному многообразию, натянутому на* $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... (см. пп. 14.2-2, 14.7-3 и 15.2-4).

15.2-4. Полные ортонормированные последовательности функций. Ортонормированные базисы (см. также п. 14.7-4). Ортонормированная последовательность $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... в $L_2(V)$ является **полной ортонормированной последовательностью (ортонормированным базисом)** тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1. Каждая квадратично интегрируемая функция может быть представлена в форме $f(x) \underset{\text{в среднем}}{=} f_1 u_1(x) + f_2 u_2(x) + \ldots$, где $f_k = (u_k,\ f)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$.

2. Для каждой квадратично интегрируемой функции $f(x)$ такой, что $f_1 u_1(x) + f_2 u_2(x) + \ldots \underset{\text{в среднем}}{=} f(x)$, имеет место *тождество Парсеваля* или *соотношение полноты* (см. также п. 14.7-3, b и 15.2-3, b)

$$(f,\ f) = |f_1|^2 + |f_2|^2 + \ldots$$

3. Для каждой пары квадратично интегрируемых функций $f(x)$, $h(x)$ таких, что

$$f_1 u_1(x) + f_2 u_2(x) + \ldots \underset{\text{в среднем}}{=} f(x),$$

$$h_1 u_1(x) + h_2 u_2(x) + \ldots \underset{\text{в среднем}}{=} h(x),$$

имеет место соотношение

$$(f,\ h) = \bar{f}_1 h_1 + \bar{f}_2 h_2 + \ldots$$

---

[1]) Некоторые авторы называют $f(x)$ и $h(x)$ взаимно ортогональными только в случае $\gamma(x) \equiv 1$, т. е. если $\int_V \bar{f} h\,d\xi = 0$.

4. Ортонормированная последовательность $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... не содержится в какой-либо другой ортонормированной последовательности в $L_2(V)$; каждая квадратично интегрируемая функция $f(x)$, ортогональная к каждой $u_k(x)$, равна нулю почти всюду в V.

Каждое из этих четырех предложений имеет следствиями три остальных. Если на интервале или в области V дана полная ортонормированная последовательность функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... и некоторая последовательность комплексных чисел f_1, f_2, ... такая, что $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2$ сходится, то существует квадратично интегрируемая функция $f(x)$ такая, что $f_1u_1(x)+f_2u_2(x)+\ldots$ сходится в среднем к $f(x)$ (теорема Рисса—Фишера, см. также п. 15.2-2, с); f_k определяют $f(x)$ однозначно почти всюду в V и, в частности, если $f(x)$ непрерывна, то всюду в V (*теорема единственности,* см. также п. 4.11-5).

15.2-5. Ортогонализация и нормирование последовательности функций (см. также п. 14.7-4, b). *Пусть дано счетное (конечное или бесконечное) множество линейно независимых* (п. 1.9-3) *функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., нормируемых на V; тогда существует ортонормированная последовательность функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., порождающая то же самое многообразие функций.* Эта последовательность может быть построена посредством следующих рекуррентных формул (*процесс ортогонализации Грама—Шмидта*):

$$\left.\begin{aligned} &u_i(x)=\frac{v_i(x)}{\|v_i(x)\|}=\frac{v_i(x)}{\sqrt{(v_i,\ v_i)}},\\ &v_1(x)=\varphi_1(x),\quad v_{i+1}(x)=\varphi_{i+1}(x)-\sum_{k=1}^{i}(u_k,\ \varphi_{i+1})\,u_k(x),\\ &\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots).\end{aligned}\right\}\qquad(15.2\text{-}10)$$

См. также п. 21.7-1, примеры.

15.2-6. Аппроксимации и разложения в ряды по ортогональным функциям (см. также пп. 4.11-2, с, 4.11-4, b, 15.4-12, 20.6-2, 20.6-3, 20.9-9, 21.8-12). *Пусть дана квадратично интегрируемая функция $f(x)$ и ортонормированная последовательность $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... Аппроксимация $f(x)$ в форме*

$$s_n(x)=a_1u_1(x)+a_2u_2(x)+\ldots+a_nu_n(x)\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots)\qquad(15.2\text{-}11)$$

доставляет наименьшее значение средней квадратической погрешности

$$\int_V |s_n(x)-f(x)|^2\,dx,\quad \textit{если}\quad a_k=(u_k,\ f).$$

Заметим, что выбор коэффициентов a_k не зависит от n. Это свойство вместе с относительной простотой формул, указанных в п. 15.2-4, делает очень важными разложения в ряды

$$f(x)\underset{\text{в среднем}}{=}f_1u_1(x)+f_2u_2(x)+\ldots,\quad\text{где}\quad f_k=(u_k,\ f)\ (k=1,\ 2,\ \ldots)$$

по подходящим образом выбранной последовательности ортонормированных функций.

15.2-7. Линейные операции над функциями. В пп. 8.2-1, 8.6-1 — 8.6-4, 15.3-1, 15.4-1, 20.4-2 введены различные *линейные операции* (п. 14.3-1)

$$\varphi(x)=\mathbf{L}\Phi(\xi),\qquad(15.2\text{-}12)$$

связывающие функцию $\varphi(x)$ с данной функцией $\Phi(\xi)$ так, что

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\,[\Phi_1(\xi)+\Phi_2(\xi)]&=\mathbf{L}\Phi_1(\xi)+\mathbf{L}\Phi_2(\xi),\\ \mathbf{L}\,[\alpha\,\Phi(\xi)]&=\alpha\,\mathbf{L}\Phi(\xi).\end{aligned}\qquad(15.2\text{-}13)$$

$\Phi(\xi)$ и $\varphi(x)$ могут принадлежать одной или различным областям. Как и в п. 14.1-3, существуют две различные интерпретации функционального преобразования (12):

1. Уравнение (12) описывает операцию над функцией (точка зрения «alibi» или «активная»).

2. $\Phi(\xi)$ и $\varphi(x)$ представляют один и тот же абстрактный вектор (в том же смысле, как две матрицы, п. 14.6-1, b), и уравнение (12) описывает замену представления (точка зрения «alias» или «пассивная», особенно используемая в квантовой механике, см. также п. 8.1-1).

15.3. ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

15.3-1. Линейные интегральные преобразования[1]).

(a) В пп. 15.3-1 — 15.3-10 рассматриваются линейные интегральные преобразования

$$\mathbf{K}f(\xi) \equiv \int_V K(x, \xi) f(\xi)\, d\xi = F(x), \qquad (15.3\text{-}1)$$

связывающие пары функций $f(\xi)$ и $F(x)$. Функция $K(x, \xi)$ называется **ядром** линейного интегрального преобразования. Все интегралы предполагаются существующими в смысле Лебега (п. 4.6-15).

Области, которым принадлежат функция-объект $f(\xi)$ и результирующая функция $F(x)$ в уравнении (1), не обязательно тождественны (см., например, преобразования Лапласа, п. 8.2-1). **В пп. 15.3-1, b — 15.3-10 предполагается, что x и ξ изменяются в одном и том же интервале или в одной и той же области.** «Символическое» интегральное преобразование

$$\int_V \delta(x, \xi) f(\xi)\, d\xi \equiv f(x)$$

представляет единичное преобразование (см. также пп. 15.5-1 и 21.9-2).

Линейное интегральное преобразование (1) может быть трактовано или с точки зрения «alibi», или с точки зрения «alias» (п. 15.2-7). Каждое ядро представляет линейный оператор в том же смысле, что и матрица (п. 14.5-2, см. также п. 15.3-1, c).

(b) Для данного ядра $K(x, \xi)$, $\tilde{K}(x, \xi) \equiv K(\xi, x)$ называется **транспонированным ядром,** $K^*(x, \xi) \equiv \overline{K(\xi, x)}$ называется **сопряженным (эрмитово сопряженным) ядром** (см. также п. 14.4-3). Данное ядро $K(x, \xi)$ называется

симметричным, если $K(\xi, x) \equiv K(x, \xi)$;

эрмитовым, если $\overline{K(\xi, x)} \equiv K(x, \xi)$;

нормируемым, если $\int_V \int_V |K(x, \xi)|^2\, d\xi\, dx$ существует и отличен от нуля;

непрерывным в среднем на V, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \int_V |K(x+\Delta x, \xi) - K(x, \xi)|^2\, d\xi = 0$$

(см. также п. 12.5-1, c);

вырожденным (разделяющимся), если $K(x, \xi)$ может быть представлено в виде конечной суммы $K(x, \xi) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\, h_i(\xi)$.

Нормируемое ядро представляет ограниченный оператор (п. 14.4-1) так, что $F(x)$ нормируема, если $f(\xi)$ нормируема (п. 15.2-1, b). Вырожденные ядра представляют операторы конечного ранга (п. 14.3-2). *Если $K(x, \xi)$ эрмитово, нормируемо и непрерывно в среднем на V и $f(\xi)$ квадратично интегрируема на V, то $F(x)$ непрерывна в V.*

---

[1]) Обозначения см. п. 15.1-2, см. также п. 15.4-1, b.

(c) Матричное представление. Произведение двух интегральных преобразований. Дано нормируемое ядро $K(x, \xi)$ и ортонормированный базис (п. 15.2-4) $u_1(x), u_2(x), \dots$ в пространстве функций $f(x)$. Пусть

$$\left.\begin{aligned} &f(\xi) \underset{\text{в среднем}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(\xi), \quad F(x) \underset{\text{в среднем}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} F_k u_k(x), \\ &K(x, \xi) \underset{\text{в среднем}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k_{ik} u_i(x) \overline{u_k(\xi)}, \\ &\left[k_{ik} = \int_V \int_V \overline{u_i(x)}\, K(x, \xi)\, u_k(\xi)\, dx\, d\xi\right]. \end{aligned}\right\} \tag{15.3-2}$$

Тогда уравнение (1) эквивалентно матричному уравнению

$$\{F_i\} = [k_{ik}]\{f_k\}.$$

Заметим, что произведение матриц $[m_{ik}][k_{ik}]$, соответствующее ядру

$$\int_V M(x, \eta) K(\eta, \xi)\, d\eta,$$

представляет произведение двух последовательных интегральных преобразований (1), ядра которых $K(x, \xi)$, $M(x, \xi)$ соответствуют $[k_{ik}]$, $[m_{ik}]$. Если $K(x, \xi)$ — вырожденное ядро, то возможен выбор $u_k(x)$ такой, что матрица $[k_{ik}]$ будет конечной.

15.3-2. Линейные интегральные уравнения. Обзор. Интегральное уравнение есть функциональное уравнение (п. 9.1-2), включающее интегральное преобразование над неизвестной функцией $\Phi(x)$ (если функциональное уравнение включает также производные от $\Phi(x)$, то говорят об *интегро-дифференциальном уравнении*). Интегральное уравнение называется **однородным**, если каждое кратное $\alpha\Phi(x)$ некоторого решения $\Phi(x)$ также есть решение. В пп. 15.3-2 — 15.3-10 рассматриваются *линейные интегральные уравнения* в общей форме

$$\beta(x)\Phi(x) - \lambda \int_V K(x, \xi)\Phi(\xi)\, d\xi = F(x), \tag{15.3-3}$$

где ядро $K(x, \xi)$ и функции $\beta(x)$, $F(x)$ являются заданными. Область интегрирования V может быть фиксированной (*интегральные уравнения типа фредгольмовых*) или переменной (*интегральные уравнения типа вольтерровых*, п. 15.3-10). Назовем три важных типа задач.

1. **Линейные интегральные уравнения первого рода** ($\beta(x) \equiv 0$, $\lambda = -1$; п. 15.3-9), в которых надо найти неизвестную функцию $\Phi(x)$ по данному ее интегральному преобразованию $F(x)$. Соответствующее операторное уравнение $\mathbf{K}\Phi = F$ аналогично матричному уравнению $[k_{ik}]\{\Phi_k\} = \{F_i\}$.

2. **Однородное линейное интегральное уравнение второго рода** ($F(x) \equiv 0$, $\beta(x) \equiv 1$, λ неизвестно; пп. 15.3-3 — 15.3-6) представляет *задачу о собственных значениях*. Соответствующее операторное уравнение $\lambda\mathbf{K}\Phi = \Phi$ аналогично матричному уравнению $\lambda[k_{ik}]\{\Phi_k\} = \{\Phi_i\}$.

3. **Неоднородное линейное интегральное уравнение второго рода** ($\beta(x) \equiv 1$, λ задано; п. 15.3-7) может быть записано в виде $\Phi - \lambda\mathbf{K}\Phi = F$ и представляет задачу, тип которой был обсужден в п. 14.8-10.

Если $\beta(x)$ — действительная положительная функция всюду в V, то можно свести общее линейное интегральное уравнение (3) посредством преобразования

$$\Phi(x) = \frac{\tilde{\Phi}(x)}{\sqrt{\beta(x)}}, \quad F(x) = \tilde{F}(x)\sqrt{\beta(x)}, \quad K(x, \xi) = \tilde{K}(x, \xi)\sqrt{\beta(x)\beta(\xi)}, \tag{15.3-4}$$

к линейному интегральному уравнению второго рода.

15.3-3. Однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Собственные функции и собственные значения (см. также п. 14.8-3 и 15.4-5).

(a) Функция $\psi=\psi(x)$, не равная тождественно нулю в V и удовлетворяющая *однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода*

$$\lambda \mathbf{K}\psi(\xi)\equiv\lambda\int_V K(x,\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi=\psi(x) \tag{15.3-5}$$

при определенном значении параметра λ, называется **собственной функцией (характеристической функцией)** линейного интегрального уравнения (5) или ядра $K(x,\xi)$. Соответствующее значение λ есть **собственное значение** интегрального уравнения.

Если $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ — собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению λ, то то же самое относится к их линейной комбинации $\alpha_1\psi_1(x)+\alpha_2\psi_2(x)$. Число m линейно независимых собственных функций, соответствующих некоторому собственному значению, называется **рангом** λ; если $K(x,\xi)$ — нормируемое ядро, то каждое m конечно. *Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям линейного интегрального уравнения* (5), *линейно независимы. Общее количество линейно независимых собственных функций конечно только в том случае, когда $K(x,\xi)$ — вырожденное ядро.*

Если линейный оператор $\mathbf{K}$, описываемый линейным интегральным преобразованием (5), имеет единственный обратный $\mathbf{L}=\mathbf{K}^{-1}$, то $\psi(x)$ и λ суть собственная функция и собственное значение неособенного оператора $\mathbf{L}$ (см. также п. 15.4-5) и все собственные значения отличны от нуля. Во многих приложениях $\mathbf{L}$ является дифференциальным оператором, а $K(x,\xi)$ — функцией Грина (п. 15.5-1).

(b) Собственные функции и собственные значения эрмитовых ядер (см. также пп. 14.8-4 и 15.4-6). *Если $K(x,\xi)$ — эрмитово ядро, то имеют место следующие свойства:*

1. *Все собственные значения интегрального уравнения* (5) *действительны.*

2. *Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, взаимно ортогональны* (с весом 1, п. 15.2-3).

3. *Если ядро $K(x,\xi)$ нормируемо, то все собственные значения отличны от нуля.*

4. *Существует по меньшей мере одно собственное значение, отличное от нуля; собственные значения образуют дискретную последовательность, содержащую не более конечного числа собственных значений в каждом конечном интервале, и каждое собственное значение имеет конечный ранг.*

15.3-4. Теоремы разложения.

(a) Теоремы разложения для эрмитовых ядер. В соответствии с определениями скалярного произведения (п. 15.2-1) и сходимости в среднем (п. 15.2-2) с $\gamma(x)\equiv 1$ *каждое нормируемое эрмитово ядро $K(x,\xi)$ обладает ортонормированной последовательностью собственных функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, … так, что для каждой функции $F(x)$, представимой в форме $F(x)=\int_V K(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi$ (интегральное преобразование* (1) *функции $f(\xi)$* или «*истокообразное*» *представление $F(x)$), справедливо разложение*

$$\left.\begin{aligned} &F(x)\underset{\text{в среднем}}{=}\sum_{k=1}^{\infty}F_k\psi_k(x)\quad(x\in V),\\ &\text{с}\\ &F_k=(\psi_k,F)=\int_V\overline{\psi_k(\xi)}\,F(\xi)\,d\xi\quad(k=1,2,\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{15.3-6}$$

Ряд (6) *сходится абсолютно и равномерно к* $F(x)$ *для всех* $x \in V$, *если* $f(\xi)$ *кусочно-непрерывна в* V *или если* $f(\xi)$ *квадратично интегрируема, а ядро* $K(x, \xi)$ *непрерывно в среднем*. Эрмитово ядро $K(x, \xi)$ называется **полным,** если *каждая* квадратично интегрируемая функция $F(x)$ может быть представлена в форме (1) или (6), так что собственные функции $\psi_k(x)$ образуют полную ортонормированную последовательность (п. 15.2-4); это имеет место, например, если $K(x, \xi)$ — положительно или отрицательно определенное (п. 15.3-6).

Каждое нормируемое эрмитово ядро $K(x, \xi)$ *может быть разложено в ряд*

$$K(x, \xi) \underset{\text{в среднем}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \overline{\psi_k(\xi)}\, \psi_k(x) \quad (x, \xi \in V). \tag{15.3-7}$$

Ряд сходится равномерно к $K(x, \xi)$ *для всех* $x, \xi \in V$, *если* $K(x, \xi)$ *непрерывно в среднем или если* V *есть ограниченный интервал или ограниченная область, так что* $K(x, \xi)$ *непрерывно для всех* $x, \xi \in V$ *и интегральное уравнение* (5) *имеет конечное число положительных или отрицательных собственных значений* (*теорема Мерсера*).

(b) Вспомогательные ядра и теоремы разложения для неэрмитовых ядер. Пусть $K(x, \xi)$ — нормируемое ядро и $\mu_k > 0$ — положительные числа, для которых существуют ненулевые решения системы уравнений

$$\mu_k \int_V K(x, \xi)\, v_k(\xi)\, d\xi = w_k(x), \quad \mu_k \int_V K^*(x, \xi)\, w_k(\xi)\, d\xi = v_k(x). \tag{15.3-8}$$

Тогда числа μ_k^2 являются собственными значениями вспомогательных эрмитовых ядер

$$\int_V K^*(x, \eta)\, K(\eta, \xi)\, d\eta \quad \text{и} \quad \int_V K(x, \eta)\, K^*(\eta, \xi)\, d\eta.$$

Любая функция $F(x)$, представимая как интегральное преобразование (1) с ядром K или K^*, может быть разложена в ряды

$$F(x) \underset{\text{в среднем}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k w_k(x), \quad \text{где} \quad b_k = (w_k, F) \quad (x \in V), \tag{15.3-9a}$$

или

$$F(x) \underset{\text{в среднем}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x), \quad \text{где} \quad a_k = (v_k, F). \tag{15.3-9b}$$

Эти ряды сходятся абсолютно и равномерно к $F(x)$ *для всех* x *в* V, *если* $f(\xi)$ *кусочно-непрерывна в* V, *или* $f(\xi)$ *квадратично интегрируема, а* $K(x, \xi)$ *непрерывно в среднем*; *весовая функция равна* 1 (п. 15.2-1). *Для каждого нормируемого ядра* $K(x, \xi)$

$$K(x, \xi) \underset{\text{в среднем}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \overline{v_k(\xi)}\, w_k(x) \qquad (x, \xi \in V). \tag{15.3-10}$$

Если ядро $K(x, \xi)$ самосопряжено, то $v_k(x) = w_k(x)$, и формула (10) превращается в формулу (7).

15.3-5. Итерированные ядра. Итерированные ядра определяются соотношениями

$$K_1(x, \xi) \equiv K(x, \xi), \qquad K_{p+1}(x, \xi) \equiv \int_V K_p(x, \eta)\, K(\eta, \xi)\, d\eta \quad (p = 2, 3, \ldots) \tag{15.3-11}$$

и представляют степени $\mathbf{K}^p$ линейного оператора $\mathbf{K}$ уравнения (1). *Линейное интегральное уравнение*

$$\lambda \mathbf{K}^p \psi(\xi) \equiv \lambda \int_V K_p(x, \xi)\, \psi(\xi)\, d\xi = \psi(x) \tag{15.3-12}$$

имеет те же собственные функции $\varphi(x)$, *что и уравнение* (5), *с соответствующими собственными значениями* λ^p (см. также п. 14.8-3, d). Обратно, *каждое решение* $\psi(x)$ *уравнения* (12) *является решением уравнения* (5). *Если ядро* $K(x, \xi)$ *эрмитово и нормируемо, то*

$$K_p(x, \xi) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^p} \overline{\psi_k(\xi)}\, \psi_k(x), \qquad p=2, 3, \ldots;\ x,\xi \in V \qquad (15.3\text{-}13)$$

и эти ряды сходятся абсолютно и равномерно в V.

15.3-6. Эрмитовы интегральные формы. Задача о собственных значениях как вариационная задача (см. также пп. 11.1-1, 13.5-2, 13.5-3, 14.8-8, a, 15.4-7).

(a) Пусть дано нормируемое эрмитово ядро $K(x, \xi)$; скалярное произведение (необходимо действительное)

$$(\Phi, \mathbf{K}\Phi) = \int_V \int_V \overline{\Phi}(x)\, K(x, \xi)\, \Phi(\xi)\, dx\, d\xi \qquad (15.3\text{-}14)$$

называется **эрмитовой интегральной формой** или, в частности, **действительной квадратической интегральной формой**, если $K(x, \xi)$ — действительное и симметричное[1]). Эрмитова интегральная форма (14) (а также эрмитово ядро $K(x, \xi)$) называется **положительно определенным, отрицательно определенным, неотрицательным или неположительным**, если выражение (14) соответственно положительно, отрицательно, неотрицательно или неположительно для каждой функции $\Phi(x)$, не равной тождественно нулю в V и такой, что интеграл существует. *Интегральная форма* (14) *положительно определена или отрицательно определена в том и только в том случае, когда все собственные значения* λ_k *соответственно положительны или отрицательны.*

(b) *Проблема нахождения собственных функций* $\psi(x)$ *и собственного значения* λ *нормируемого эрмитова ядра может быть сформулирована как задача о стационарных значениях, способом, подобным изложенному в* п. 14.8-8, a.

Найдем квадратично интегрируемую функцию $\Phi(x)$ такую, что эрмитова интегральная форма (14) имеет стационарное значение при условии

$$(\Phi, \Phi) = \int_V |\Phi(\xi)|^2\, d\xi = 1.$$

Функция $\Phi = \psi_k(x)$ доставляет указанное стационарное значение форме (14), причем

$$\lambda_k = \frac{1}{\int_V \int_V \overline{\psi_k(x)}\, K(x, \xi) \psi_k(\xi)\, dx\, d\xi}.$$

Здесь также приложимы все другие теоремы п. 14.8-8, a. Следует лишь вспомнить, что оператор $\mathbf{K}$, представимый данным ядром $K(x, \xi)$, имеет собственные функции $\psi_k(\xi)$ и собственные значения $1/\lambda_k$. Часто бывает возможно решить интегральное уравнение вида (5), точно или приближенно, методами вариационного исчисления.

15.3-7. Неоднородное уравнение Фредгольма второго рода (см. также п. 14.8-10).

(a) Существование и единственность решения. Фредгольмово линейное интегральное уравнение второго рода

$$\Phi(x) - \lambda \int_V K(x, \xi)\, \Phi(\xi)\, d\xi = F(x) \qquad (15.3\text{-}16)$$

имеет следующее «альтернативное» свойство:

1. *Если данный параметр* λ *не является собственным значением ядра* $K(x, \xi)$, *то уравнение* (16) *имеет единственное решение* $\Phi(x)$.

---

[1]) Заметим, что в матричных обозначениях, введенных в п. 15.3-1, c,

$$(\Phi, \mathbf{K}\Phi) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k_{ik} \overline{\Phi}_i \Phi_k. \qquad (15.3\text{-}15)$$

2. *Если* λ *равно одному из собственных значений* λ_1 *уравнения* (5), *то «союзное» однородное интегральное уравнение*

$$\bar{\lambda}_1 \int_V \overline{K(\xi, x)}\, \chi(\xi)\, d\xi = \chi(x) \tag{15.3-17}$$

имеет решение $\chi(x)$, *не равное тождественно нулю в* V, *и данное интегральное уравнение* (16) *имеет решение* $\Phi(x)$, *лишь если* $F(x)$ *ортогональна (с весовой функцией* 1) *каждому решению* $\chi(x)$ *уравнения* (17). *Заметим, что уравнения* (17) *и* (5) *идентичны для эрмитовых ядер.*

При указанных выше условиях решения существуют, в частности, когда $K(x, \xi)$ кусочно-непрерывно и нормируемо, а $F(x)$ непрерывна и квадратично интегрируема на V. Если во втором случае решение $\Phi(x)$ существует, то уравнение (16) имеет бесконечное количество решений, так как каждая сумма некоторого частного решения и линейной комбинации собственных функций $\psi(x)$, соответствующих λ_1, является решением; в частности, существует единственное решение $\Phi(x)$, ортогональное ко всем этим собственным функциям.

(b) Сведение к интегральному уравнению с эрмитовым ядром. Если $K(x, \xi)$ нормируемо, то каждое решение $\Phi(x)$ уравнения (16) есть решение интегрального уравнения

$$\Phi(x) - |\lambda| \int_V H(x,\xi)\, \Phi(\xi)\, d\xi = F(x) - \bar{\lambda} \int_V \overline{K(\xi, x)}\, F(\xi)\, d\xi, \tag{15.3-18a}$$

где $H(x, \xi)$ есть эрмитово ядро, определяемое формулой

$$H(x, \xi) \equiv e^{i \arg \lambda} K + e^{-i \arg \lambda} K^* - |\lambda| \int_V \overline{K(\eta, x)}\, K(\eta, \xi)\, d\eta. \tag{15.3-18b}$$

Вследствие этого достаточно изучить методы решений для эрмитовых ядер.

Замечание. $H(x, \xi)$ и $K(x, \xi)$ имеют тождественные собственные функции, соответствующие собственным значениям $|\lambda_k|$ и λ_k.

(c) Резольвентное ядро. Решение $\Phi(x)$ линейного интегрального уравнения (16) удобно писать в форме

$$\Phi(x) = F(x) + \lambda \int_V \Gamma(x, \xi; \lambda)\, F(\xi)\, d\xi. \tag{15.3-19}$$

Функция $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ называется **резольвентным ядром** (иногда она называется *взаимным ядром*) для интегрального уравнения (16); уравнения (16) и (19) представляют взаимно обратные линейные преобразования.

Когда резольвентное ядро $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ существует, оно удовлетворяет интегральным уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma(x, \xi; \lambda) - \lambda \int_V K(x, t)\, \Gamma(t, \xi; \lambda)\, dt = K(x, \xi), \\ &\Gamma(x, \xi; \lambda) - \lambda \int_V K(t, \xi)\, \Gamma(x, t; \lambda)\, dt = K(x, \xi), \\ &\Gamma(x, \xi; \lambda) - \Gamma(x, \xi; \lambda') = (\lambda - \lambda') \int_V \Gamma(x, t; \lambda)\, \Gamma(t, \xi; \lambda')\, dt \end{aligned}\right\} \tag{15.3-20}$$

для произвольных λ, λ', не являющихся собственными значениями $K(x, \xi)$.

15.3-8. Решение линейного интегрального уравнения (16) (см. также п. 20.8-5, численные методы).

(a) Решение последовательными приближениями. Ряды Неймана. Полагая

$$\Phi^{[0]}(x) = F(x),$$

вычисляют последовательные приближения

$$\Phi^{[j+1]}(x) = F(x) + \lambda \int_V K(x, \xi)\, \Phi^{[j]}(\xi)\, d\xi \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (15.3\text{-}21)$$

искомого решения $\Phi(x)$ уравнения (16). Функции (21) можно рассматривать как частичные суммы бесконечного ряда (называемого *рядом Неймана*)

$$F(x) + \lambda \int_V K(x, \xi)\, F(\xi)\, d\xi + \lambda^2 \int_V K_2(x, \xi)\, F(\xi)\, d\xi + \ldots \equiv$$
$$\equiv (1 + \lambda \mathbf{K} + \lambda^2 \mathbf{K}^2 + \ldots)\, F(x). \qquad (15.3\text{-}22)$$

Если $K(x, \xi)$ нормируемо, $F(x)$ квадратично интегрируема на V, то существует действительное число

$$r_C \geqslant \left[\int_V \int_V |K(x, \xi)|^2\, dx\, d\xi \right]^{-1/2}$$

такое, что ряд Неймана (22) *сходится в среднем к решению* (19) *при $|\lambda| < r_C$. Если, кроме того,*

$$\int_V |K(x, \xi)|^2\, d\xi \quad \text{и} \quad \int_V |K(\xi, x)|^2\, d\xi$$

равномерно ограничены в V, то степенной ряд (22) *и соответствующий ряд для резольвентного ядра*

$$\Gamma(x, \xi; \lambda) = K(x, \xi) + \lambda K_2(x, \xi) + \lambda^2 K_3(x, \xi) + \ldots \qquad (15.3\text{-}23)$$

сходятся равномерно к указанным пределам при $x, \xi \in V$ и $|\lambda| < r_C$.

Функция (23) в таком случае является аналитической функцией от λ при $|\lambda| < r_C$ и может быть аналитически продолжена (п. 7.8-1), давая тем самым резольвентное ядро для других возможных значений λ. Ряд (23), как и ряд (22), известен под названием ряда Неймана.

Если нормируемое ядро $K(x, \xi)$ *эрмитово*, то радиус сходимости (или сходимости в среднем) r_C дается формулой $r_C = |\lambda_1|$, где λ_1 есть наименьшее по абсолютной величине собственное значение ядра.

(b) Формула Гильберта—Шмидта для резольвентного ядра (см. также п. 14.8-10). Для каждого нормируемого и эрмитова ядра $K(x, \xi)$ решение линейного интегрального уравнения (16) дается формулой (19) с резольвентным ядром

$$\Gamma(x, \xi; \lambda) \equiv K(x, \xi) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{\psi_k(\xi)}\, \psi_k(x)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \qquad (\lambda \neq \lambda_k,\ k = 1, 2, \ldots)$$

(*формула Гильберта—Шмидта*), (15.3-24)

где ψ_k — ортонормированные собственные функции[1]) ядра $K(x, \xi)$. Ряд сходится равномерно для $x, \xi \in V$ и $\lambda \neq \lambda_k$.

---

[1]) Если λ_i есть собственное значение, имеющее ранг m (п. 15.3-3, а), то пишут $\lambda_{i+1} = \ldots = \lambda_{i+m-1} = \lambda_i$, и таким образом, ряд (24) имеет m членов, содержащих собственные функции $\psi_i(x), \psi_{i+1}(x), \ldots, \psi_{i+m-1}(x)$, соответствующих λ_i.

$\Gamma(x, \xi; \lambda)$ есть мероморфная функция λ в конечной части λ-плоскости; вычеты $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ в ее полюсах связаны простыми соотношениями (пп. 7.6-8 и 7.7-1) с собственными функциями $\psi_k(x)$.

Формула Гильберта — Шмидта для решения, когда λ равно собственному значению λ_i. Если параметр λ равен некоторому собственному значению λ_i данного ядра $K(x, \xi)$, то из суммы (24) (не являющейся теперь резольвентным ядром) исключаются члены, содержащие λ_i, и к правой части (19) прибавляется произвольная собственная функция $\psi(x)$, соответствующая λ_i. Результирующая функция $\Phi(x)$ является решением данного интегрального уравнения (16) при ограничениях случая 2 в п. 15.3-7, а.

(c) **Формулы Фредгольма для резольвентного ядра.** Если $K(x, \xi)$ нормируемо, резольвентное ядро $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ может быть выражено в виде отношения двух целых функций (см. также п. 7.6-7)

$$\Gamma(x, \xi; \lambda) = \frac{D(x, \xi; \lambda)}{D(\lambda)}, \qquad (15.3\text{-}25)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&D(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} C_k \lambda^k, \\
&D(x, \xi; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} D_k(x, \xi) \lambda^k \\
&\text{с} \\
&\qquad C_0 = 1, \ D_0(x, \xi) = K(x, \xi) \\
&\text{и для} \quad k = 1, 2, \ldots \\
&\qquad C_k = \int_V D_{k-1}(\xi, \xi)\, d\xi, \\
&D_k(x, \xi) = C_k K(x-\xi) - k \int_V K(x, \eta) D_{k-1}(\eta, \xi)\, d\eta.
\end{aligned}\right\} \qquad (15.3\text{-}26)$$

Оба степенных ряда сходятся для всех конечных λ; степенной ряд для $D(x, \xi; \lambda)$ сходится равномерно в V. Полюсы $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ совпадают с нулями $D(\lambda)$.

Отметим аналогию между функциями $D(x, \xi; \lambda)$, $D(\lambda)$ и определителями, используемыми для нахождения решения x_k аналогичной конечномерной задачи, по правилу Крамера (1.9-4) $\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} - \lambda\delta_{ik}) x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$.

(d) **Сингулярные ядра.** Если данное ядро $K(x, \xi)$ не ограничено в окрестности $x = \xi$, тогда как итерированное ядро $K_2(x, \xi)$ остается ограниченным, решение $\Phi(x)$ уравнения (16) находят посредством решения интегрального уравнения

$$\Phi(x) - \lambda^2 \int_V K_2(x, \xi) \Phi(\xi)\, d\xi = F(x) + \lambda \int_V K(x, \xi) F(\xi)\, d\xi. \qquad (15.3\text{-}27)$$

Уравнение (27) получено подстановкой

$$\Phi(x) = F(x) + \lambda \int_V K(x, \xi) \Phi(\xi)\, d\xi$$

в левую часть уравнения (16). Эта процедура может быть использована, если первым итерированным ядром, остающимся ограниченным, является $K_3(x, \xi)$, $K_4(x, \xi)$, ...

15.3-9. Решение линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода (см. также пп. 14.8-10, b, 15.4-12, 15.5-1). Если линейное интегральное уравнение

$$\int_V K(x, \xi) \Phi(\xi)\, d\xi = F(x) \qquad (15.3\text{-}28)$$

с нормируемым ядром $K(x, \xi)$ имеет решение $\Phi(x)$, то теорема разложения п. 15.3-4, b дает

$$\Phi(x) \underset{\text{в среднем}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (w_k, F)\, v_k(x) + \varphi(x), \tag{15.3-29}$$

где $v_k(x)$, $w_k(x)$ и μ_k определены в п. 15.3-4, b и $\varphi(x)$ — произвольная функция, ортогональная ко всем $v_k(x)$.

Если $v_k(x)$ *образуют полную ортонормированную последовательность в* $L_2(V)$ (п. 15.2-4), *то* $\varphi(x)=0$ *для почти всех* x *в* V *и решение* (29) *единственно почти всюду в* V. *Если* $w_k(x)$, *как и* $v_k(x)$, *образуют полную ортонормированную последовательность в* $L_2(V)$, *то интегральное преобразование* (28) *является неособенным и допускает однозначное обращение*

$$\left.\begin{aligned} &\int_V K_{-1}(x, \xi)\, F(\xi)\, d\xi = \Phi(x), \\ &\text{где} \\ &K_{-1}(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \overline{w_k(\xi)}\, v_k(x). \end{aligned}\right\} \tag{15.3-30}$$

$K_{-1}(x, \xi)$ называется **взаимным ядром**, ассоциированным с $K(x, \xi)$, и представляет линейный оператор $\mathbf{K}^{-1}$. Для *эрмитовых* ядер $K(x, \xi)$ имеем $v_k(x) = w_k(x)$, $\mu_k = |\lambda_k|$.

15.3-10. Интегральные уравнения Вольтерра.

(a) Пусть x и ξ — *одномерные* действительные переменные. Тогда

1. *Интегральное уравнение Вольтерра второго рода*

$$\Phi(x) - \lambda \int_0^x H(x, \xi)\, \Phi(\xi)\, d\xi = F(x) \tag{15.3-31}$$

сводится к интегральному уравнению Фредгольма (16) на интервале $V \equiv (0, \infty)$, если ввести новое ядро

$$K(x, \xi) \equiv H(x, \xi)\, U_+(x-\xi) = \begin{cases} H(x, \xi) & \text{для } \xi < x, \\ 0 & \text{для } \xi \geqslant x. \end{cases} \tag{15.3-32}$$

2. *Интегральное уравнение Вольтерра первого рода*

$$\int_0^x \tilde{H}(x, \xi)\, \Phi(\xi)\, d\xi = \tilde{F}(x) \tag{15.3-33}$$

посредством дифференцирования сводится к виду (31), где

$$H(x, \xi) \equiv \frac{\dfrac{\partial \tilde{H}(x, \xi)}{\partial x}}{\tilde{H}(x, x)}, \qquad F(x) \equiv \frac{\dfrac{d\tilde{F}(x)}{dx}}{\tilde{H}(x, x)}. \tag{15.3-34}$$

(b) Следующий пример иллюстрирует метод решения для одного класса интегральных уравнений Вольтерра, имеющих неограниченные ядра. Для нахождения решения уравнения

$$\int_a^x \frac{\Phi(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha}}\, d\xi = F(x) \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{15.3-35}$$

умножают обе его части на $(y-x)^{\alpha-1}$ и интегрируют по x в пределах от a до y. Получаемое при этом интегральное уравнение имеет ограниченное ядро. Его решением является

$$\Phi(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left[\frac{F(a)}{(x-a)^{1-\alpha}} + \int_a^x \frac{F'(\xi)\, d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}} \right]. \tag{15.3-36}$$

В частном случае при $\alpha = 1/2$ уравнение (35) известно под названием *интегрального уравнения Абеля.*

15.4. ЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

15.4-1. Линейные краевые задачи. Постановка задачи и обозначения (см. также пп. 9.3-1, 10.3-4, 15.1-2, 15.2-7).

(a) Линейную однородную функцию от функции $\Phi(x)$ и ее производных будем записывать в виде произведения $\mathsf{L}\Phi(x)$ функции $\Phi(x)$ и линейного дифференциального оператора L, например, вида d/dx или $-\nabla^2-q(x^1, x^2, x^3)$. Требуется найти неизвестную функцию $\Phi(x)$, удовлетворяющую линейному дифференциальному уравнению

$$\mathsf{L}\Phi(x)=f(x) \qquad (x\in V) \tag{15.4-1a}$$

внутри открытого интервала или области V, и N линейным краевым условиям

$$\mathsf{B}_i\Phi(x)=b_i(x) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ x\in S), \tag{15.4-1b}$$

где S — граница области V; каждая из $\mathsf{B}_i\Phi(x)$ есть линейная однородная функция от $\Phi(x)$ и ее производных.

(b) Обозначения. Объемные интегралы и скалярные произведения (см. также пп. 4.6-12, 15.1-2, 15.2-1, 16.10-10). В *одномерном* случае x есть действительная переменная, уравнение (1a) есть *обыкновенное дифференциальное уравнение*, V есть ограниченный или неограниченный открытый интервал, *концы которого* $x=a$, $x=b$ образуют границу S.

В *n-мерном* случае x обозначает «точку» $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в n-мерном пространстве, уравнение (1a) есть *уравнение с частными производными*. Предполагается возможным ввести *объемный элемент*

$$dV(x)=\sqrt{|g(x^1, x^2, \ldots, x^n)|}\,dx^1\,dx^2 \ldots dx^n \equiv \sqrt{|g(x)|}\,dx$$

тем же способом, что в пп. 6.2-3, b и 16.10-10; $\sqrt{|g(x)|}$ действителен и положителен всюду в V. Тогда $\int\limits_V \varphi(\xi)\,dV(\xi)$ есть n-мерный *объемный интеграл* по V и можно определить *скалярное произведение* двух функций $u(x)$, $v(x)$, как в п. 15.2-1,

$$(u,\ v)\equiv\int\limits_V \gamma_0(\xi)\,\overline{u(\xi)}\,v(\xi)\,d\xi\equiv\int\limits_V \overline{u(\xi)}\,v(\xi)\,dV(\xi). \tag{15.4-2}$$

Заметим, что $\gamma_0(x)\equiv\sqrt{|g(x)|}$ зависит от системы координат. Аналогично можно предположить существование соответствующего *элемента поверхности* $dA(x)$ (x в S) на границе гиперповерхности S; тогда $\int\limits_S \varphi(\xi)\,dA(\xi)$ — *интеграл по поверхности* в n-мерном пространстве (см. также п. 4.6-12 и 6.4-3, b). В частности, при $n=3$ V есть ограниченная или неограниченная открытая *область пространства с граничной поверхностью* S; S есть *регулярная* поверхность (п. 3.1-14). При $n=2$ V есть соответственно *плоская область* с (регулярной) *граничной линией* S.

15.4-2. Дополнительное дифференциальное уравнение и краевые условия для линейной краевой задачи. Теоремы о суперпозиции (см. также пп. 9.3-1, 10.4-2, 14.3-1, 15.2-7). С каждой линейной краевой задачей (1) можно связать однородное **дополнительное** или **приведенное дифференциальное уравнение**

$$\mathsf{L}\Phi(x)=0 \qquad (x\in V) \tag{15.4-3a}$$

и совокупность однородных «дополнительных краевых условий»

$$\mathsf{B}_i\Phi(x)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ x\in S). \tag{15.4-3b}$$

Следующие важные теоремы устанавливают связь между решениями $\Phi(x)$ данной линейной краевой задачи (1) и функциями, удовлетворяющими более простым условиям вида (3).

1. *Решение каждой линейной краевой задачи* (1) *может быть сведено к линейной краевой задаче с тем же оператором* L *и краевыми условиями* (3) (см. также п. 15.5-4)[1].

2. *Наиболее общий вид функции, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению* (1*a*), *может быть записан в виде суммы некоторого частного решения уравнения* (1*a*) *и наиболее общего решения дополнительного уравнения* (3*a*).

3. *Однородному линейному дифференциальному уравнению удовлетворяет любая линейная комбинация его решений.*

4. *Пусть* $\Phi_1(x)$ *и* $\Phi_2(x)$ *удовлетворяют соответственно дифференциальным уравнениям* $\mathsf{L}\Phi_1(x)=f_1(x)$ *и* $\mathsf{L}\Phi_2(x)=f_2(x)$ *с одинаковыми линейными однородными краевыми условиями* $\mathsf{B}_i\Phi(x)=0$. *Тогда* $\alpha\Phi_1(x)+\beta\Phi_2(x)$ *удовлетворяет уравнению* $\mathsf{L}\Phi(x)=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)$ *при указанных краевых условиях.*

5. *Пусть* $\Phi_1(x)$ *и* $\Phi_2(x)$ *удовлетворяют однородному линейному дифференциальному уравнению* $\mathsf{L}\Phi(x)=0$ *с соответственными линейными краевыми условиями* $\mathsf{B}_i\Phi_1(x)=b_{1i}(x)$ и $\mathsf{B}_i\Phi_2(x)=b_{2i}(x)$. *Тогда* $\alpha\Phi_1(x)+\beta\Phi_2(x)$ *удовлетворяет заданному уравнению и краевым условиям* $\mathsf{B}_i\Phi(x)=\alpha b_{1i}(x)+\beta b_{2i}(x)$.

15.4-3. Эрмитово сопряженные и сопряженные краевые задачи. Эрмитовы операторы (см. также пп. 14.4-3, 14.4-4, 15.3-1, b).

(a) Данная однородная линейная краевая задача (3) и определение скалярного произведения (2) порождают **эрмитово сопряженную краевую задачу**

$$\mathsf{L}^*\chi(x)=0 \qquad (x\in V), \tag{15.4-5a}$$

$$\mathsf{B}_i^*\chi(x)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ x\in S) \tag{15.4-5b}$$

посредством условия

$$(v,\ \mathsf{L}u)-(\mathsf{L}^*v,\ u)=\int_V[\bar v\mathsf{L}u+u\overline{\mathsf{L}^*v}]\,dV=0, \tag{15.4-6}$$

где $u=u(x)$, $v=v(x)$ — пара соответственно дифференцируемых функций, причем $u(x)$ удовлетворяет заданным краевым условиям (3*b*), $v(x)$ удовлетворяет эрмитово сопряженным краевым условиям (5*b*); u и v могут рассматриваться как принадлежащие *сопряженным векторным пространствам* (14.4-9).

Два линейных дифференциальных оператора второго порядка L и L^* являются **эрмитово сопряженными** тогда и только тогда, когда функция $\bar v\mathsf{L}u-u\overline{\mathsf{L}^*v}$ имеет форму n-мерной *дивергенции*

$\frac{1}{\sqrt{|g(x)|}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\sqrt{|g(x)|}\,p^k\right]$ (табл. 16.10-1), где каждая p^k есть функция от u, v, $\bar u$, $\bar v$ и их производных первого порядка[2].

При этом становится возможным представить объемный интеграл $\int_V[\bar v\mathsf{L}u-u\overline{\mathsf{L}^*v}]\,dV$ через интеграл по границе S; формулы такого типа известны как *обобщенные формулы*

---

[1]) Если записать $\Phi(x)=\tilde\Phi(x)+v(x)$, где $v(x)$ — соответствующим образом выбранная функция, удовлетворяющая граничным условиям (1), то $\tilde\Phi(x)$ есть решение линейной краевой задачи

$$\mathsf{L}\tilde\Phi(x)=f(x)-\mathsf{L}v(x)\ (x\in V);\quad \mathsf{B}_i\tilde\Phi(x)=0\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ x \text{ в } S); \tag{15.4-4}$$

$\mathsf{L}v(x)$ определяется выбором $v(x)$ и может содержать члены с δ-функциями; часто возможно найти $v(x)$ так, что $\mathsf{L}v(x)=0$ (см. также п. 10.4-2).

[2]) Верхние значки ^{k}, как и в гл. 6 и 16, не являются показателями степени

Грина (см. также п. 15.4-3, с). **Эрмитово сопряженные краевые условия** $\mathsf{B}_i u = 0$, $\mathsf{B}_i^* v = 0$ (x в S) определяются из условия обращения в нуль интеграла по границе, т. е. выполнения условия (6).

В случае действительных функций и операторов эрмитово сопряженные задачи, операторы и краевые условия обычно называются взаимно **сопряженными**.

(b) Эрмитовы операторы. Дифференциальный оператор L называется **эрмитовым (самосопряженным)**, если

$$(v, \mathsf{L}u) - (\mathsf{L}v, u) = \int\limits_V [\bar{v}\mathsf{L}u - u\overline{\mathsf{L}v}]\, dV = 0 \tag{15.4-7}$$

для каждой пары соответственно дифференцируемых функций $u = u(x)$, $v = v(x)$, удовлетворяющих одинаковым однородным краевым условиям, определяющим некоторое линейное многообразие функций. Эрмитово сопряженные краевые задачи с эрмитовыми операторами, имеющие одинаковые краевые условия, тождественны (*самосопряженные краевые задачи*).

(c) Частные случаи. Действительные операторы Штурма — Лиувилля и обобщение теоремы Грина (см. также пп. 5.6-1 и 15.5-4). В *одномерном* случае уравнения (3*a*) и (5*a*) являются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с заданными краевыми условиями на концах интервала $(a, b) \equiv V$. Если скалярное произведение определено формулой $(u, v) = \int\limits_a^b \bar{u}v\, dx$ (п. 15.2-1), то для действительных дифференциальных операторов второго порядка имеем

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{L}u &\equiv a_0(x)\frac{d^2u}{dx^2} + a_1(x)\frac{du}{dx} + a_2(x)\,u, \\ \mathsf{L}^*v &\equiv \frac{d^2}{dx^2}[a_0(x)v] - \frac{d}{dx}[a_1(x)v] + a_2(x)v, \\ v\mathsf{L}u - u\mathsf{L}^*v &= \frac{dP(x)}{dx}, \\ P(x) &\equiv a_0(x)(vu' - uv') + [a_1(x) - a_0'(x)]uv. \end{aligned}\right\} \tag{15.4-8}$$

$P(x)$ иногда называют **конъюнкцией** $u(x)$ и $v(x)$ относительно оператора L.

Условие $a_1(x) \equiv a_0'(x)$ превращает L в **самосопряженный оператор Штурма — Лиувилля**

$$\mathsf{L} \equiv -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] - q(x), \tag{15.4-9}$$

где $p(x) = -a_0(x)$ и $q(x) = -a_2(x)$ (см. также п. 15.4-8); интегрирование по частям приводит к обобщенной формуле Грина

$$\int\limits_a^b (v\mathsf{L}u - u\mathsf{L}v)\, d\xi = -p(x)(vu' - uv')\Big|_a^b. \tag{15.4-10}$$

В *трехмерном* случае определим скалярное произведение формулой (2), а оператор ∇^2 — так же как в табл. 6.4-1 или 16.10-1. Тогда, считая $q = q(x^1, x^2, x^3)$ действительной дифференцируемой функцией, будем иметь, что действительный дифференциальный оператор

$$\mathsf{L} \equiv -\nabla^2 - q(x^1, x^2, x^3) \tag{15.4-11}$$

является самосопряженным и удовлетворяет обобщенной формуле Грина

$$\int\limits_V (v\mathsf{L}u - u\mathsf{L}v)\, dV = -\int\limits_S (v\nabla u - u\nabla v)\cdot d\mathbf{A} = -\int\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dA \tag{15.4-12}$$

(см. также табл. 5.6-1). Аналогичная формула может быть написана для двумерного случая.

15.4-4. Теорема Фредгольма об альтернативе (см. также пп. 14.8-10, 15.3-7, а, 15.4-12). *Линейная краевая задача, определяемая дифференциальным уравнением*

$$\mathsf{L}\,\Phi(x)=f(x) \qquad (x \in V) \tag{15.4-13a}$$

с однородными краевыми условиями

$$\mathsf{B}_i\,\Phi(x)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ x \in S), \tag{15.4-13b}$$

имеет единственное решение тогда и только тогда, когда эрмитово сопряженная (сопряженная) краевая задача (5) *имеет лишь решение* $\chi(x)$, *тождественно равное нулю,* $\chi(x)\equiv 0$. *Если же однородная краевая задача* (5) *имеет решения* $\chi(x)$, *отличные от нуля, то данная задача* (13) *разрешима, лишь если* $f(x)$ *ортогональна к каждому* $\chi(x)$, т. е.[1])

$$(\chi,\ f)=\int\limits_V \bar{\chi} f\,dV=0. \tag{15.4-14}$$

Если последнее условие выполнено, то данная задача (13) *имеет бесчисленное множество решений.*

Замечание. Во многих приложениях L есть эрмитов оператор, и эрмитово сопряженная задача (5) совпадает с данной задачей (13).

15.4-5. Задачи о собственных значениях для линейных дифференциальных уравнений (см. также пп. 10.4-2,с, 14.8-3, 15.1-1).

(a) Для заданной совокупности линейных краевых условий **собственной функцией (характеристической функцией)** линейного дифференциального оператора L называется решение $\psi(x)$, не равное тождественно нулю в V, дифференциального уравнения

$$\mathsf{L}\,\psi(x)=\lambda\,\psi(x) \qquad (x \in V), \tag{15.4-15}$$

где λ есть соответствующим образом определенное число, называемое **собственным значением (характеристическим числом)** оператора L, связанным с собственной функцией $\psi(x)$.

(b) Более общие задачи о собственных значениях приводят к нахождению собственных функций $\psi(x)\not\equiv 0$ и собственных значений λ, удовлетворяющих линейному дифференциальному уравнению

$$\mathsf{L}\,\psi(x)=\lambda B(x)\,\psi(x) \qquad (x \in V) \tag{15.4-16}$$

и заданным линейным однородным краевым условиям; $B(x)$ есть действительная и положительная функция в V.

(c) *Если* $\psi(x)$ *есть собственная функция, принадлежащая собственному значению* λ, *то это же самое можно сказать о* $\alpha\,\psi(x)\not\equiv 0$. *Если* $\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_s(x)$ *суть собственные функции, принадлежащие собственному значению* λ, *то то же самое имеет место для любой функции*

$$\alpha_1\psi_1(x)+\alpha_2\psi_2(x)+\ldots+\alpha_s\psi_s(x)\not\equiv 0.$$

Эта теорема приложима также к равномерно сходящимся рядам по собственным функциям.

Собственные функции, принадлежащие различным собственным значениям, линейно независимы (пп. 1.9-3, 9.3-2). Если собственному значению λ принадлежат $m>1$ линейно независимых собственных функций, то число m называется **рангом** собственного значения

[1]) В одномерном случае dV совпадает с dx.

(d) Спектр линейной задачи о собственных значениях. Непрерывный спектр и обобщенные собственные функции (см. также пп. 14.8-3, d и 15.4-12). Для заданных однородных линейных краевых условий и $B(x) > 0$ **спектр** линейной задачи о собственных значениях (16) есть множество комплексных чисел λ таких, что дифференциальное уравнение

$$\mathsf{L}\,\Phi(x) - \lambda B(x)\,\Phi(x) = f(x) \qquad (x \in V) \tag{15.4-17}$$

с заданной нормируемой «возмущающей» функцией $f(x)$ не имеет единственного нормируемого решения, удовлетворяющего заданным краевым условиям. Спектр может быть *непрерывным* и *остаточным*, а также *дискретным*, который определен уравнением (16) с нормируемыми собственными функциями $\psi(x)$.

В частном случае, когда $B(x) \equiv 1$, говорят о *спектре дифференциального оператора* L.

Если L — эрмитов оператор и $B(x) > 0$, то дискретный и непрерывный спектр задачи (16) включается в *предельный* спектр (п. 14.8-3, d). Часто можно получить предельный спектр приближением задачи о собственных значениях последовательностью задач о собственных значениях, имеющих лишь дискретный спектр. В процессе таких предельных переходов собственные функции заменяются множеством функций, зависящих от непрерывно изменяющегося параметра λ; такие функции известны под названием **обобщенных собственных функций**; они удовлетворяют уравнению (16).

Пример. Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = -\lambda\,\Phi(x) \quad \text{с} \quad V \equiv (0, \infty)$$

при краевых условиях

$$\Phi(0) = 0, \int_0^\infty |\Phi(\xi)|^2\, d\xi < \infty$$

имеет непрерывный спектр $0 \leqslant \lambda < \infty$. Этот спектр аппроксимируется дискретным спектром $\lambda = (k\pi/a)^2$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ задач о собственных значениях

$$\frac{d^2\Phi_a(x)}{dx^2} = -\lambda\,\Phi_a(x) \quad \text{с} \quad V \equiv (0, a), \quad \Phi(0) = \Phi(a) = 0$$

при $a \to \infty$. Собственные функции $\sin\frac{\pi k}{a}x$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ последней задачи аппроксимируют обобщенные собственные функции $\sin\sqrt{\lambda}\,x$ при $a \to \infty$ (переход от рядов Фурье к интегралам Фурье).

15.4-6. Собственные значения и собственные функции эрмитовой задачи о собственных значениях. Полные ортонормированные множества собственных функций (см. также пп. 14.8-4, 14.8-7, 15.2-4, 15.3-3, 15.4-3, b).

(а) *Если оператор* L *в уравнении* (15) *эрмитов, то*

1. *Все значения* λ *спектра действительны.*

2. *Нормируемые собственные функции* ψ_i, ψ_k, *соответствующие различным собственным значениям, взаимно ортогональны:*

$$(\psi_i, \psi_k) = \int_V \overline{\psi}_i \psi_k\, dV = 0 \qquad (i \neq k).$$

Если L — *эрмитов оператор, имеющий чисто дискретный спектр, то имеет место следующая теорема разложения:*

3. *Существует ортонормированная последовательность собственных функций* $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., *доставляющая разложение в ряд*

$$\varphi(x) \underset{\text{в среднем}}{=} a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) + \ldots$$

$$\left(a_k = \int_V \overline{\psi}_k \varphi\, dV,\ k = 1, 2, \ldots\right) \tag{15.4-18a}$$

каждой квадратично интегрируемой функции $\varphi(x)$, *удовлетворяющей краевым условиям задачи и такой, что* $\mathsf{L}\,\varphi(x)$ *существует почти всюду в* V.

(b) *Эти же теоремы распространяются на «обобщенную» задачу о собственных значениях* (16), *где* L — *эрмитов оператор и* $B(x) > 0$ в предположении,

что ортогональность и нормированность переопределены посредством скалярного произведения [1])

$$(u,\ v)_B = \int\limits_V \bar{u} v B\, dV.$$

Таким образом, разложение (18 *a*) заменяется более общим разложением

$$\varphi(x) = a_1 \psi_1(x) + a_2 \psi_2(x) + \ldots \quad \left(a_k = \int\limits_V \bar{\psi}_k \varphi B\, dV,\ k = 1,\ 2,\ \ldots\right). \qquad (15.4\text{-}18\ b)$$

Ортонормированность собственных функций $\psi_k(x)$ определена как

$$\int\limits_V \bar{\psi}_i \psi_k B\, dV = \delta_{ik} = \begin{Bmatrix} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k \end{Bmatrix} \qquad (i,\ k \neq 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (15.4\text{-}19\ a)$$

Эти соотношения содержат как частный случай соотношения, полученные для задачи (15).

(c) Для эрмитовой задачи с (необходимо действительным) непрерывным спектром, обладающим обобщенными собственными функциями (см. п. 15.4-5, d), существует множество обобщенных собственных функций $\psi_k(x,\ \lambda)$, для которых

$$\int\limits_V \bar{\psi}(\xi,\ \lambda)\, \psi(\xi,\ \lambda')\, B(\xi)\, d\, V(\xi) = \delta(\lambda - \lambda'). \qquad (15.4\text{-}19\ b)$$

15.4-7. Эрмитова задача о собственных значениях как вариационная задача (см. также пп. 11.7-1 — 11.7-3, 14.8-8, 15.3-6, b, 15.4-10).

(a) *Задача о собственных значениях* (16) *для эрмитова дифференциального оператора* L *с дискретными собственными значениями* $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$ *эквивалентна каждой из следующих вариационных задач* [1]).

1. Найти функцию $\psi(x) \not\equiv 0$ в V, удовлетворяющую данным краевым условиям и обращающую вариацию (пп. 11.5-1 и 11.5-2) функционала

$$\frac{(\psi,\ L\psi)}{(\psi,\ B\psi)} = \frac{\int\limits_V \bar{\psi} \mathrm{L} \psi\, dV}{\int\limits_V |\psi|^2 B\, dV} \quad (\textit{частное Релея}) \qquad (15.4\text{-}20)$$

в нуль.

2. Найти функцию $\psi(x)$, удовлетворяющую данным краевым условиям и обращающую вариацию функционала

$$(\psi,\ \mathrm{L}\psi) = \int\limits_V \bar{\psi} \mathrm{L} \psi\, dV \qquad (15.4\text{-}21)$$

в нуль при условии, что

$$(\psi,\ B\psi) = \int\limits_V |\psi|^2 B\, dV = 1. \qquad (15.4\text{-}22)$$

В каждом из этих случаев функция $\psi = \psi_k(x)$ доставляет функционалу стационарное значение λ_k.

Таким образом, возможно использовать прямые методы вариационного исчисления, в частности, метод Релея — Ритца (п. 11.7-2), при решении задачи о собственных значениях для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

(b) Пусть дан эрмитов оператор L с дискретным спектром, содержащим не более конечного числа отрицательных собственных значений (пп. 15.4-8, 15.4-9), и пусть собственные значения расположены в порядке их возрастания,

---

[1]) В одномерном случае $dV = dx$.

причем собственные значения ранга m повторены m раз: $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ *Наименьшее собственное значение λ_1 равно минимуму частного Релея* (20) *для произвольных «допустимых» функций* $\psi(x)$, т. е. для произвольных нормируемых $\psi(x)$, которые удовлетворяют данным краевым условиям и таких, что частное Релея существует.

Аналогично r-е *собственное значение λ_r указанной выше последовательности не превосходит частного Релея для всех «допустимых» функций $\psi(x)$ таких, что*

$$\int_V \bar{\psi}_k \varphi B \, dV = 0 \qquad (15.4\text{-}23)$$

для каждой собственной функции ψ_k, соответствующей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}$ (*принцип минимакса Куранта*).

15.4-8. Одномерная задача Штурма — Лиувилля о собственных значениях.

(a) Рассмотрим одномерную действительную переменную x и пусть V — ограниченный интервал (a, b). Тогда наиболее общий действительный эрмитов дифференциальный оператор второго порядка L имеет вид (9). Действительное дифференциальное уравнение (*однородное дифференциальное уравнение Штурма — Лиувилля*)

$$\mathsf{L}\psi \equiv -\left\{ \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) \right\}\psi \equiv$$

$$\equiv -\left[p(x)\frac{d^2\psi}{dx^2} + p'(x)\frac{d\psi}{dx} + q(x)\psi\right] = \lambda B(x)\psi \qquad (15.4\text{-}24a)$$

определяет самосопряженную задачу о собственных значениях, если это уравнение дополнить однородными линейными краевыми условиями

$$\mathsf{B}_1\psi = \alpha_1\psi'(a) + \beta_1\psi(a) = 0, \quad \mathsf{B}_2\psi \equiv \alpha_2\psi'(b) + \beta_2\psi(b) = 0, \qquad (15.4\text{-}24b)$$

или *условиями периодичности*

$$\mathsf{B}_1\psi \equiv \psi(a) - \psi(b) = 0, \quad \mathsf{B}_2\psi \equiv \psi'(a) - \psi'(b) = 0. \qquad (15.4\text{-}24c)$$

Здесь предполагается, что $p(x)$, $q(x)$ и $B(x)$ дифференцируемы в $[a, b]$, $p(x)$ и $B(x)$ положительны в $[a, b]$ и не существует собственных функций, отвечающих числу $\lambda = 0$. Эти предположения обеспечивают дискретность спектра.

* При условии (24b) все собственные значения имеют ранг 1. При условиях периодичности (24c) ранг может равняться двум. Например, уравнение $\psi'' + \lambda\psi = 0$ с условиями (24c) при $a = 0$ и $b = 2\pi$ имеет собственные числа $\lambda = n^2$ и собственные функции $\cos nx$ и $\sin nx$.

Больше двух ранг быть не может.

Если в задаче (24 a, b) $p(x) > 0$, $B(x) > 0$, $q(x) \leqslant 0$, $\alpha_1\beta_1 \leqslant 0$, $\alpha_2\beta_2 \geqslant 0$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$, $\alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0$, то все собственные значения положительны, за исключением случая, когда $q(x) \equiv 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, в котором $\lambda_0 = 0$. *

Если собственные значения расположить в порядке возрастания $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant, \ldots$, то λ_n асимптотически пропорционально n^2 при $n \to \infty$ (п. 4.4-3).

В пп. 9.3-4—9.3-10, а также в пп. 21.7-1—21.8-12 изучены различные упрощающие преобразования и методы решения однородных дифференциальных уравнений типа (24). Задачи Штурма — Лиувилля возникают, в частности, при разделении переменных в краевых задачах для линейных дифференциальных уравнений с частными производными (см. пп. 10.4-3—10.4-9) и имеют важное значение в квантовой механике. Заметим, что каждое дифференциальное уравнение вида

$$a_0(x)\frac{d^2\psi}{dx^2} + a_1(x)\frac{d\psi}{dx} + a_2(x)\psi = \lambda h(x)\psi \qquad (15.4\text{-}25)$$

можно привести к виду (24a) посредством умножения обеих частей его на

$$\exp\int \frac{a_1(x) - a_0'(x)}{a_0(x)}\,dx$$

(см. также п. 9.3-8, а). Отсюда следует, что примеры пп. 10.4-3—10.4-9 могут рассматриваться как задачи Штурма — Лиувилля.

(b) Если в формуле (9) положить $q(x) \equiv q_1'(x) - q_2(x)$, то

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b u\mathrm{L}u\,d\xi &= \int_a^b [(pu'^2 + 2q_1uu' + q_2u^2)\,d\xi - (puu' + q_1u^2)]_a^b,\\ \int_a^b u\mathrm{L}v\,d\xi &= \int_a^b [pu'v' + q_1(u'v + uv') + q_2uv]\,d\xi - [(pv' - q_1v)\,u]_a^b.\end{aligned}\right\} \quad (15.4\text{-}26)$$

Интегралам (26) во многих приложениях (см. также п. 15.4-7) можно придать физический смысл.

(c) Обобщения и родственные задачи. Многие общие задачи связаны с рассмотрением *неограниченного* интервала $V \equiv (0, \infty)$ или $V \equiv (-\infty, \infty)$ с краевыми условиями, в которых указывается асимптотическое поведение $\psi(x)$ на бесконечности или другие ограничения. Далее, могут допускаться особенности в точке $x=a$ или $x=b$ у функций $p(x)$, $q(x)$ или $B(x)$. В случае, когда функции $p(x)$, $q(x)$ или $B(x)$ имеют особенности на концах ограниченного интервала (a, b), *спектр может оставаться чисто дискретным.*

Неоднородная краевая задача, включающая оператор Штурма — Лиувилля L, может быть решена методами пп. 9.3-3, 9.3-4, 15.4-12, 15.5-1.

15.4-9. Задача Штурма — Лиувилля для уравнений с частными производными второго порядка (см. также п. 15.4-3, с).

(a) Пусть $x \equiv (x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Определим скалярное произведение формулой (2) с $dV \equiv dx^1dx^2\ldots dx^n$. Тогда действительное уравнение с частными производными (*многомерное однородное уравнение Штурма — Лиувилля*)

$$\mathrm{L}\psi \equiv -\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(p\frac{\partial}{\partial x^k}\right) + q\right]\psi = \lambda B\psi \qquad (15.4\text{-}27)$$

с функциями $p = p(x^1, x^2, \ldots, x^n) > 0$, $B(x^1, x^2, \ldots, x^n) > 0$, $q = q(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, дифференцируемыми на V и S, определяет самосопряженную задачу о собственных значениях при однородных краевых условиях вида $\alpha\frac{\partial\psi}{\partial n} + \beta\psi = 0$. *Если заданная область ограничена, то спектр собственных значений указанной задачи дискретен и содержит не более чем конечное число отрицательных собственных значений. Если расположить собственные значения в порядке их возрастания* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, то $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

(b) В *трехмерном* случае последняя теорема приложима к задаче о собственных значениях для дифференциального уравнения

$$-\nabla^2\psi - q(x^1, x^2, x^3)\,\psi = \lambda\,B(x^1, x^2, x^3)\,\psi$$

с краевыми условиями вида $\alpha\frac{\partial\psi}{\partial n} + \beta\psi = 0$, $B > 0$ и q, дифференцируемыми в V и на S. Из обобщенной формулы Грина (12) следует

$$\int_V u\mathrm{L}u\,dV = \int_V [(\nabla u)^2 - qu^2]\,dV - \int_S (u\,\nabla u)\cdot d\mathbf{A}. \qquad (15.4\text{-}28)$$

Интегралу (26) во многих приложениях (см. также п. 15.4-7 и табл. 5.6-1) можно придать физический смысл

15.4-10. Теоремы сравнения (см. также п. 5.6-1, b, 14.8-9, с и 15.4-7). Нижеследующие *теоремы сравнения* имеют место для дифференциальных уравнений Штурма — Лиувилля как обыкновенных, так и с частными производными, определенных в пп. 15.4-8—15.4-9.

Пусть дано некоторое дифференциальное уравнение (24a) *или* (27) *и интервал или область* V *с краевыми условиями* (24b) *или* (24c) $(\beta/\alpha \geqslant 0)$; тогда:

1. *Возрастание* p *и* q *и/или убывание* B *влечет возрастание собственных значений* λ_k; *аналогично убывание* p *и* q *и/или возрастание* B *влечет убывание собственных значений.*

2. *Расширение интервала или области V влечет убывание собственных значений λ_k, порождаемых условиями*

$$\psi(a) \equiv \psi(b) = 0 \quad \text{или} \quad \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \text{ на } S, \qquad (15.4\text{-}29a)$$

и убывание собственных значений λ_k, порождаемых условиями

$$\psi'(a) = \psi'(b) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \text{ на } S. \qquad (15.4\text{-}29b)$$

3. *Каждое собственное значение λ_k, порождаемое краевыми условиями $\alpha\psi'(a) + \beta\psi(a) = \alpha\psi'(b) + \beta\psi(b) = 0$ или $\alpha\frac{\partial\psi}{\partial n} + \beta\psi = 0$ на S с $\beta/\alpha \geqslant 0$, есть неубывающая функция от β/α.* В частности, условия Неймана (29b) не увеличивают собственных значений сравнительно с условиями Дирихле (29a).

4. *Модификации задачи о собственных значениях, усиливающие ограничения (присоединение условий) на ψ, влекут неубывание собственных значений.*

Теоремы сравнения имеют важное значение для теории колебаний (эффект масс, жесткость, геометрия натуральных частот).

Примеры (см. также п. 10.4-9): $\psi'' = -\lambda\psi(x)$ (*колебания струны*) и $\nabla^2\psi(x, y, z) = -\lambda\psi(x, y, z)$ (*колебания мембраны*).

15.4-11. Решение дискретных задач о собственных значениях методами возмущений. Даны собственные значения λ_k и *ортонормированные* собственные функции ψ_k эрмитовой задачи

$$\mathbf{L}\psi = \lambda\psi. \qquad (15.4\text{-}30)$$

Требуется аппроксимировать собственные значения $\tilde{\lambda}_k$ и собственные функции $\tilde{\psi}_k$ «возмущенной» эрмитовой задачи

$$\mathbf{L}\tilde{\psi} + \varepsilon\mathbf{L}'\tilde{\psi} = \tilde{\lambda}\tilde{\psi} \qquad (15.4\text{-}31)$$

при неизменных краевых условиях; $\varepsilon\mathbf{L}'\tilde{\psi}$ — малый возмущающий член ($\varepsilon \ll 1$).

(a) Ранг λ_i равен 1. Для каждого собственного значения λ_i невозмущенной задачи имеем

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\lambda}_i &= \lambda_i + \varepsilon L'_{ii} + \varepsilon^2 \sum_{k \neq i} \frac{|L'_{ik}|^2}{\lambda_i - \lambda_k} + \ldots, \\ \tilde{\psi}_i &= \psi_i + \varepsilon \sum_{k \neq i} \frac{L'_{ki}}{\lambda_i - \lambda_k}\psi_k + \ldots, \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots), \qquad (15.4\text{-}32)$$

где

$$L'_{ik} = \int_V \bar{\psi}_i \mathbf{L}'\psi_k \, dV \qquad (i, k = 1, 2, \ldots). \qquad (15.4\text{-}33)$$

(b) Ранг λ_i равен m. Для каждого собственного значения λ_j ранга m с собственными функциями $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ существуют m различных собственных значений возмущенного оператора. Соответствующие значения $\Delta\lambda = (\tilde{\lambda} - \lambda_j)/\varepsilon$ аппроксимируются корнями векового уравнения m-й степени

$$\begin{vmatrix} L'_{11} - \Delta\lambda & L'_{12} & \ldots & L'_{1m} \\ L'_{21} & L'_{22} - \Delta\lambda & \ldots & L'_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L'_{m1} & L'_{m2} & \ldots & L'_{mm} - \Delta\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (15.4\text{-}34)$$

которые могут быть и совпадающими. Собственная функция или собственные функции, соответствующие каждому значению $\tilde{\lambda} = \lambda_j + \Delta\lambda$, аппроксимируются выражением

$$\tilde{\psi} = \sum_{k=1}^{m} a_k\psi_k,$$

где a_k получены из уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \left(L'_{ik} - \delta_{ik} \Delta\lambda\right) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{15.4-35}$$

Заметим, что не существует других m собственных функций, кроме указанных выше, доставляющих аппроксимации $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\psi}$ для случая ранга, большего чем единица; полученные аппроксимации для $\tilde{\psi}$ имеют «нулевой порядок» и не пропорциональны ε. Относительно приближений высшего порядка см. [5.2].

(с) Изучение непрерывного спектра см. [10.6].

15.4-12. Решение краевых задач посредством разложений в ряды по собственным функциям (см. также пп. 10.4-2, с, 14.8-10, 15.4-4, 15.5-2; примеры см. п. 10.4-9).

(a) Очень важный класс физических краевых задач (например, упругие колебания, электромагнитная теория) относится к действительным линейным дифференциальным уравнениям — обыкновенным или с частными производными

$$\mathsf{L}\,\Phi(x) - \lambda B(x)\,\Phi(x) = f(x) \qquad (x \in V), \tag{15.4-36}$$

L — эрмитов оператор (см. п. 15.4-3, b), $B(x) > 0$ в V при заданных однородных краевых условиях. Если $f(x) \equiv 0$ в V (нет приложенных сил, токов и т. п.), то уравнение (36) сводится к дополнительному уравнению

$$\mathsf{L}\,\psi(x) = \lambda B(x)\,\psi(x) \qquad (x \in V), \tag{15.4-37}$$

которое удовлетворяется только собственными или обобщенными собственными функциями $\psi(x)$ со спектральными значениями λ. В неоднородном случае (36) (например, вынужденные колебания) λ является заданным параметром.

Рассмотрим сначала задачу (36), при условии, что задача о собственных значениях (37) имеет *чисто дискретный спектр* (не обязательно различных) собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ с соответствующими ортонормированными функциями $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ (п. 15.4-6, b). Предполагая, что «вынуждающая функция» может быть разложена в ряд

$$f(x) = B(x) \sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k(x) \qquad \left(f_k = \int_V \overline{\psi}_k f\, dV, \quad k = 1, 2, \ldots\right) \tag{15.4-38}$$

для почти всех $x \in V$, можно ожидать, что решение уравнения (36) имеет вид «разложения по главным колебаниям»

$$\Phi(x) \underset{\text{в среднем}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \psi_k(x). \tag{15.4-39}$$

Ряд (39) определяет решение $\Phi(x)$ однозначно в каждой точке непрерывности, если только параметр λ не равен некоторому собственному значению λ_k (резонанс!). В последнем случае решение существует, лишь когда $f(x)$ ортогонально ко всем собственным функциям, принадлежащим λ_k, так что $f_k = 0$. Тогда существует бесконечное количество решений, состоящих из ряда (39) плюс линейная комбинация собственных функций, принадлежащих λ_k.

(b) Если краевая задача (37) обладает *чисто непрерывным* спектром D_Λ с обобщенными собственными функциями $\psi(x, \lambda)$, имеющими свойство ортогональности (19*b*) (например, оператор Штурма — Лиувилля имеет особенности в V, или же V неограничена), то возможно представить решение $\Phi(x)$ как «обобщенный интеграл Фурье» по (необходимо действительному) спектру D_Λ.

Имеем тогда почти для всех $x \in V$

$$\Phi(x) = \int\limits_{D_\Lambda} H(\Lambda)\,\psi(x,\ \Lambda)\,d\Lambda, \qquad H(\Lambda) = \frac{1}{\Lambda - \lambda} \int\limits_V \overline{\psi(\xi,\ \Lambda)}\, f(\xi)\,dV \tag{15.4-40}$$

(см. также п. 10.5-1, методы интегральных преобразований).

Если задача о собственных значениях (37) имеет как дискретный, так и непрерывный спектр, то решение будет содержать члены вида (39) и интеграл (40); оба типа членов могут быть объединены в интеграл Стилтьеса по спектру.

(с) Методы решений пп. 15.4-12, а и 15.4-12, b могут быть применены и тогда, когда данный оператор L не эрмитов, если только доказано существование соответствующих ортонормированных разложений по собственным функциям.

15.5. ФУНКЦИИ ГРИНА. СВЯЗЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

15.5-1. Функции Грина для краевой задачи с однородными краевыми условиями (см. также пп. 9.3-3, 9.4-3, 15.4-4; примеры см. в табл. 9.3-1, пп. 15.6-6, 15.6-9).

(а) Линейная краевая задача

$$\mathsf{L}\,\Phi(x) = f(x) \quad (x \in V), \tag{15.5-1a}$$

$$B_i\,\Phi(x) = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ x \in S) \tag{15.5-1b}$$

представляет данную функцию $f(x)$ как результат линейной операции над неизвестной функцией $\Phi(x)$, удовлетворяющей заданным краевым условиям. Если возможно записать соответствующую *обратную операцию* в форме линейного интегрального преобразования (п. 15.3-1)[1])

$$\Phi(x) = \int\limits_V G(x,\ \xi)\,f(\xi)\,dV(\xi) \tag{15.5-2}$$

для каждой возможной функции $f(x)$, то ядро $G(x,\ \xi)$ называют **функцией Грина для данной краевой задачи** (1).

$G(x,\ \xi)$ должна удовлетворять однородным краевым условиям (1*b*) *вместе с условиями*

$$\left.\begin{aligned} &\mathsf{L}\,G(x,\ \xi) = 0 && (x,\ \xi \in V;\ x \neq \xi), \\ &\int\limits_V \mathsf{L}\,G(x,\ \xi)\,dV(\xi) = 1 && (x \in V) \end{aligned}\right\} \tag{15.5-3a}$$

или

$$\mathsf{L}\,G(x,\ \xi) = \delta(x,\ \xi) \qquad (x,\ \xi \in V), \tag{15.5-3b}$$

где $\delta(x,\ \xi)$ есть дельта-функция в *системе координат, в которой поставлена краевая задача* (п. 21.9-7).

Формула (2) представляет решение $\Phi(x)$ краевой задачи (1) как суперпозицию элементарных решений $G(x,\ \xi)\,f(\xi)$, имеющих особенность при $x = \xi$. Эти элементарные решения могут быть интерпретированы как эффект *импульсных сил, точечных зарядов* и т. д., $f(\xi)\,\delta(x,\ \xi)$ в точке $x = \xi$ (см. пп. 9.4-3, 15.5-4, 15.6-6, 15.6-9). Функция Грина часто может быть найдена непосредственно интегрированием «символического дифференциального уравнения» (3*b*) с данными краевыми условиями методами, указанными в пп. 9.4-5, 10.5-1, 15.4-12. См. табл. 9.3-3, пп. 15.6-6 и 15.6-9, где даны примеры функций Грина.

[1]) В одномерном случае $dV = dx$.

(b) Модифицированная функция Грина (см. также п. 15.4-4). Краевая задача (1) не имеет функции Грина, удовлетворяющей уравнению (3), если эрмитово сопряженная краевая задача

$$\mathsf{L}^*\chi(x) = 0 \quad (x \in V), \qquad \mathsf{B}_i^*\chi(x) = 0 \quad (x \in S) \tag{15.5-4}$$

имеет решение $\chi(x)$, отличное от $\chi(x) \equiv 0$ (см. п. 15.4-4). В этом случае тем не менее возможно построить **модифицированную функцию Грина** $G(x, \xi)$, доставляющую представление (2) для всех $f(x)$, ортогональных к $\chi(x)$. $G(x, \xi)$ должна удовлетворять уравнению

$$\mathsf{L}\, G(x, \xi) = \delta(x, \xi) - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\chi}_{0k}(\xi)\, \chi_{0k}(x) \tag{15.5-5}$$

и краевым условиям (1*b*). Здесь $\chi_{0k}(x)$ есть полная ортонормированная последовательность решений задачи (4). В рассматриваемом случае результирующее решение (2) не может быть единственным, однако существует единственная модифицированная функция Грина, которая удовлетворяет дополнительным условиям ортогональности

$$\int_V \bar{\chi}_{0k}(\xi)\, G(x, \xi)\, dV(\xi) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{15.5-6}$$

Если L — эрмитов оператор, то χ_{0k} суть просто его собственные функции для $\lambda = 0$.

(c) Функции Грина для эрмитово сопряженных краевых задач (п. 15.4-3, a) являются эрмитово сопряженными ядрами (п. 15.3-1, b). *Для каждой функции Грина $G(x, \xi)$, принадлежащей эрмитову оператору* L (п. 15.4-3), $G(\xi, x) \equiv \equiv G(x, \xi)$.

15.5-2. Связь краевых задач и задач о собственных значениях с интегральными уравнениями. Резольвента Грина.

(a) Если существует функция Грина $G(x, \xi)$ краевой задачи (1), то из формулы (2) следует, что общая краевая задача

$$\left.\begin{aligned} &\mathsf{L}\,\Phi(x) - \lambda B(x)\,\Phi(x) = f(x) && (x \in V), \\ &\mathsf{B}_i\,\Phi(x) = 0 && (i = 1, 2, \ldots, N;\ x \in S) \end{aligned}\right\} \tag{15.5-7}$$

эквивалентна линейному интегральному уравнению

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(x) - \lambda \int_V K(x, \xi)\,\Phi(\xi)\, d\xi = F(x), \\ &K(x, \xi) = G(x, \xi)\, B(\xi) \sqrt{|g(\xi)|}, \\ &F(x) = \int_V G(x, \xi)\, f(\xi)\, dV(\xi). \end{aligned}\right\} \tag{15.5-8}$$

Заметим, что интегральное уравнение включает в себя заданные краевые условия. В одномерном случае $dV(\xi) \equiv d\xi$ и $|g(\xi)| \equiv 1$.

Полученное интегральное уравнение распространяет теорию пп. 15.3-1 — 15.3-9 *и численные методы* п. 20.9-10 *на линейные краевые задачи и задачи о собственных значениях*. В частности, можно использовать ряды Неймана (15.3-23) и аналитическое продолжение для введения резольвентного ядра (п. 15.3-7, c) $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ так, что решение принимает форму

$$\Phi(x) = F(x) + \lambda \int_V F(x, \xi; \lambda)\, F(\xi)\, d\xi. \tag{15.5-9}$$

$\Gamma(x; \xi; \lambda)$ называют **резольвентой Грина**; она является ядром линейного преобразования, представляющего резольвентный оператор $(\mathsf{L} - \lambda)^{-1}$ (п. 14.8-3, d). $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ часто можно построить методами п. 15.3-8; следует отметить, что ядро $K(x, \xi)$ не необходимо должно быть нормируемым. *Множество особых точек λ функции $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ совпадает со спектром оператора* L (п. 15.4-5, d), который может включать и непрерывный спектр. В частности, *полюсы $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ соответствуют дискретным собственным значениям* L, *тогда как точки разветвления указывают на наличие непрерывного спектра* (см. 15.2).

(b) Задачи для эрмитовых операторов. Разложение функции Грина по собственным функциям (см. также п. 15.3-3, 15.3-4, 15.4-6, 15.4-12).

В важном частном случае, когда $\mathbf{L}$ — *эрмитов оператор* и $B(x)$ *действительна и положительна* в V, можно ввести новую неизвестную функцию

$$\tilde{\Phi}(x)=\Phi(x)\sqrt{B(x)\sqrt{|g(x)|}} \tag{15.5-10}$$

и заменить уравнение (8) линейным интегральным уравнением с *эрмитовым ядром*

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\Phi}(x)-\lambda\int_V \tilde{K}(x,\xi)\,\tilde{\Phi}(\xi)\,d\xi=\tilde{F}(x),\\&\tilde{K}(x,\xi)=G(x,\xi)\sqrt{B(x)\,B(\xi)\sqrt{|g(x)\,g(\xi)|}},\\&\tilde{F}(x)=\sqrt{B(x)\sqrt{|g(x)|}}\int_V G(x,\xi)\,f(\xi)\,dV(\xi).\end{aligned}\right\} \tag{15.5-11}$$

Эрмитова задача о собственных значениях

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{L}\,\psi(x)=\lambda\,B(x)\,\psi(x)\qquad(x\in V),\\&\mathbf{B}_i\,\psi(x)=0\qquad(i=1,\,2,\,\ldots,\,N;\ x\in S)\end{aligned}\right\} \tag{15.5-12a}$$

и интегральное уравнение

$$\tilde{\psi}(x)=\lambda\int_V \tilde{K}(x,\xi)\,\tilde{\psi}(\xi)\,d\xi \tag{15.5-12b}$$

имеют идентичный спектр; соответствующие собственные функции $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ связаны соотношением $\tilde{\psi}(x)=\psi(x)\sqrt{B(x)\sqrt{|g(x)|}}$. Если спектр собственных значений чисто дискретный, то существует полная последовательность собственных функций $\psi_i(x)$ и $\tilde{\psi}_i(x)$ так, что

$$\int_V B\,\bar{\psi}_i\psi_k\,dV=\int_V \bar{\tilde{\psi}}_i\,\tilde{\psi}_k\,dV=\delta_{ik}. \tag{15.5-13}$$

В этом случае $\tilde{K}(x,\xi)$ есть нормируемое ядро и

$$G(x,\xi)\underset{\text{в среднем}}{=}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\bar{\psi}_k'(\xi)\,\psi_k(x)\qquad(x,\,\xi\in V). \tag{15.5-14}$$

Последнее выражение не содержит явно $B(x)$ или $g(x)$. В случае задачи Штурма — Лиувилля с чисто дискретным спектром (пп. 15.4-8, а и 15.4-9) ряды (14) сходятся абсолютно и равномерно в V (см. также теорему Мерсера п. 15.3-4).

(c) Если данная краевая задача (7) выражается в терминах дифференциальных инвариантов (п. 16.10-7), то $G(x,\xi)$, $K(x,\xi)$ и $\tilde{K}(x,\xi)$ являются функциями точки, инвариантными относительно преобразований используемой системы координат.

15.5-3. Приложение метода функций Грина к задаче с начальными условиями: обобщенное уравнение диффузии (см. также пп. 10.4-7, 10.5-3, 10.5-4). Требуется найти решение $\Phi=\Phi(x,t)$ задачи

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\Phi-a^2\frac{\partial\Phi}{\partial t}-b\Phi=f(x,t),\\&\Phi(x,0)=\Phi_0(x)\end{aligned}\right\}\quad(x\in V) \tag{15.5-15}$$

с заданными константами a^2, b и однородными краевыми условиями $\Phi=0$ или $\partial\Phi/\partial n=0$ на границе данной n-мерной области V, $n=1,2$ или 3. Имеем

$$\Phi(x,t)=\int_0^t\int_V G(x,t;\xi,\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\tau\,dV(\xi)-a^2\int_V G(x,t;\xi,0)\,\Phi_0(\xi)\,dV(\xi)\qquad(t>0), \tag{15.5-16}$$

где $G(x, t; \xi, \tau)$ — функция Грина, удовлетворяющая заданным краевым условиям, и

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 G - a^2 \frac{\partial G}{\partial t} - bG = \delta(x, \xi)\,\delta(t-\tau), \\ &G = 0 \qquad (t < \tau) \end{aligned}\right\} \quad (x \in V). \qquad (15.5\text{-}17)$$

Если $\psi_k(x)$ и λ_k — соответственно собственные функции и собственные значения пространственного волнового уравнения

$$\nabla^2\psi(x) + \lambda\psi(x) = 0 \qquad (x \in V) \qquad (15.5\text{-}18)$$

при заданных краевых условиях (пп. 10.4-4 и 10.4-5, b), то

$$G(x, t; \xi, \tau) = -\frac{1}{a^2}\sum_k e^{-\frac{\lambda_k + b}{a^2}(t-\tau)}\,\bar{\psi}_k(\xi)\,\psi_k(x) \qquad (t > \tau). \qquad (15.5\text{-}19)$$

Если V совпадает со всем пространством, то

$$G(x, t; \xi, \tau) = -\left[\frac{a^2}{4\pi(t-\tau)}\right]^{n/2}\frac{1}{a^2}\exp\left[-\frac{a^2}{4}\frac{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\varrho}|^2}{t-\tau} - \frac{b}{a^2}(t-\tau)\right] \quad (t > \tau;\ n = 1, 2, 3), \qquad (15.5\text{-}20)$$

где $|\mathbf{r}-\boldsymbol{\varrho}|$ — расстояние между точками $(x) = (\mathbf{r})$ и $(\xi) = (\boldsymbol{\varrho})$.

Результирующее решение (16) известно как *интегральное решение Пуассона* задачи о диффузии.

15.5-4. Метод функций Грина для неоднородных краевых условий (см. также п. 15.4-2).

(a) Решение $\Phi(x)$ трехмерной линейной краевой задачи

$$\mathsf{L}\Phi(x) = 0 \quad (x \in V), \qquad \mathsf{B}\Phi(x) = b(x) \quad (x \in S) \qquad (15.5\text{-}21)$$

часто может быть записано в форме поверхностного интеграла

$$\Phi(x) = \int_S G_S(x, \xi)\,b(\xi)\,dA(\xi) \qquad (15.5\text{-}22)$$

для каждой заданной функции $b(x)$, интегрируемой на S. *$G_S(x, \xi)$ должна удовлетворять данному дифференциальному уравнению при $x \in V$, $\xi \in S$ и*

$$\left.\begin{aligned} &\mathsf{B}\,G_S(x, \xi) = 0 \qquad (x, \xi \in S;\ x \neq \xi), \\ &\int_S \mathsf{B}\,G_S(x, \xi)\,dA(\xi) = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (15.5\text{-}23)$$

$G_S(x, \xi)$ называют либо **функцией Грина второго рода**, либо просто функцией Грина (см. также п. 15.6-6). Аналогичные соотношения имеют место и в *двумерном случае* (см. также п. 15.6-9). Линейные краевые задачи для неоднородных дифференциальных уравнений, так же как и при неоднородных краевых условиях, могут быть часто решены *суперпозицией объемного* (2) и *поверхностного* (22) *интегралов*.

(b) Как указано в п. 15.4-2, каждая краевая задача (21) может рассматриваться как краевая задача типа (1). Отсюда следует, что *$G_S(x, \xi)$ может быть выражена через обычную функцию Грина $G(x, \xi)$, определенную способом* п. 15.5-1 *для задачи с «дополнительными» однородными краевыми условиями.* В частности, рассмотрим двумерную и трехмерную краевую задачу для действительного самосопряженного дифференциального уравнения вида

$$\mathsf{L}\Phi(x) \equiv -[\nabla^2 + q]\,\Phi(x) = 0 \qquad (x \in V), \qquad (15.5\text{-}24)$$

где $q = q(x)$ — действительная дифференцируемая функция. Если $G(x, \xi)$ — функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$-[\nabla^2 + q]\,G(x, \xi) = \delta(x, \xi) \qquad (15.5\text{-}25)$$

при заданных однородных краевых условиях (п. 15.5-1), то формула Грина (15.4-12) дает

$$\Phi(x) = \int_S \left[G(x, \xi) \frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial \nu} - \Phi(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \nu} \right] dA(\xi) \qquad (x \in V), \qquad (15.5\text{-}26)$$

где *символ $\partial/\partial\nu$ обозначает производную по нормали.* Отсюда для краевых условий вида

$$\mathrm{B}\,\Phi(x) \equiv \Phi(x) = b(x) \qquad (x \in S) \qquad (15.5\text{-}27)$$

(т. е. для условий Дирихле) решение (22) приводит к соотношению

$$G_S(x, \xi) = -\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \nu} \qquad (\xi \in S), \qquad (15.5\text{-}28)$$

где $G(x, \xi)$ удовлетворяет в V уравнению (25) и обращается в нуль на S.
Для краевых условий (задача Неймана)

$$\mathrm{B}\Phi(x) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial n} = b(x) \qquad (x \in S) \qquad (15.5\text{-}29)$$

решение (22) дифференциального уравнения (24) сводится к использованию «функции Неймана»

$$G_S(x, \xi) = G(x, \xi) \qquad (\xi \in S), \qquad (15.5\text{-}30)$$

где $G(x, \xi)$ удовлетворяет уравнению (25) в V и $\partial G(x, \xi)/\partial n = 0$ на S.

В пп. 15.6-6 и 15.6-9 указаны приложения этих соотношений при *решении краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений.* В п 10-3-6 показан сходный метод при решении *задач с начальными значениями для уравнений гиперболического типа* (см. также п. 10.3-5).

15.6. ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА

15.6-1. Введение. Дифференциальные уравнения Лапласа и Пуассона (см. также п. 5.7-3, 10.4-3 и 10.4-5). Многие важные приложения связаны с решением $\Phi(\mathbf{r})$ линейных уравнений с частными производными:

уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0, \qquad (15.6\text{-}1)$$

уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -4\pi Q(\mathbf{r}), \qquad (15.6\text{-}2)$$

где $\Phi(\mathbf{r})$ и $Q(\mathbf{r})$ — функции точки в трехмерном точечном евклидовом пространстве $(\mathbf{r}) \equiv (x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$ или двумерном точечном евклидовом пространстве $(\mathbf{r}) \equiv (x, y) \equiv (x^1, x^2)$, $\Phi(\mathbf{r})$ часто интерпретируется как *потенциал безвихревого векторного поля*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \Phi(\mathbf{r}),$$

порождаемого распределением зарядов или масс, так что $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 4\pi Q(\mathbf{r})$ (пп. 5.7-2, 5.7-3, 15.6-5). Изучение таких потенциалов и, в частности, решений дифференциального уравнения Лапласа (1) известно как **теория потенциала.**

15.6-2. Трехмерная теория потенциала. Классические краевые условия задачи.

(а) Задача Дирихле. Ограниченная область V, допускающая решение краевой задачи (*Дирихле*)

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (\mathbf{r} \in V), \qquad \Phi(\mathbf{r}) = b(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r} \in S) \qquad (15.6\text{-}3)$$

для всякой заданной непрерывной функции $b(\mathbf{r})$, называется **областью Дирихле.** *Если решение существует,* то *оно необходимо единственно.* Если V — неограниченная область, то должно быть указано асимптотическое поведение

решения на бесконечности, скажем, $\Phi(\mathbf{r}) = O(1/r)$ (при $r \to \infty$; *последнее условие влечет единственность решения в случае его существования*. В п. 15.6-6, d обсуждаются вопросы существования решения.

Решение $\Phi(\mathbf{r})$ задачи Дирихле (3) доставляет стационарное значение интегралу Дирихле $\int_V (\nabla\Phi)^2 \, dV$, где $\Phi(\mathbf{r})$ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой в V и на S и удовлетворяющей данным краевым условиям (см. также п. 15.4-7, а). Задача Дирихле имеет особую важность для электростатики (см. п. 10.4-5).

(b) Задача Неймана. Для второй классической краевой задачи (*Неймана*)

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (\mathbf{r} \in V), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = b(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r} \in S), \tag{15.6-4}$$

где $b(\mathbf{r})$ — данная непрерывная функция; существование решения требует выполнения условия $\int_S b(\mathbf{r}) \, dA = 0$ (см. также теорему Гаусса, табл. 5.6-1). Если V — неограниченная область, то для существования решения необходимо $\Phi(\mathbf{r}) = O(1/r)$ и $\partial\Phi/\partial n = O(1/r^2)$ при $r \to \infty$. *Решение задачи Неймана в ограниченной области V единственно с точностью до аддитивной постоянной.*

Задача Неймана возникает, в частности, при изучении течения несжимаемой жидкости (см. п. 10.4-5).

15.6-3. Теорема Кельвина об инверсии. *Если $\tilde{\Phi}(\mathbf{r})$ есть решение дифференциального уравнения Лапласа в некоторой области $\tilde{V}$, лежащей внутри сферы $|\mathbf{r} - \mathbf{a}| = R$, то функция*

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{R}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \tilde{\Phi}\left[\frac{R^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^2}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) + \mathbf{a}\right] \tag{15.6-5}$$

есть решение уравнения Лапласа в соответствующей области, лежащей вне сферы, и обратно.

В сферических координатах r, θ, φ это означает, что если $\Phi(r, \theta, \varphi)$ *есть решение при $r < R$, то $\frac{R}{r}\Phi\left(\frac{R^2}{r}, \theta, \varphi\right)$ есть решение при $r > R$, и обратно.*

Отсюда следует, что так называемая *внешняя* краевая задача

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0 && (\mathbf{r} \text{ вне } V), \\ &\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \beta\Phi = b(\mathbf{r}) && (\mathbf{r} \in S), \\ &\Phi(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } && r \to \infty \end{aligned}\right\} \tag{15.6-6}$$

для ограниченной области V может быть преобразована в соответствующую краевую задачу для *внутренней* области $\tilde{V}$, полученной из V посредством преобразования инверсии

$$\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{a} = \frac{R^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^2}(\mathbf{r} - \mathbf{a}). \tag{15.6-7}$$

15.6-4. Свойства гармонических функций.

(a) Теоремы о среднем значении и максимуме модуля. Решения $\Phi(\mathbf{r})$ уравнения Лапласа (1) называют **гармоническими функциями.** *Каждая функция $\Phi(\mathbf{r})$, гармоническая в открытой области V, аналитична* (п. 4.10-5, b) *и имеет в V гармонические производные любого порядка. Каждое значение $\Phi(\mathbf{r}_1)$ равно среднеарифметическому* (п. 4.6-3) *значений $\Phi(\mathbf{r})$ на поверхности (а отсюда и по объему) сферы с центром в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ в предположении, что сфера содержится внутри области V (теорема о среднем значении)*. Обратно, *непрерывная функция $\Phi(\mathbf{r})$ является гармонической в каждой открытой области, в которой выполняется свойство среднего значения.*

Функция $\Phi(\mathbf{r})$, гармоническая внутри ограниченной области V и на ее границе S, не может иметь максимума или минимума внутри V (теорема

о максимуме модуля, см. также п. 7.3-5). Если $\Phi(\mathbf{r})$ — гармоническая в V, непрерывна в V и на S и равна нулю на S, то $\Phi(\mathbf{r}) \equiv 0$ в V. Если $\Phi(\mathbf{r})$ — гармоническая в V, непрерывно дифференцируема в V и на S и $\partial\Phi/\partial n = 0$ на S, то $\Phi(\mathbf{r})$ постоянна в V. Теорема об инверсии п. 15.6-3 доставляет аналогичные теоремы для неограниченной области V' вне S.

(b) Теоремы Гарнака. Следующие ниже теоремы интересны в связи с аппроксимацией гармонических функций.

Если последовательность $s_0(\mathbf{r})$, $s_1(\mathbf{r})$, $s_2(\mathbf{r})$, ... *функций, гармонических в* V *и непрерывных на границе* S *области* V, *равномерно сходится на* S, *то эта последовательность сходится равномерно в* V *к некоторой функции* $s(\mathbf{r})$, *гармонической в* V *и такой, что* $s(\mathbf{r}) = \lim_{n\to\infty} s_n(\mathbf{r})$ *на* S. *Последовательность частных производных от функций* $s_n(\mathbf{r})$ *сходится равномерно к соответствующей частной производной* $s(\mathbf{r})$ *в каждой замкнутой подобласти* V (*первая теорема Гарнака*).

Пусть дана последовательность функций $s_0(\mathbf{r})$, $s_1(\mathbf{r})$, $s_2(\mathbf{r})$, ..., *гармонических в* V *и таких, что* $s_0(\mathbf{r}) \geqslant s_1(\mathbf{r}) \geqslant s_2(\mathbf{r}) \geqslant \ldots$ *для всех* $\mathbf{r}$ *в* V. *Из сходимости этой последовательности в некоторой точке* V *следует сходимость последовательности всюду в* V *и равномерная сходимость в каждой замкнутой подобласти* V; *предел данной последовательности есть функция, гармоническая в* V (*вторая теорема Гарнака*).

15.6-5. Решения уравнений Лапласа и Пуассона как потенциалы.

(a) Потенциалы точечного заряда, диполя и мультиполя. Следующие ниже частные решения уравнения Лапласа имеют особенно простую физическую интерпретацию:

потенциал единичного точечного заряда в точке $(\boldsymbol{\rho}) \equiv (\xi, \eta, \zeta)$:

$$\varphi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}) \equiv \frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} \equiv \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \qquad (\mathbf{r} \neq \boldsymbol{\rho}); \qquad (15.6\text{-}8)$$

потенциал единичного диполя, направленного вдоль единичного вектора $\mathbf{u}_1$ *в точке* $(\boldsymbol{\rho})$:

$$\varphi_1(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}) \equiv -(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\,\varphi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}) \qquad (\mathbf{r} \neq \boldsymbol{\rho}). \qquad (15.6\text{-}9)$$

Более общо, *потенциал* **мультиполя порядка** j *в точке* $\boldsymbol{\rho} = 0$:

$$\Phi_j(\mathbf{r}) = (-1)^j (\mathbf{p}_j \cdot \nabla)(\mathbf{p}_{j-1} \cdot \nabla) \ldots (\mathbf{p}_1 \cdot \nabla)\,\varphi_0(\mathbf{r}) =$$
$$= \sum_{i+k+l=j}\sum\sum Q_{ikl}^{(j)} \frac{\partial^j \varphi_0(\mathbf{r})}{\partial x^i\,\partial y^k\,\partial z^l} \qquad (\mathbf{r} \neq 0), \qquad (15.6\text{-}10)$$

где так называемые **компоненты момента мультиполя** $Q_{ikl}^{(j)}$ суть константы, определяемые посредством j векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_j$, образующих мультиполь. В сферических координатах r, θ, φ имеем

$$\Phi_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^{j+1}}\,\Phi_j\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{1}{r^{j+1}}\,Y_j(\varphi, \theta) \qquad (\mathbf{r} \neq 0), \qquad (15.6\text{-}11)$$

где $Y_j(\varphi, \theta)$ — сферическая функция j-го порядка (п. 21.8-12). Мультиполи второго и третьего порядков известны под названием соответственно **квадриполя** и **октиполя**.

(b) Потенциалы распределений зарядов. Соотношения для разрывов. Другие частные решения уравнения Лапласа получаются линейной суперпозицией (или интегрированием) простых потенциалов и потенциалов диполей. В частности, представляют интерес *объемные потенциалы распределений зарядов и диполей*

$$\int_V Q(\boldsymbol{\rho})\,\varphi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})\,dV(\boldsymbol{\rho}) = \int_V \frac{Q(\boldsymbol{\rho})}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}\,dV(\boldsymbol{\rho}), \qquad (15.6\text{-}12)$$

$$-\int_V [\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \nabla]\,\varphi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})\,dV(\boldsymbol{\rho}) = -\int_V [\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \nabla]\,\frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}\,dV(\boldsymbol{\rho}) \qquad (15.6\text{-}13)$$

и *потенциалы поверхностных распределений зарядов и диполей* (*потенциалы простого и двойного слоев*)

$$\int_S \sigma(\rho)\, \varphi_0(\mathbf{r}-\rho)\, dA(\rho) = \int_S \frac{\sigma(\varrho)}{|\mathbf{r}-\varrho|}\, dA(\rho), \tag{15.6-14}$$

$$-\int_S p(\rho)\,[d\mathbf{A}(\rho)\cdot\nabla]\,\varphi_0(\mathbf{r}-\rho) = -\int_S p(\rho)\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\,dA(\rho) = \\ = -\int_S p(\rho)\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\varrho|}\right) dA(\rho). \tag{15.6-15}$$

Потенциалы *одномерных распределений зарядов* (линейные интегралы) представляют интерес главным образом в двумерной теории потенциала (п. 15.6-7).

Если плотность зарядов $Q(\mathbf{r})$ ограничена и интегрируема в V, то простой объемный потенциал (12) и все его производные существуют и равномерно непрерывны при всех $\mathbf{r}$; производные могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла. Потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона (2), если $Q(\mathbf{r})$ ограничена и непрерывно дифференцируема. Если функции поверхностной плотности $\sigma(\mathbf{r})$ и $p(\mathbf{r})$ дважды дифференцируемы на S, то:

1. Потенциал простого слоя (14) непрерывен в каждой регулярной точке $\mathbf{r}_0$ поверхности S. То же самое имеет место для производной $\partial\Phi/\partial t$ в некотором направлении, касательном к S в точке $\mathbf{r}_0$; однако производная $\partial\Phi/\partial n$ вдоль нормали к S в точке $\mathbf{r}_0$ претерпевает разрыв, причем

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right]_+ - \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right]_- = -4\pi\sigma(\mathbf{r}_0). \tag{15.6-16}$$

Здесь индексы + и — указывают соответствующие односторонние пределы, когда $\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0$ по положительной или отрицательной стороне нормали к S.

2. Разрывы потенциала двойного слоя (15) и его касательных производных удовлетворяют соотношениям

$$\Phi_+(\mathbf{r}_0) - \Phi(\mathbf{r}_0) = \Phi(\mathbf{r}_0) - \Phi_-(\mathbf{r}_0) = 2\pi p(\mathbf{r}_0), \tag{15.6-17}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]_+ - \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} - \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]_- = 2\pi\frac{\partial p}{\partial t} \tag{15.6-18}$$

в каждой регулярной точке $\mathbf{r}_0$, принадлежащей S, в которой нормальная производная $\partial\Phi/\partial n$ непрерывна.

Замечание. В частном случае, когда $p(\mathbf{r}) = p$, потенциал двойного слоя (15) равен умноженному на p *телесному углу* с вершиной в точке ($\mathbf{r}$); этот угол принимается положительным, если точка ($\mathbf{r}$) расположена на положительной стороне нормали к S. Для замкнутой поверхности S потенциал равен $-4\pi p$, если ($\mathbf{r}$) внутри S, и равен нулю, если ($\mathbf{r}$) находится вне S.

(c) Разложение по мультиполям и теорема Гаусса. Рассмотрим потенциал $\Phi(\mathbf{r})$, порождаемый некоторой комбинацией распределений зарядов, заключенных в ограниченной сфере $|\mathbf{r}|\leqslant R$; пусть Q_T — конечный общий заряд. $\Phi(\mathbf{r})$ является линейной комбинацией потенциалов типа (12)—(15); для $|\mathbf{r}|>R$ можно разложить $\Phi(\mathbf{r})$ в ряд Тейлора (5.5-4) с членами (10) или в ряд по сферическим функциям (11). Для достаточно больших $\mathbf{r}$ потенциал таким образом последовательно аппроксимируется потенциалом точечного заряда Q_T, расположенного в начале, потенциалом точечного заряда плюс потенциал диполя и т. д. (*разложение по мультиполям*). Для каждой регулярной поверхности, заключающей внутри себя распределение зарядов, теорема Гаусса (табл. 5.6-1) принимает специальный вид

$$\int_S d\mathbf{A}\cdot\nabla\Phi = \int_S \frac{\partial\Phi}{\partial n}\, dA = -4\pi Q_T. \tag{15.6-19}$$

(d) Общие решения уравнений Лапласа и Пуассона как потенциалы. Пусть V — односвязная, ограниченная или неограниченная трехмерная область с регулярной граничной поверхностью S, и пусть $\Phi(\mathbf{r})$ дважды непрерывно дифференцируема в V и непрерывно дифференци-

руема на S; $\Phi(\mathbf{r}) = O(1/r)$ при $r \to \infty$. Тогда теорема Грина (табл. 5.6-1 или п. 15.4-3, с) позволяет представить $\Phi(\mathbf{r})$ в форме

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_S [\varphi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})\nabla_\rho \Phi(\boldsymbol{\rho})] \cdot d\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}) - \frac{1}{4\pi}\int_S [\Phi(\boldsymbol{\rho})\nabla_\rho \varphi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})] \cdot d\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}) - \frac{1}{4\pi}\int_V \varphi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})\nabla^2\Phi(\boldsymbol{\rho})\,dV(\boldsymbol{\rho}) \quad (\mathbf{r} \in V), \tag{15.6-20a}$$

$$\varphi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}, \tag{15.6-20b}$$

где ∇_ρ означает дифференцирование по компоненте $\boldsymbol{\rho}$; заметим, что $\nabla_\rho\varphi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}) = \nabla\varphi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})$. *Формула* (20) *выражает любое решение* $\Phi(\mathbf{r})$ *уравнения Пуассона* (2) *как потенциал, порожденный тремя распределениями*:

1. *Распределения простого слоя* (14) *с плотностью*

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\nabla\Phi_0 \cdot d\mathbf{A}}{dA} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial n}.$$

2. *Распределения двойного слоя* (15) *с плотностью*

$$\frac{1}{4\pi}\Phi.$$

3. *Объемного распределения* (12) *с плотностью*

$$-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\Phi = Q(\mathbf{r}).$$

Последний потенциал равен нулю, если $\Phi(\mathbf{r})$ *удовлетворяет в* V уравнению Лапласа (1).

Замечание. Выражение (20*a*) обращается в нуль, если точка $\mathbf{r}$ находится вне V, и равно $\Phi(\mathbf{r})/2$ для точек $\mathbf{r}$, принадлежащих поверхности S.

15.6-6. Решение трехмерных краевых задач посредством функций Грина. Метод функций Грина пп. 15.5-1 и 15.5-4 позволяет выразить решение $\Phi(\mathbf{r})$ задачи Дирихле (3) и задачи Неймана (4) для подходящих областей V в форме поверхностных интегралов

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_S G_S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})\, b(\boldsymbol{\rho})\, dA(\boldsymbol{\rho}). \tag{15.6-21}$$

В п. 15.5-4,b указана связь между «поверхностной» функцией $G_S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ Грина и обычной функцией Грина $G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$, доставляющей решение

$$\Phi(\mathbf{r}) = 4\pi\int_V G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})\, Q(\boldsymbol{\rho})\, dV(\boldsymbol{\rho}) \tag{15.6-22}$$

уравнения Пуассона (2) при «дополнительных» однородных условиях Дирихле или Неймана. Суперпозиция решений (21) и (22) доставляет решение уравнения Пуассона с заданными граничными значениями $b(\boldsymbol{\rho})$ функции Φ или $\partial\Phi/\partial n$ (п. 15.4-2). Заметим, что $G(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}) \equiv G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ (п. 15.5-1). Функции Грина легко найти в следующих частных случаях (заметим, что положительное направление нормали идет *вне* замкнутой поверхности).

(а) Функция Грина для всего пространства. Если V есть все трехмерное пространство, то формула (20) доставляет единственное решение (22) уравнения Пуассона при «краевом условии» $\Phi(\mathbf{r}) = O(1/r)$ при $r \to \infty$. Соответствующая функция Грина есть

$$G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} = \frac{1}{4\pi}\varphi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}) \tag{15.6-23}$$

(см. также п. 5.7-3).

(b) Полупространство с условиями Дирихле. Если V — полупространство $z>0$, то функции Грина для условий Дирихле имеют вид

$$G(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\rho})=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\varrho}|}-\frac{1}{|\mathbf{r}-\tilde{\boldsymbol{\varrho}}|}\right)=\frac{1}{4\pi}\left[\varphi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})-\varphi_0(\mathbf{r}-\tilde{\boldsymbol{\rho}})\right], \quad (15.6\text{-}24)$$

$$G_S(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\rho})=-\frac{\partial G}{\partial \nu}=\frac{\partial G}{\partial \zeta}\bigg]_{\zeta=0}=\frac{z}{2\pi\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}}, \quad (15.6\text{-}25)$$

где точка $(\tilde{\boldsymbol{\rho}})\equiv(\xi,\ \eta,\ -\zeta)$ есть *зеркальное отражение* точки $(\boldsymbol{\rho})\equiv(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ в граничной плоскости. Решение (22) может быть интерпретировано как объемный потенциал, порождаемый данным зарядом и индуцированным им зарядом в точке $(\tilde{\boldsymbol{\rho}})$; решение (21) выражает влияние неоднородных условий Дирихле в виде потенциала двойного слоя, расположенного на границе.

(c) Сфера с условиями Дирихле. Интеграл Пуассона. *Если V есть внутренность сферы $|\mathbf{r}|=R$, то функции Грина при условиях Дирихле* имеют вид

$$G(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\rho})=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\varrho}|}-\frac{R}{r}\,\frac{1}{\left|\frac{R}{r^2}\,\mathbf{r}-\boldsymbol{\varrho}\right|}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\varphi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})-\frac{R}{r}\,\varphi_0\left(\frac{R^2}{r^2}\,\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}\right)\right], \quad (15.6\text{-}26)$$

$$G_S(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\rho})=-\frac{\partial G}{\partial \nu}=-\frac{\partial G}{\partial \rho}\bigg]_{\rho=R}=-\frac{1}{4\pi}\,\frac{r^2-R^2}{R\,(r^2+R^2-2Rr\cos\gamma)^{3/2}}, \quad (15.6\text{-}27)$$

где γ — угол между $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\rho}$, или

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi'), \quad (15.6\text{-}28)$$

если сферические координаты точек $(\mathbf{r})$ и $(\boldsymbol{\rho})$ обозначены соответственно через $r,\ \theta,\ \varphi$ и $\rho',\ \theta',\ \varphi'$. Второй член в формуле (26) можно рассматривать как эффект индуцированного заряда, симметричного данному относительно сферы в соответствии с теоремой Кельвина об инверсии (п. 15.6-3). Решение (21) задачи Дирихле

$$\nabla^2\Phi(r,\ \theta,\ \varphi)=0 \quad (r<R), \quad \Phi\,|_{r=R}=b(\theta,\ \varphi)$$

имеет вид

$$\Phi(r,\ \theta,\ \varphi)=$$

$$=\frac{R\,(R^2-r^2)}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{\pi}\frac{b(\theta',\ \varphi')\sin\theta'\,d\theta'}{(R^2+r^2-2Rr\cos\gamma)^{3/2}} \quad \text{(интегральная формула Пуассона)} \quad (15.6\text{-}29)$$

и может быть интерпретировано как потенциал двойного слоя.

Выражение (27) может быть разложено по сферическим гармоникам в соответствии с (21.8-68) (разложение по мультиполям, п. 15.6-5, с, см. также п. 10.4-9). Формулы (26)—(29) доставляют решения для внутренности сферы $(r<R)$. Если V — *внешность* сферы $(r>R)$, $G(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\rho})$ также дается формулой (26), однако теперь

$$G_S(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\rho})=-\frac{\partial G(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\varrho})}{\partial \nu}=\frac{\partial G(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\varrho})}{\partial \rho}\bigg]_{\rho=R},$$

так что *знаки правых частей формул* (27) *и* (29) *должны быть изменены на обратные.*

(d) Теорема существования. *Функция Грина $G(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\varrho})$ уравнения Пуассона с условиями Дирихле и, следовательно, решение задачи Дирихле с разумными краевыми условиями существует для каждой области, ограниченной конечным числом кусков регулярных поверхностей, каждая точка которых может быть вершиной тетраэдра, расположенного вне V.*

15.6-7. Двумерная теория потенциала. Логарифмический потенциал.

(а) Во многих трехмерных задачах теории потенциала функция $\Phi(x, y, z)$ не зависит от координаты z и V есть прямой цилиндр, граничная поверхность S которого пересекает плоскость Oxy по некоторой линии C (например, потенциал и течение вблизи бесконечного цилиндра, плоские границы). Эти задачи составляют содержание *двумерной теории потенциала.*

Теорема о дивергенции и теорема Гаусса принимают вид (4.6-33); используя прямоугольные декартовы координаты x, y или плоские полярные координаты r, φ, можно записать *уравнение Лапласа* в виде

$$\nabla^2\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0, \qquad (15.6\text{-}30)$$

уравнение Пуассона —

$$\nabla^2\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=-2\pi Q, \qquad (15.6\text{-}31)$$

где $\Phi=\Phi(\mathbf{r})$, $Q=Q(\mathbf{r})$, $\mathbf{r}\equiv(x, y)\equiv(r, \varphi)$.

На двумерные гармонические функции полностью переносятся теоремы п. 15.6-4; следует только в теоремах о среднем значении заменить сферы на окружности. Формула Кельвина (5) имеет место для каждой окружности $|\mathbf{r}-\mathbf{a}|=R$; таким образом, если $\Phi(r, \varphi)$ есть решение для $r<R$, то $\frac{R}{r}\Phi\left(\frac{R^2}{r}, \varphi\right)$ есть решение для $r>R$, и обратно.

(b) Двумерное уравнение Лапласа (30) имеет элементарное решение, называемое *логарифмическим потенциалом* точечного источника в $\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}$,

$$\psi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})=\ln\frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\varrho}|}=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}, \qquad (15.6\text{-}32)$$

которое описывает потенциал равномерно заряженной прямой линии в направлении оси z. Функция (32) играет роль функции (8) в двумерной теории так, что потенциалы (12), (14) и (15) из п. 15.6-5 *заменяются соответствующими логарифмическими потенциалами*

$$\int_D Q(\boldsymbol{\rho})\,\psi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})\,dA(\boldsymbol{\rho})=\int_D Q(\boldsymbol{\rho})\ln\frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\varrho}|}\,dA(\boldsymbol{\rho}), \qquad (15.6\text{-}33)$$

$$\int_C \sigma(\boldsymbol{\rho})\,\psi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})\,ds(\boldsymbol{\rho})=\int_C \sigma(\boldsymbol{\rho})\ln\frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\varrho}|}\,ds(\boldsymbol{\rho}), \qquad (15.6\text{-}34)$$

$$-\int_C p(\boldsymbol{\rho})\frac{\partial\psi_0}{\partial n}\,ds(\boldsymbol{\rho})=-\int_C p(\boldsymbol{\rho})\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\varrho}|}\,ds(\boldsymbol{\rho}). \qquad (15.6\text{-}35)$$

Уравнение (20) заменяется на

$$\Phi(\mathbf{r})=\frac{1}{2\pi}\int_C \psi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\,ds(\boldsymbol{\rho})-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_S \Phi(\boldsymbol{\rho})\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu}\,ds(\boldsymbol{\rho})-\frac{1}{2\pi}\int_D \psi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})\,\nabla_\rho^2\Phi(\boldsymbol{\rho})\,dA(\boldsymbol{\rho}). \qquad (15.6\text{-}36)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial\nu}\,ds(\boldsymbol{\rho})\equiv\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial\xi}\,d\eta-\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial\eta}\,d\xi. \qquad (15.6\text{-}37)$$

15.6-8. Двумерная теория потенциала; сопряженные гармонические функции (см. также пп. 7.3-2 и 7.3-3).

(а) Плоскость Oxy может рассматриваться как комплексная числовая плоскость с точками $z=x+iy$. Пара (необходимо гармонических) функций

$\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ называются **гармонически сопряженными** в области D плоскости Oxy тогда и только тогда, когда функция

$$\Xi = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

есть аналитическая функция от $z = x + iy$ в области D.

Сопряженные гармонические функции связаны уравнениями Коши — Римана

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \tag{15.6-38}$$

и определяют одна другую всюду в D с точностью до аддитивной постоянной. Если дана функция $\Phi(x, y)$, гармоническая в D, то $\Psi(x, y)$ выражается криволинейным интегралом

$$\Psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial y}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial x}dy\right), \tag{15.6-39a}$$

где x_0 и y_0 — произвольные постоянные, а путь интегрирования расположен внутри D. Если дана $\Psi(x, y)$, то имеем

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}dx - \frac{\partial\Psi}{\partial x}dy\right). \tag{15.6-39b}$$

Линии $\Phi(x, y) = \text{const}$ *и* $\Psi(x, y) = \text{const}$ *образуют взаимно ортогональные семейства*. Эти линии имеют важную физическую интерпретацию (*эквипотенциальные линии* и *линии градиента* в электростатике, *линии уровня потенциала скоростей* и *линии тока* для несжимаемых течений).

Ξ часто называют **комплексным потенциалом**.

(b) *Каждое преобразование*

$$\tilde z = \tilde z(z) \qquad (z = x + iy, \qquad \tilde z = \tilde x + i\tilde y), \tag{15.6-40}$$

аналитическое в V *и такое, что* $d\tilde z/dz \neq 0$ *в* V (*конформные отображения*, п. 7.9-1), *преобразует сопряженные гармонические функции* $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ *в сопряженные гармонические функции* $\tilde\Phi(\tilde x, \tilde y)$, $\tilde\Psi(\tilde x, \tilde y)$ *с взаимно ортогональными линиями уровней*. Эта теорема позволяет упрощать граничные линии и линии уровня посредством конформных отображений (см. также п. 15.6-9).

(c) Пусть $\Psi(x, y)$ есть решение задачи Неймана

$$\nabla^2\Psi = 0 \quad (\text{в } D), \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial n} = b(x, y) = b(s) \qquad (\text{на } C) \tag{15.6-41}$$

так, что $\Psi(x, y)$ и ее производные непрерывны на C и, следовательно, в D. Тогда функция (39b), комплексно сопряженная функции $\Psi(x, y)$, есть решение задачи Дирихле

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (\text{в } D), \qquad \Phi(x, y) = B(x, y) = B(s) \quad (\text{на } C), \tag{15.6-42}$$

где

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = -\frac{\partial\Psi}{\partial n} \quad (\text{на } C) \quad \text{или} \quad B(s) = -\int b(s)\,ds + \text{const}. \tag{15.6-43}$$

Решение $\Phi(x, y)$ задачи Дирихле (42) аналогичным образом доставляет решение (39a) задачи Неймана (41), если только

$$-\oint_C b(s)\,ds = \oint_C \frac{\partial B}{\partial s}\,ds = 0, \tag{15.6-44}$$

так, что теорема Гаусса выполняется (см. также табл. 5.6-1 и п. 15.6-5, c).

15.6-9. Решение двумерных краевых задач. Функции Грина и конформные отображения (см. также пп. 15.5-1, 15.5-4, 15.6-6). Методы функций Грина пп. 15.5-1 и 15.5-3 позволяют выразить решение $\Phi(\mathbf{r})$ уравнения Пуассона (31) с однородными линейными краевыми условиями в виде

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_D G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) Q(\boldsymbol{\rho}) \, dA(\boldsymbol{\rho}) \tag{15.6-45}$$

и решение $\Phi(\mathbf{r})$ уравнения Лапласа (30) с данными краевыми значениями $b(\mathbf{r})$ функции Φ или $\partial\Phi/\partial n$ в виде

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_G G_S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) \, b(\boldsymbol{\rho}) \, ds(\boldsymbol{\rho}). \tag{15.6-46}$$

Решение уравнения Пуассона при неоднородных линейных краевых условиях может быть получено суперпозицией интегралов вида (45) и (46). Заметим, что $G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = G(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r})$.

Функции Грина легко находятся в нижеследующих специальных случаях.

(а) Функция Грина для всей плоскости. Если D — вся плоскость, то формула (36) доставляет единственное решение (45) уравнения Пуассона при «краевом условии» $\Phi(\mathbf{r}) \to 0$ при $r \to \infty$. Соответствующая функция Грина есть

$$G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\varrho}|}. \tag{15.6-47}$$

(b) Полуплоскость с условиями Дирихле. Если D — полуплоскость $x > 0$, то *функции Грина для условий Дирихле* имеют вид

$$G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\varrho}|} - \ln\frac{1}{|\mathbf{r} - \tilde{\boldsymbol{\varrho}}|}\right] =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\psi_0(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) - \psi_0(\mathbf{r} - \tilde{\boldsymbol{\rho}})\right] = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \tag{15.6-48}$$

$$G_S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = -\frac{\partial G}{\partial \nu} = \frac{\partial G}{\partial \xi}\bigg]_{\xi=0} = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + (y-\eta)^2}, \tag{15.6-49}$$

где точка $(\tilde{\boldsymbol{\rho}}) \equiv (-\xi, \eta)$ есть зеркальное отражение точки $(\boldsymbol{\rho}) \equiv (\xi, \eta)$ в граничной линии.

(с) Окружность с условиями Дирихле. Интегральная формула Пуассона. Если D есть круг $r < R$, то *функции Грина для условий Дирихле* имеют вид

$$G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{R^2 + \dfrac{r^2\rho^2}{R^2} - 2r\rho\cos(\varphi - \varphi')}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \varphi')}, \tag{15.6-50}$$

$$G_S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = -\frac{\partial G}{\partial \nu} = -\frac{\partial G}{\partial \rho}\bigg]_{\rho=R} = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \varphi')}, \tag{15.6-51}$$

где ρ', φ' — полярные координаты точки $(\boldsymbol{\rho})$.

Решение (45) задачи Дирихле

$$\nabla^2\Phi(r\ \ \varphi) = 0 \quad (r < R), \qquad \Phi_{r=R} = b(\varphi), \tag{15.6-52}$$

принимает вид

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \varphi')} b(\varphi')\,d\varphi' \quad \text{(интегральная формула Пуассона)} \tag{15.6-53}$$

и может быть разложено в ряд Фурье по φ.

Уравнения (50) — (53) доставляют решения для круга $r < R$. Если D есть область $r > R$, то $G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ также выражается формулой (50), но в этом случае $G_S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = -\frac{\partial G}{\partial \nu} = \frac{\partial G}{\partial \rho}\Big|_{\rho=R}$ так, что знак в правых частях формул (51) и (53) должен быть изменен на обратный.

(d) Существование функций Грина и конформные отображения. Из п. 15.6-9,c и теоремы Римана об отображениях (п. 7.9-6) следует существование функции Грина (а отсюда и решения задачи Дирихле) для некоторой области D, которая вместе со своей границей может быть отображена конформно на единичный круг. Более точно, *пусть $w=w(z)$ — аналитическая функция, отображающая точки $z=x+iy$ замкнутой области D в точки единичного круга так, что точка $\zeta=\xi+i\eta$ области D переходит в начало*, или

$$w(z)=1 \quad (z \text{ на } C), \qquad w(\zeta)=0. \tag{15.6-54}$$

Тогда задача Дирихле для области D имеет функцию Грина

$$G(x, y; \xi, \eta) \equiv G(z, \zeta)=\ln\frac{1}{|w(z)|}. \tag{15.6-55}$$

15.6-10. Распространение теории на более общие дифференциальные уравнения. Запаздывающие и опережающие потенциалы (см. также п. 10.4-4).

Теория пп. 15.6-5, 15.6-7 и 15.6-9 позволяет конструировать решения уравнения Лапласа и Пуассона посредством суперпозиции точечных и дипольных потенциалов. Эта теория легко обобщается на более общие дифференциальные уравнения

$$\nabla^2\Phi+k^2\Phi=0, \tag{15.6-56}$$

$$\nabla^2\Phi+k^2\Phi=-4\pi q(\mathbf{r}), \tag{15.6-57}$$

которые включают пространственную форму волнового уравнения (k — действительно, п. 10.4-4) и пространственную форму уравнений Клейна — Гордона, используемого в ядерной физике ($k=i\varkappa$). Дифференциальное уравнение (57) принадлежит к типу, изученному в п. 15.5-4, b.

(a) Трехмерный случай. Трехмерное уравнение (56) имеет элементарное частное решение

$$\varphi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})=\frac{e^{\pm ik(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})}}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} \qquad (\mathbf{r}\neq\boldsymbol{\rho}). \tag{15.6-58}$$

Для действительных k положительный знак соответствует уходящим волнам, отрицательный знак — приходящим волнам; при мнимых $k=i\varkappa$ представляет большой интерес только отрицательный показатель $-|\varkappa|$.

Подстановка выражения (58) *вместо* $\varphi_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})=\frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}$ *в формулы* (8) — (15), (23), (24) *доставляет решения дифференциальных уравнений* (56) *и* (57) *вместо соответствующих решений уравнений Лапласа и Пуассона.*

Результирующие решения волнового уравнения (п. 10.4-8) суть частные случаи *запаздывающих потенциалов* (положительный знак в формуле (58)) и *опережающих потенциалов* (отрицательный знак в формуле (58)).

В частности, если $\Phi(\mathbf{r})$ — дважды непрерывно дифференцируемое решение однородного дифференциального уравнения (56), формула (20) заменяется по *теореме Гельмгольца* на

$$\Phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi}\int_S\left(\frac{e^{\pm ik|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}\nabla_\rho\Phi\right)\cdot d\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho})-\frac{1}{4\pi}\int_S\left(\Phi\nabla_\rho\frac{e^{\pm ik|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}\right)\cdot d\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}) \tag{15.6-59}$$

$$(\mathbf{r}\in V).$$

(b) Двумерный случай. В *случае двумерных дифференциальных уравнений вида* (56) и (57) элементарные частные решения (32) заменяются на

$$\varphi_0(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})=\begin{cases} -\frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|) \text{ (уходящие волны)}, \\ \frac{\pi i}{2}H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|) \text{ (приходящие волны)}, \end{cases} \tag{15.6-60}$$

где $H_0^{(r)}(z)$ — функции Ганкеля (п. 21.8-1).

ГЛАВА 16

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

16.1. ВВЕДЕНИЕ

16.1-1. Вводные замечания. В тензорном исчислении рассматриваются специальные математические объекты (см. п. 12.1-1), тензоры, задаваемые обычно в каждой точке пространства и меняющиеся от точки к точке. Эти объекты представляют собой, следовательно, функции точки; роль «точек» могут играть элементы различной природы, определяемые системами чисел — координат этих точек. Предполагается, что каждый тензор может быть аналитически охарактеризован упорядоченной системой функций от координат точки (компонент тензора); эти функции могут выбираться по-разному, но так, чтобы введенные с их помощью математические соотношения между тензорами не зависели от конкретного выбора аналитической характеристики.

Тензорная алгебра является обобщением теории векторных пространств (пп. 12.4-1 и 14.2-1—14.2-7), линейных алгебр (пп. 12.4-2 и 14.3-5) и их представлений (п. 14.1-2). *Тензорный анализ* занимается изучением тензоров как функций точки (тензорное поле) и применяется в основном для описания пространства с кривизной (гл. 17) и в теории поля в физике. Тензорные методы часто позволяют проследить на относительно простой математической модели изменение сложных количественных характеристик при переходе от одной системы отсчета к другой.

16.1-2. Системы координат и допустимые преобразования. Рассмотрим множество объектов, которые будем называть *точками*. Предположим, что каждой точке множества отнесена по определенному правилу упорядоченная система $n<\infty$ действительных чисел $x^1, x^2, \ldots, x^n$ (ее *координат*), причем точки множества взаимно однозначно соответствуют точкам некоторой области n-мерного арифметического пространства переменных [1]) $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Преобразование координат («пассивная» точка зрения на формулы преобразования, см. п. 14.1-3), *допустимое* в смысле последующего изложения, состоит в том, что каждой точке относятся n новых координат $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$, связанных следующими формулами преобразования с координатами относительно исходной системы:

$$\bar{x}^k=\bar{x}^k(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{16.1-1}$$

Уравнения (1) должны удовлетворять в рассматриваемой области следующим двум требованиям:

1) функции $\bar{x}^k(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ непрерывно дифференцируемы,
2) якобиан (п. 4.5-5) $\det[\partial\bar{x}^k/\partial x^i]$ отличен от нуля.

Множество допустимых преобразований образует группу (п. 12.2-1) *относительно «умножения», т. е. последовательного выполнения преобразований* (см. также п. 12.2-8). *Якобиан произведения двух преобразований равен произведению якобианов этих преобразований. Каждое допустимое преобразование* (1) *имеет единственное обратное преобразование, якобиан которого равен обратной величине якобиана данного преобразования.*

16.1-3. Компоненты объектов. Индексные обозначения. В тензорном анализе рассматриваются объекты, связанные с точками $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ пространства n измерений ($n<\infty$, п. 14.1-2) и представляющие собой *функции точек* (п. 5.4-1), определенные в некоторой области пространства. Каждая такая функция,

[1]) Здесь и дальше верхние индексы не являются степенями.

обозначим ее $\mathfrak{Q}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, может быть, по предположению, определена (координатное представление объекта $\mathfrak{Q}$) системой $n^R < \infty$ скалярных функций $Q(j_1, j_2, \ldots, j_R; x^1, x^2, \ldots, x^n)$ ее **компонент (координат)** (см. также п. 14.1-2); индексы $j_1, j_2, \ldots, j_R$ пробегают целые значения от 1 до n. В зависимости от типа объекта (пп. 16.2-1 и 16.2-2) некоторые из индексов записываются в каждой компоненте наверху, другие — внизу. Например, объект $\mathfrak{Q}$ может определяться n^{r+s} компонентами $Q^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i_1 i_2 \ldots i_s}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, где все индексы принимают значения от 1 до n. Эти обозначения позволяют сокращенно записать суммы вида

$$\sum_{k=1}^{n} A^{ik} B_k = C^i \quad (i=1, 2, \ldots, n) \text{ как } A^{ik}B_k = C^i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A^i_{kj} B^k C_{ih} = D_{jh} \qquad (j, h=1, 2, \ldots, n) \text{ как } A^i_{kj} B^k C_{ih} = D_{jh},$$

а также суммы, содержащие векторы:

$$\sum_{k=1}^{n} a^k \mathbf{e}_k = \mathbf{a} \quad \text{как} \quad a^k \mathbf{e}_k = \mathbf{a}.$$

Сокращенная запись суммы основана на следующих соглашениях:

1. *Соглашение о суммировании.* Суммирование от 1 до n производится по каждому **немому индексу**, встречающемуся дважды, один раз внизу и один раз наверху.

Обозначение любого немого индекса может быть изменено, так как немые индексы «взаимно уничтожаются» при суммировании. (Пример: $A^{ik}B_k = A^{ij}B_j = A^{ih}B_h$.) При перемножении сумм следует использовать различные индексы суммирования.

2. *Соглашение о ранге.* Все **свободные индексы**, встречающиеся только внизу или только наверху, пробегают значения от 1 до n, так что уравнение с R свободными индексами является сокращенной записью n^R уравнений:

Как верхние, так и нижние индексы из различных частей уравнения должны совпадать.

3. *В производных вида $\partial a^i/\partial x^k$ индекс k считается нижним.*

В настоящей главе немые индексы в соответствии с соглашениями 1), 2) всегда используются для обозначения суммирования. Так, выражения вида $A^{ik}B_k$ следует рассматривать как суммы, если специально не оговорено противное, например $A^{ik}B_k$ (не суммировать!).

Во многих приложениях индексные обозначения оказываются более совершенными, чем матричная запись, использованная в гл. 13 (см. табл. 14.7-1 для сравнения обозначений).

16.1-4. Системы отсчета и индуцированные преобразования. Геометрические объекты (см. также пп. 14.1-5 и 16.2-1). Рассмотрим класс объектов, являющихся функциями точки. Говорят, что для этого класса или для множества классов задана **система отсчета** (координатная система), если каждому объекту по некоторому правилу соответствует (взаимно однозначно) система действительных чисел — компонент (координат) объекта.

Каждый объект должен определяться во всех системах отсчета одним и тем же числом компонент. В физике значение каждой компоненты представляет собой обычно результат физического измерения.

Полезно считать, что с каждой системой координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ связана своя система отсчета (система отсчета x). Тогда компоненты $Q^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ объекта $Q(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ в системе отсчета x и компоненты $\bar{Q}^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{k'_1 k'_2 \ldots k'_s}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$ того же объекта в системе отсчета $\bar{x}$ связаны **индуцированным преобразованием**

$$\bar{Q}^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{k'_1 k'_2 \ldots k'_s}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n) =$$

$$= Q^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{k'_1 k'_2 \ldots k'_s}\left[Q^{11\ldots 1}_{11\ldots 1}(x^1, x^2, \ldots, x^n), \ldots, Q^{nn\ldots n}_{nn\ldots n}(x^1, x^2, \ldots, x^n)\right], \qquad (16.1\text{-}2)$$

которое порождается каждым допустимым преобразованием координат (1).

Класс C объектов $Q(x^1, x^2, \ldots x^n)$, определяемых в системе отсчета x скалярными компонентами $Q^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, называется классом **инвариантных** или **геометрических объектов** (иногда называемых **тензорами** в наиболее широком смысле слова), *если математические свойства объектов этого класса могут быть описаны в терминах операций, не зависящих от системы отсчета* (см. также пп 12.1-1 и 16.4-1). Это значит, что индуцированные преобразования (2) следующим образом связаны с операциями, заданными в C:

1. Соответствие между допустимыми преобразованиями координат (1) и соответствующими индуцированными преобразованиями (2) есть гомоморфизм (п. 12.1-6), сохраняющий произведение двух индуцированных преобразований.
2. Каждое индуцированное преобразование является изоморфизмом, сохраняющим операции, определенные в C (см. также п. 16.4-1). Если определены операции, связывающие элементы двух или более классов $C_1, C_2, \ldots$ (например, скаляры и векторы), то они также сохраняются при преобразованиях, индуцированных в $C_1, C_2, \ldots$

Можно рассматривать также классы объектов, инвариантных лишь относительно подгруппы множества допустимых преобразований (п. 12.2-8).

16.2. АБСОЛЮТНЫЕ (ИСТИННЫЕ) ТЕНЗОРЫ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ТЕНЗОРЫ (ПСЕВДОТЕНЗОРЫ)

16.2-1. Определение абсолютных и относительных тензоров, основанное на законе преобразования их компонент (см. также табл. 16.2-1 и п. 6 3-3). *В настоящем справочнике, а также в большинстве приложений рассматриваются* **действительные** (*абсолютные или относительные*) **тензоры**, *т. е. тензоры с действительными компонентами.* В основу определения тензора можно положить соотношения, связывающие компоненты тензора в различных координатных системах. *При переходе от одной координатной системы к другой компоненты тензора подвергаются линейному однородному преобразованию* (4) *или* (5), *различному для абсолютных или относительных тензоров различного типа; тип тензора определяется законом преобразования его компонент.*

Если задано пространство точек $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и группа допустимых преобразований координат (16.1-2), то

1. **Скаляром (абсолютным скаляром; тензором ранга 0)** α называется объект, который в координатной системе x определяется функцией $\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и в координатной системе $\bar{x}$ функцией $\bar{\alpha}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$, связанной с $\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ в каждой точке пространства соотношением

$$\bar{\alpha} = \alpha. \qquad (16.2\text{-}1)$$

Таблица 16.2-1

Определения тензорных величин наиболее распространенного типа, основанные на законе преобразования их компонент

(п. 16.2-1; п. 16.1-3, система индексных обозначений)

Тип тензорной величины	Компоненты в системе координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$	Компоненты в системе координат $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$
1. Абсолютный скаляр (тензор ранга 0) ($R = r = s = 0$)	$\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n)$	$\bar{\alpha}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n) = \alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n)$
2. Абсолютный контравариантный вектор a ($R = r = 1,\ s = 0$)	$a^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$	$\bar{a}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} a^i$
3. Абсолютный ковариантный вектор a ($R = s = 1,\ r = 0$)	$a_i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$	$\bar{a}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} a_i$
4. Абсолютный контравариантный тензор A ранга 2 ($R = r = 2,\ s = 0$)	$A^{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$	$\bar{A}^{jh} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^k} A^{ik}$
5. Абсолютный ковариантный тензор A ранга 2 ($R = s = 2,\ r = 0$)	$A_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$	$\bar{A}_{jh} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^h} A_{ik}$
6. Абсолютный смешанный тензор A ранга 2 ($R = 2,\ r = s = 1$)	$A^i_k(x^1, x^2, \ldots, x^n)$	$\bar{A}^j_h = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^h} A^i_k$

2. **Контравариантным вектором (абсолютным контравариантным вектором; абсолютным контравариантным тензором ранга 1)** называется объект, который в координатной системе x определяется n упорядоченными числами или функциями (**компонентами**) *) $a^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и в системе $\bar{x}$ определяется n упорядоченными компонентами $\bar{a}^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$, связанными с $a^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ в каждой точке пространства преобразованием

$$\bar{a}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} a^i. \tag{16.2-2}$$

3. **Ковариантным вектором (абсолютным ковариантным вектором; абсолютным ковариантным тензором ранга 1)** называется объект, который в координатной системе x определяется n упорядоченными компонентами $a_i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и в системе $\bar{x}$ определяется n упорядоченными компонентами $\bar{a}_i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$, связанными с $a_i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ в каждой точке пространства преобразованием

$$\bar{a}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} a_i. \tag{16.2-3}$$

*) В векторной алгебре (гл. 5) *компоненты* вектора назывались *координатами* вектора Отметим, что термины *компоненты* тензора и *координаты* тензора применяются взаимозаменяемо.

4. **Тензором A, r раз контравариантным и s раз ковариантным (истинным тензором, абсолютным тензором, r раз контравариантным и s раз ковариантным)**, называется объект, который в координатных системах x и $\bar{x}$ определяется соответственно n^{r+s} компонентами $A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и n^{r+s} компонентами $\bar{A}^{k_1 k_2 \dots k_r}_{k'_1 k'_2 \dots k'_s}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$, связанными с $A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ в каждой точке преобразованием

$$\bar{A}^{k_1 k_2 \dots k_r}_{k'_1 k'_2 \dots k'_s} = \frac{\partial \bar{x}^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial \bar{x}^{k_2}}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{k_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial \bar{x}^{k'_1}} \frac{\partial x^{i'_2}}{\partial \bar{x}^{k'_2}} \dots \frac{\partial x^{i'_s}}{\partial \bar{x}^{k'_s}} A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s}. \qquad (16.2\text{-}4)$$

Общее число индексов $r+s$ называется **рангом (валентностью)** тензора **A**.

5. **Относительным тензором (псевдотензором) A веса W, r раз контравариантным и s раз ковариантным**, называется объект, определяемый в каждой координатной системе n^{r+s} упорядоченными компонентами, которые при переходе к новой системе координат преобразуются по закону

$$\bar{A}^{k_1 k_2 \dots k_r}_{k'_1 k'_2 \dots k'_s} = \frac{\partial \bar{x}^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial \bar{x}^{k_2}}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{k_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial \bar{x}^{k'_1}} \frac{\partial x^{i'_2}}{\partial \bar{x}^{k'_2}} \dots$$

$$\dots \frac{\partial x^{i'_s}}{\partial \bar{x}^{k'_s}} A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s} \left[\frac{\partial (x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)} \right]^W, \qquad (16.2\text{-}5)$$

где W — целое число. При $W = +1$ относительный тензор называется **тензорной плотностью**, при $W = -1$ — **тензорной емкостью**.

Уравнение (5) включает (1), (2), (3) и (4) как частные случаи, соответствующие $W = 0$.

Тензор с компонентами $A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s}$ называется **смешанным тензором**, если ни r, ни s не равны нулю. Преобразование (5), характеризующее любую тензорную величину, является линейным и однородным относительно компонент тензора. Преобразование, обратное преобразованию (5), имеет вид

$$A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{k_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial \bar{x}^{k_2}} \dots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial \bar{x}^{k_r}} \frac{\partial \bar{x}^{k'_1}}{\partial x^{i'_1}} \frac{\partial \bar{x}^{k'_2}}{\partial x^{i'_2}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{k'_s}}{\partial x^{i'_s}} \bar{A}^{k_1 k_2 \dots k_r}_{k'_1 k'_2 \dots k'_s} \left[\frac{\partial (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)}{\partial (x^1, x^2, \dots, x^n)} \right]^W. \qquad (16.2\text{-}6)$$

Замечание. *Для того чтобы не вводить новых символов, компоненты тензоров иногда различают относительным положением верхних и нижних индексов.* Так, $A^i{}_k$ и $A_k{}^i$ обозначают различные системы компонент (см. пп. 16.7-2 и 16.9-1).

16.2-2. Инфинитезимальное перемещение. Градиент скалярного поля (см. также пп. 5.2-2, 5.7-1, 6.2-3, 16.10-7). Дифференциалы координат dx^i определяют контравариантный вектор, который называется **вектором инфинитезимального перемещения** $d\mathbf{r}$. Если скаляр α задан дифференцируемой функцией от координат x^i, то $\partial\alpha/\partial x^i$ служат компонентами ковариантного вектора — **градиента** $\nabla\alpha$ скаляра α. *Ковариантный вектор, заданный компонентами a_i*, является градиентом скаляра в том и только в том случае, если $\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i} = 0$ для всех i, k; при этом предполагается, что все частные производные непрерывны.

16.3. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ОПЕРАЦИЙ

16.3-1. Равенство тензоров. Два тензора **A** и **B** одного и того же типа, ранга и веса называются **равными** (**A** = **B**) в точке $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, если в этой точке равны соответствующие компоненты тензоров относительно некоторой координатной системы

$$A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}(x^1, x^2, \ldots, x^n) = B^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}(x^1, x^2, \ldots, x^n) \quad \text{(равенство тензоров)}. \tag{16.3-1}$$

Отсюда следует, что *соответствующие компоненты тензоров* **A** и **B** *равны в каждой координатной системе* (см. также п. 16.4-1). Равенство тензоров обладает свойствами симметрии, рефлексивности и транзитивности (п. 12.1-3).

Замечание. В тензорной алгебре не определяются никакие соотношения между значениями тензоров в различных точках пространства. Некоторые из этих соотношений для частного случая тензоров в римановых пространствах рассматриваются в п. 16.10-9.

16.3-2. Нуль-тензор. Нуль-тензором 0 любого заданного типа, ранга и веса называется тензор, обладающий тем свойством, что все его компоненты в некоторой координатной системе равны нулю. Условие того, что **A** = **0** в точке $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, имеет вид

$$A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}(x^1, x^2, \ldots, x^n) = 0 \quad \text{(нуль-тензор)}. \tag{16.3-2}$$

Все компоненты нуль-тензора **A** *равны нулю в любой координатной системе.*

16.3-3. Сложение тензоров. Если задан класс тензоров одного и того же типа, ранга и веса, то **суммой C** = **A** + **B** двух тензоров **A** и **B** называется тензор, компоненты которого в некоторой координатной системе (и, следовательно, в каждой координатной системе) равны суммам соответствующих компонент тензоров **A** и **B**:

$$C^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s} = A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s} + B^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s} \quad \text{(сложение тензоров)}. \tag{16.3-3}$$

Сумма тензоров **A** + **B** является тензором того же ранга, типа и веса, что и каждое из слагаемых. Сложение тензоров коммутативно и ассоциативно.

16.3-4. Умножение тензора на абсолютный скаляр. Произведением **B** = α**A** тензора **A** на скаляр α называется тензор, компоненты которого в каждой координатной системе равны произведениям компонент тензора **A** на скаляр α:

$$B^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s} = \alpha A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s} \quad \text{(умножение на скаляр)}. \tag{16.3-4}$$

α**A** является тензором того же ранга, типа и веса, что и **A**. Умножение на скаляр коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения как тензоров, так и скаляров. В частности, (-1) **A** $\equiv -$**A** есть тензор, противоположный тензору **A**, т. е. **A** + $(-$**A**$)$ = **0**.

16.3-5. Свертывание смешанного тензора. Свертывание — операция, которая может быть применена к смешанному тензору. Рассмотрим смешанный тензор **A** с компонентами $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}$. Если выбрать какой-нибудь верхний индекс и какой-нибудь нижний индекс и просуммировать все компоненты с совпадающими значениями этих индексов, то полученные n^{r+s-2} суммы будут компонентами нового тензора того же веса, что и **A**, $r-1$ раз контравариантного и $s-1$ раз ковариантного. Смешанный тензор может быть,

вообще говоря, свернут различными способами; кроме того, свертывание может быть повторено несколько раз.

Пример. Свертывание абсолютного или относительного смешанного тензора A ранга 2 с компонентами A^i_k порождает абсолютный или относительный скаляр $A^i_i = A^1_1 + A^2_2 + \ldots + A^n_n$ (след A).

16.3-6. Произведение (внешнее) двух тензоров (см. также п. 12.7-3). **Произведением** $C = AB$ **(внешним)** двух тензоров A и B веса W и W' соответственно, определяемых компонентами $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i_1' i_2' \ldots i_s'}$ и $B^{k_1 k_2 \ldots k_p}_{k_1' k_2' \ldots k_q'}$, называется тензор с компонентами

$$C^{i_1 i_2 \ldots i_r k_1 k_2 \ldots k_p}_{i_1' i_2' \ldots i_s' k_1' k_2' \ldots k_q'} = A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i_1' i_2' \ldots i_s'} B^{k_1 k_2 \ldots k_p}_{k_1' k_2' \ldots k_q'} \quad \text{(внешнее умножение)}. \qquad (16.3\text{-}5)$$

Произведение AB является тензором веса $W + W'$, $r + p$ раз контравариантным и $s + q$ раз ковариантным. Умножение тензоров ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения. Однако оно, вообще говоря, не коммутативно, так как порядок следования индексов в формулах (5) является существенным.

Примеры. $a^i b^k = A^{ik}$, $a^i b_k = A^i_k$, $a_i b_k = A_{ik}$. Произведение (4) является частным случаем внешнего произведения тензоров.

16.3-7. Внутреннее произведение. Если произведение двух тензоров A и B, определяемое формулами (5), можно свернуть (п. 16.3-5) таким образом, что в каждом из слагаемых один или несколько *верхних* индексов компоненты $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ будут совпадать с одним или несколькими *нижними* индексами компоненты $B^{k_1 k_2 \ldots k_p}_{k_1' k_2' \ldots k_q'}$, то полученные суммы будут служить компонентами нового тензора, который называется **внутренним произведением** тензоров A и B. В общем случае можно образовать несколько таких внутренних произведений.

Каждое внутреннее произведение тензоров A и B является тензором того же веса, что и AB. Ранг внутреннего произведения равен разности между рангом AB и числом попарно взятых индексов, по которым производилось суммирование. Внутреннее умножение дистрибутивно относительно сложения тензоров. Иногда внутреннее умножение тензоров называют *свертыванием* этих тензоров.

Примеры. $a^i b_i = \gamma$, $A^i_k a^k = c^i$, $A^i_k b_i = D_k$, $B^{ik} b_i = f^k$, $C_{ik} a^k = h_i$.

16.3-8. Признак тензора. Пусть в координатной системе x заданы n^R компонент $Q(j_1, j_2, \ldots, j_R; x^1, x^2, \ldots, x^n)$ объекта Q и пусть X — тензор, описываемый компонентами $X^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i_1 i_2 \ldots i_s}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Как и в п. 16.3-6, *внешнее произведение* QX будет определяться n^{R+r+s} компонентами $Q(j_1, j_2, \ldots, j_R)\, X^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i_1' i_2' \ldots i_s}$. *Внутреннее произведение* Q и X определяется суммами, образованными таким свертыванием (п. 16.3-5) объекта QX, при котором один или несколько индексов каждой компоненты $Q(j_1, j_2, \ldots, j_R)$ совпадает с одним или несколькими индексами (верхними или нижними) компоненты $X^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i_1 i_2 \ldots i_s}$, входящей в то же слагаемое. *Для того чтобы объект Q был тензором, необходимо и достаточно, чтобы для каждого тензора X некоторого определенного (фиксированного) ранга, типа и веса внешнее произведение QX или какое-нибудь внутреннее произведение объекта Q и тензора X было тензором Y определенного (фиксированного) ранга, типа и веса.*

Можно получить аналогичную теорему, заменив X *внешним произведением R различных произвольных векторов определенных фиксированных типов и весов*. Ранг и тип Q могут быть в каждом случае определены на основании подсчета верхних и нижних индексов. Вес Q равен разности весов Y и X.

Примеры. 1) Q является абсолютным тензором, r раз контравариантным и s раз ковариантным, если для каждого абсолютного вектора a с компонентами a^i

$$\sum_{j_{r+s}=1}^{n} Q(j_1, j_2, \ldots, j_{r+s}) a^{j_{r+s}} = B^{j_1 j_2 \ldots j_r}_{j_{r+1} j_{r+2} \ldots j_{r+s-1}},$$

где правые части служат компонентами абсолютного тензора, зависящего от a.

2) Q является абсолютным тензором, r раз контравариантным и s раз ковариантным, если для каждого абсолютного тензора A с компонентами $A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r}$

$$\sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_{r+s}=1}^{n} Q(j_1, j_2, \ldots, j_{r+s}) A^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{j_{s+1} j_{s+2} \ldots j_{r+s}} = \alpha,$$

где α — абсолютный скаляр, зависящий от A.

∗Замечание. Объект Q, определяемый n^2 компонентами Q_{ik}, является абсолютным ковариантным тензором ранга 2 в том и только в том случае, если

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} Q_{ik} a^i b^k = \alpha$$

для каждых двух абсолютных контравариантных векторов с компонентами a^i и b^k.

Объект Q_{ik} является тензором, если

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} Q_{ik} a^i a^k = \alpha$$

есть абсолютный скаляр для каждого абсолютного контравариантного вектора a с компонентами a^i, и $Q_{ik} = Q_{ki}$.∗

16.4. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА. ИНВАРИАНТНОСТЬ ТЕНЗОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

16.4-1. Инвариантность тензорных уравнений. *При любом допустимом преобразовании координат* (16.1 1) *компоненты тензоров преобразуются по законам, сохраняющим результаты сложения, свертывания и внешнего* (*следовательно, и внутреннего*) *умножения, а также равенство тензоров.* Каждое соотношение между тензорами, которое можно выразить через эти операции (и операцию предельного перехода), *инвариантно относительно группы допустимых преобразований координат.* Если соотношение, записанное в виде уравнений между компонентами, имеет место в одной координатной системе, то оно справедливо во всех координатных системах (см. также пп. 12.1-6 и 16.1-4).

Пример. Из

$$A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s} + B^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s} = C^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}$$

следует

$$\bar{A}^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s} + \bar{B}^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s} = \bar{C}^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s},$$

и обратно; это соотношение может быть символически записано в виде A + B = C.

Следовательно, о тензорах и тензорных операциях можно говорить безотносительно к координатным системам (системам отсчета). Каждую подобранную

подходящим образом систему тензорных величин можно рассматривать как класс инвариантных объектов с определенными в этом классе и вполне определяющими его (с точностью до изоморфизма, п. 12.1-6) абстрактными операциями, не связанными с координатным представлением объектов.

Так, классы абсолютных тензоров ранга 0, 1 и 2 представляют собой соответственно скалярные поля (п. 12.3-1, с), векторные пространства (п. 12.4-1), линейные алгебры (п. 12.4-2; см. также п. 16.9-2) или кольца линейных операторов (пп. 14.5-2, 14.6-2, 16.3-8). Классы тензоров ранга 2, 3, ··· можно рассматривать как прямые произведения векторных пространств (п. 12.7-3; см. также п. 16.6-1, с).

16.5. СИММЕТРИЧНЫЕ И АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕНЗОРЫ

16.5-1. Симметричные и антисимметричные объекты. Объект $\mathbf{Q}$ с n^R компонентами $Q(j_1, j_2, \ldots, j_R)$, каждая из которых снабжена упорядоченной системой из R индексов $j_1, j_2, \ldots, j_R$, называется

1. **Симметричным по какой-нибудь паре индексов,** например j_1 и j_2, если

$$Q(j_1=i,\ j_2=k,\ j_3, \ldots, j_R)=Q(j_1=k,\ j_2=i,\ j_3, \ldots, j_R).$$

2. **Антисимметричным (кососимметричным) по какой-нибудь паре индексов,** например j_1 и j_2, если

$$Q(j_1=i,\ j_2=k,\ j_3, \ldots, j_R)=-Q(j_1=k,\ j_2=i,\ j_3, \ldots, j_R)$$

для всех значений $i, k, j_3, \ldots, j_R$ от 1 до n.

Объект $\mathbf{Q}$ называется **симметричным (абсолютно симметричным)** или **антисимметричным (абсолютно антисимметричным) относительно всех индексов,** если он соответственно симметричен или антисимметричен по любой паре индексов.

Симметричность (антисимметричность) тензора или псевдотензора относительно некоторой пары верхних или нижних индексов является свойством, инвариантным относительно группы допустимых преобразований координат.

16.5-2. Символы Кронекера. Обобщенным **символом Кронекера** ранга $2r$ (**δ-объектом** ранга $2r$) называется абсолютный тензор, n^{2r} компонент которого $\delta^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{k_1 k_2 \ldots k_r}$ определяются следующим образом:

1) $\delta^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{k_1 k_2 \ldots k_r}=+1$ или -1, если все верхние индексы $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_r$ различны и система нижних индексов $k_1, k_2, \ldots, k_r$ получена соответственно четным или нечетным числом транспозиций из системы верхних индексов.

2) $\delta^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{k_1 k_2 \ldots k_r}=0$ для всех других комбинаций верхних и нижних индексов.

Особенно важную роль играют δ-символы Кронекера ранга 2, определяемые следующими условиями:

$$\delta^i_k=\begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i=k). \end{cases} \tag{16.5-1}$$

Свертывание любого смешанного тензора $\mathbf{A}$ по верхнему индексу i и нижнему индексу i' (п. 16.3-5) равносильно внутреннему умножению (п. 16.3-7) $\mathbf{A}$ на $\delta^{i'}_i$. Каждый символ Кронекера абсолютно антисимметричен (п. 16.5-1) как по верхним, так и по нижним индексам. Все символы Кронекера ранга $2r > 2n$ равны нулю.

Если $A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s}$ симметричен по любой паре верхних индексов, то

$$\delta^{k_1 k_2 \dots k_r}_{i_1 i_2 \dots i_r} A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s} = 0. \qquad (16.5\text{-}2)$$

Если $A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s}$ симметричен по любой паре нижних индексов, то

$$\delta^{i'_1 i'_2 \dots i'_s}_{k_1 k_2 \dots k_s} A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s} = 0. \qquad (16.5\text{-}3)$$

Если $A^{k_1 k_2 \dots k_r}$ абсолютно антисимметричен, то

$$\delta^{i_1 i_2 \dots i_r}_{k_1 k_2 \dots k_r} A^{k_1 k_2 \dots k_r} = r!\, A^{i_1 i_2 \dots i_r}. \qquad (16.5\text{-}4)$$

Следует также отметить, что

$$\delta^{i_1 i_2 \dots i_r}_{k_1 k_2 \dots k_r} = \frac{(n-s)!}{(n-r)!} \delta^{i_1 i_2 \dots i_r\, i_{r+1} \dots i_s}_{k_1 k_2 \dots k_r\, i_{r+1} \dots i_s}, \quad \delta^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i_1 i_2 \dots i_r} = \frac{n!}{(n-r)!}, \qquad (16.5\text{-}5)$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta^i_k. \qquad (16.5\text{-}6)$$

16.5-3. ⁎ е-объекты (символы Леви-Чивита) (см. также п. 16.7-2). **е-символы**

$$e^{i_1 i_2 \dots i_n} = \delta^{i_1 i_2 \dots i_n}_{1\, 2 \dots n} \quad \text{и} \quad e_{i_1 i_2 \dots i_n} = \delta^{1\, 2 \dots n}_{i_1 i_2 \dots i_n} \qquad (16.5\text{-}7)$$

определяют *абсолютно антисимметричные относительные тензоры* (**е-объекты**) ранга n и веса $+1$ и -1 соответственно. Из (16.5-7) следует:

1. $e^{i_1 i_2 \dots i_n} = e_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$, если среди индексов $i_1, i_2, \dots, i_n$ имеется хотя бы два одинаковых.
2. $e^{i_1 i_2 \dots i_n} = e_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1$, если упорядоченная система индексов $i_1, i_2, \dots, i_n$ отличается четным числом транспозиций от системы $1, 2, \dots, n$.
3. $e^{i_1 i_2 \dots i_n} = e_{i_1 i_2 \dots i_n} = -1$, если упорядоченная система индексов $i_1, i_2, \dots, i_n$ отличается от $1, 2, \dots, n$ нечетным числом транспозиций.

Следует также отметить, что

$$e^{i_1 i_2 \dots i_r i_{r+1} \dots i_n} e_{k_1 k_2 \dots k_r i_{r+1} \dots i_n} = (n-r)!\, \delta^{i_1 i_2 \dots i_r}_{k_1 k_2 \dots k_r}, \qquad (16.5\text{-}8)$$

$$e^{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1 i_2 \dots i_n} = n!, \qquad (16.5\text{-}9)$$

$$e^{i_1 i_2 \dots i_n} A^1_{i_1} A^2_{i_2} \dots A^n_{i_n} = e_{i_1 i_2 \dots i_n} A^{i_1}_1 A^{i_2}_2 \dots A^{i_n}_n = \det\left[A^i_k\right]. \qquad (16.5\text{-}10)$$

16.5-4. Альтернированное произведение двух векторов (см. также пп. 16.8-4 и 16.10-6). **Альтернированным произведением** двух контравариантных или двух ковариантных векторов (иногда *бивектором*) называют антисимметричный тензор ранга 2 с компонентами

$$V^{ij} = a^i b^j - a^j b^i \quad \text{или} \quad V_{ij} = a_i b_j - a_j b_i. \qquad (16.5\text{-}11)$$

Вес альтернированного произведения равен сумме весов его сомножителей.

16.6. ЛОКАЛЬНАЯ СИСТЕМА БАЗИСНЫХ ВЕКТОРОВ (ЛОКАЛЬНЫЙ БАЗИС)

16.6-1. Выражение векторов и тензоров через векторы локального базиса.

(a) Если задана координатная система x, то каждый (абсолютный или относительный) контравариантный вектор с компонентами $a^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ может быть представлен в виде инвариантной формы

$$\mathbf{a} = a^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)\,\mathbf{e}_i(x^1, x^2, \ldots, x^n). \tag{16.6-1}$$

Эта форма линейна относительно n абсолютных контравариантных векторов $\mathbf{e}_1(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $\mathbf{e}_2(x^1, x^2, \ldots, x^n), \ldots, \mathbf{e}_n(x^1, x^2, \ldots, x^n)$; последние называются **контравариантными локальными базисными векторами** координатной системы x (о значении немых индексов см. п. 16.1-3). *Компоненты* i-го *базисного вектора* $\mathbf{e}_i$ равны $\delta_i^1, \delta_i^2, \ldots, \delta_i^n$ (см. также п. 14.2-3).

(b) Аналогично каждый (абсолютный или относительный) ковариантный вектор $\mathbf{b}$ с компонентами $b_i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ может быть следующим образом выражен через n абсолютных **ковариантных локальных базисных векторов**

$$\mathbf{e}^1(x^1, x^2, \ldots, x^n),\quad \mathbf{e}^2(x^1, x^2, \ldots, x^n), \ldots, \mathbf{e}^n(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

координатной системы x:

$$\mathbf{b} = b_i(x^1, x^2, \ldots, x^n)\,\mathbf{e}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n). \tag{16.6-2}$$

Компоненты i-го *базисного вектора* $\mathbf{e}^i$ *равны* $\delta_1^i, \delta_2^i, \ldots, \delta_n^i$. Следует отметить, что векторы (1) и (2) принадлежат, вообще говоря, различным векторным пространствам.

(c) Каждый абсолютный или относительный тензор $\mathbf{A}$ с компонентами $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}$ может быть представлен в виде инвариантной формы

$$\mathbf{A} = A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}\,\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_r}\mathbf{e}^{i'_1}\mathbf{e}^{i'_2}\ldots\mathbf{e}^{i'_s}. \tag{16.6-3}$$

Эта форма однородна относительно локальных базисных векторов $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^{i'}$.

16.6-2. Преобразование локального базиса при преобразовании координат. $2n$ локальных базисных векторов $\mathbf{e}_i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $\mathbf{e}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, связанных с системой координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$, позволяют получить аналитическое представление любого тензора в виде системы его компонент (п. 16.1-4). Новые локальные базисные векторы $\bar{\mathbf{e}}_k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$ и $\bar{\mathbf{e}}^k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$, связанные с системой координат $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n$, имеют в этой системе компоненты, равные соответственно δ_k^i и δ_i^k.

Векторы локального базиса системы $\bar{x}^i$ выражаются через векторы локального базиса системы x^i следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n) &= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\,\mathbf{e}_i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \\ \bar{\mathbf{e}}^k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n) &= \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\,\mathbf{e}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n). \end{aligned}\right\} \tag{16.6-4}$$

Необходимо помнить, что $\mathbf{e}_i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $\bar{\mathbf{e}}_i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$ являются, вообще говоря, различными векторами (одного и того же векторного пространства), а не одним и тем же вектором, заданным различными способами. Векторы $\mathbf{e}_i$ преобразуются формально так же, как компоненты абсолютного ковариантного вектора (*когредиентно*

этим компонентам); закон преобразования $\mathbf{e}^i$ совпадает с законом преобразования компонент контравариантного вектора. Компоненты a^i абсолютных контравариантных векторов и компоненты b_i абсолютных ковариантных векторов (и, как следствие, контравариантные и ковариантные базисные векторы $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^i$) преобразуются *контрагредиентно*, т. е. таким образом, что внутреннее произведение $a^i b_i$ является *инвариантом* (см. также п. 16.4-1).

16.7. ТЕНЗОРЫ В РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. АССОЦИИРОВАННЫЕ ТЕНЗОРЫ

16.7-1. Риманово пространство и фундаментальные тензоры. В каждом римановом пространстве может быть определено скалярное произведение, а вместе с ним длины и углы (п. 16.8-1; см. также п. 14.2-7); эти определения приводят в свою очередь к полезным обобщениям евклидовой геометрии (см. также пп. 17.4-1—17.4-7).

Пространство конечного числа измерений, точки которого определяются упорядоченными системами n действительных[1]) чисел (координат) $x^1, x^2, \ldots, x^n$, называется **римановым пространством**, если в нем задан абсолютный ковариантный тензор ранга 2 (п. 16.2-1) с компонентами $g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, удовлетворяющими в рассматриваемой области пространства следующим трем требованиям:

1) Каждая компонента $g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ является действительной функцией координат и имеет непрерывные частные производные;
2) $g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n) = g_{ki}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$;
3) $g = \det[g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n)] \neq 0$.

Квадратичная форма, соответствующая матрице $[g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n)]$, часто предполагается положительно определенной (п. 13.5-2), хотя это не является необходимым; случай неопределенной формы представляет интерес для теории относительности (см. также пп. 16.8-1 и 17.4-6).

Все перечисленные свойства тензора g_{ik} инвариантны относительно допустимых (п. 16.1-2) преобразований координат. Тензор (см. также п. 17.4-2) с компонентами $g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ (**метрический тензор**) и абсолютный симметрический тензор ранга 2, компоненты которого $g^{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ определяются соотношениями

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j \quad \text{или} \quad g^{ik} = \frac{G^{ik}}{g}, \tag{16.7-1}$$

где $G^{ik} = G^{ki}$ есть алгебраическое дополнение (п. 1.5-2) g_{ik} в определителе $\det[g_{ik}]$ (**ассоциированный метрический тензор**), называются **фундаментальными тензорами** риманова пространства.

$\divideontimes$ Компоненты каждого из фундаментальных тензоров определяют *дифференциал длины дуги* ds (или *линейный элемент* ds^2) и, следовательно, всю *внутреннюю геометрию* риманова пространства (п. 17.4-1—17.4-7). Так как при любом преобразовании координат $g = \det[g_{ik}]$ преобразуется по формуле

$$\bar{g}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n) = g(x^1, x^2, \ldots, x^n)\left(\frac{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)}\right)^2,$$

то естественно принять, что

$$\sqrt{|\bar{g}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)|} = \sqrt{|g(x^1, x^2, \ldots, x^n)|}\,\frac{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)}.$$

---

[1]) Теория, изложенная в пп. 16.7-1—16.10-11, применима к векторам и тензорам с действительными компонентами, определенными в действительных римановых пространствах (последнее означает, что координаты точек действительны), а также в римановых пространствах теории относительности, где мнимые координаты используются, в сущности, лишь как форма записи.

При этом допущении выбор знака перед $\sqrt{|g(x^1, x^2, \ldots, x^n)|}$ в одной системе координат однозначно определяет соответствующий знак для любой системы. Система координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ называется **правой**, если в этой системе координат скалярная плотность $\sqrt{|g(x^1, x^2, \ldots, x^n)|}$ положительна, и левой, если она отрицательна (см. также пп. 6.2-3, b и 6.4-3, c). ✳

16.7-2. Ассоциированные тензоры [1]). Поднятие и опускание индексов. Контравариантный (абсолютный или относительный) вектор с компонентами a^i и ковариантный вектор с компонентами a_i, заданные в римановом пространстве, называются **ассоциированными**, если их компоненты связаны в каждой точке следующими соотношениями:

$$a^k = a_i g^{ik} \text{ и, следовательно, } a_i = g_{ik} a^k. \tag{16.7-2}$$

Аналогично, для того чтобы получить тензор, **ассоциированный данному тензору** с компонентами $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{k_1 k_2 \ldots k_s}$, следует, по определению, **поднять индекс** k посредством внутреннего умножения на g^{kj} или **опустить индекс** i посредством внутреннего умножения на g_{ji}; можно также совершить несколько операций этого рода. Тензор, ранг которого больше единицы, имеет несколько различных ассоциированных тензоров. Поскольку компоненты всех тензоров, ассоциированных данному тензору **A**, целесообразно обозначать одной и той же буквой A, необходимо принимать во внимание порядок, в котором верхние индексы расположены по отношению к нижним (см. также п. 16.2-1). Так, результат поднятия индекса k_2 в $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{k_1 k_2 \ldots k_s}$ записывается следующим образом:

$$A^{i_1 i_2 \ldots i_r}{}_{k_1}{}^{j}{}_{k_3 k_4 \ldots k_s} = g^{jk_2} A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{k_1 k_2 \ldots k_s}. \tag{16.7-3}$$

Поднятие ранее опущенных или опускание ранее поднятых индексов возвращает к компонентам первоначального тензора.

Замечание. Контравариантные и ковариантные e-символы (п. 16.5-3) связаны соотношениями

$$\left.\begin{aligned} e_{i_1 i_2 \ldots i_n} &= \frac{1}{g} g_{i_1 k_1} g_{i_2 k_2} \ldots g_{i_n k_n} e^{k_1 k_2 \ldots k_n}, \\ e^{k_1 k_2 \ldots k_n} &= \frac{1}{g} g^{k_1 i_1} g^{k_2 i_2} \ldots g^{k_n i_n} e_{i_1 i_2 \ldots i_n} \end{aligned}\right\} \tag{16.7-4}$$

и не являются ассоциированными относительными тензорами.

16.7-3. Эквивалентность ассоциированных тензоров. Соответствие между ассоциированными тензорами в римановом пространстве устанавливает между ними отношение эквивалентности, разбивающее множество всех тензоров на классы эквивалентных тензоров, не имеющие общих элементов (п. 12.1-3, b). Поэтому в римановом пространстве компоненты всех тензоров, ассоциированных тензору **A**, рассматриваются как **различные аналитические представления тензора A** (см. также п. 16.9-1).

В частности, *компоненты* a^k и a_i, *связанные соотношениями* (2), *можно интерпретировать как контравариантные и ковариантные составляющие одного и того же вектора* **a** относительно локального базиса, связанного с данной системой координат. В обозначениях п. 16.6-1

$$\mathbf{a} = a^k \mathbf{e}_k = a_i \mathbf{e}^i. \tag{16.7-5}$$

Следовательно, базисные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ в случае риманова пространства можно рассматривать как два различных базиса одного

[1]) См. также сноску в п. 13.3-1.

и того же векторного пространства; их называют **взаимными базисами** (см. также п. 16.8-2). Зависимость между векторами взаимных базисов совпадает по форме с зависимостью между компонентами ассоциированных векторов:

$$\mathbf{e}^k = g^{ik}\mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{e}_i = g_{ik}\mathbf{e}^k. \tag{16.7-6}$$

Подстановка выражений (6) для некоторых из $\mathbf{e}^k$ и $\mathbf{e}_i$ в (16.6-3) соответствует поднятию или опусканию индексов тензора A (см. также п. 16.9-1).

16.7-4. Операции над тензорами в римановых пространствах. В римановом пространстве:

1). Любые два тензора одного ранга и веса можно сложить, согласно определению, приведенному в п. 16.3-3, для чего в случае необходимости нужно предварительно поднять или опустить индексы таким образом, чтобы компоненты слагаемых приобрели одинаковую структуру, т. е. одинаковое расположение верхних и нижних индексов.

2). Тензор может быть *свернут по любой паре индексов* согласно правилу п. 16.3-5, для чего в случае необходимости один из этих индексов должен быть предварительно поднят или опущен. Свертывание по двум верхним индексам i, k соответствует внутреннему умножению на g_{ik}; свертывание по двум нижним индексам i, k соответствует внутреннему умножению на g^{ik}.

3. *Внутреннее произведение* двух тензоров A и B определяется как свертка их внешнего произведения AB по некоторому индексу (или индексам) A и соответствующему индексу (или индексам) B согласно правилу (2).

16.8. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ПОНЯТИЯ

16.8-1. Скалярное (внутреннее) произведение двух векторов в римановом пространстве. В соответствии с содержанием п. 16.7-4 в римановом пространстве можно определить **скалярное (внутреннее) произведение** (см. также пп. 5.2-6, 6.4-2,a, 14.2-6) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ для любых абсолютных или относительных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ с действительными компонентами a^i или a_k и b^i или b_k:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n)\, a^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)\, b^k(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \\ = a_k b^k = a^i b_i = g^{ik} a_i b_k = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}. \tag{16.8-1}$$

Длиной (модулем) $|\mathbf{a}|$ абсолютного или относительного вектора $\mathbf{a}$ с компонентами (действительными) a^i или a_k называется соответственно абсолютный или относительный скалярный инвариант

$$|\mathbf{a}| = +\sqrt{\mathbf{a}^2}, \quad \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = g_{ik}a^i a^k = a^i a_i = g^{ik} a_i a_k. \tag{16.8-2}$$

Если квадратичная форма $g_{ik}\,a^i\,a^k$ является положительно определенной, то длину вектора $\mathbf{a}$ можно рассматривать как **норму** $\|\mathbf{a}\|$ (см. п. 14.2-5).

Единичным вектором называется абсолютный вектор, длина которого равна 1. Косинусом **угла** γ (определение угла) между двумя абсолютными или относительными векторами называется абсолютный скалярный инвариант

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}. \tag{16.8-3}$$

Формулы (2) и (3) обобщают элементарное определение скалярного произведения.

Замечание. Если квадратичная форма $g_{ik}a^i a^k$ не является определенной (*неопределенная метрика*, см. также п. 17. 4-4) в точке $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, то скалярный квадрат $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ абсолютного или относительного вектора $\mathbf{a}$ в этой точке может быть положительным, отрицательным или равным нулю в зависимости от знака выражения $g_{ik}a^i a^k$, причем из равенства $|\mathbf{a}| = 0$ не следует, вообще говоря, что $\mathbf{a} = 0$.

16.8-2. Скалярные произведения локальных базисных векторов. Ортогональная система координат (см. также пп. 6.3-3, 6.4-1, 17.4-7, а). Длины локальных базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$; $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots \mathbf{e}^n$ и углы между ними

в каждой точке $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ (п. 16.6-1) определяются соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k &= g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n), \\ \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k &= g^{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n), \\ \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k &= \delta^i_k. \end{aligned}\right\} \qquad (16.8\text{-}4)$$

Векторы $\mathbf{e}_i$ направлены по касательным к соответствующим координатным линиям, $\mathbf{e}^k$ имеют направления нормалей к координатным гиперповерхностям. Каждый $\mathbf{e}^k$ перпендикулярен ко всем $\mathbf{e}_i$, кроме $\mathbf{e}_k$. Система координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ называется **ортогональной**, если $g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n) \equiv 0$ для $i \neq k$; в этом случае $\mathbf{e}_i$ (а также $\mathbf{e}^k$) попарно ортогональны. Не каждое риманово пространство допускает введение ортогональной системы координат.

Две системы базисных векторов $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^i$, связанные соотношениями $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k = \delta^i_k$, называются **взаимными базисами** рассматриваемого риманова пространства (см. также п 14.7-6).

16.8-3. Физические компоненты тензора (см. также п. 6.3-4) **Локальные единичные векторы** $\mathbf{u}_i$, каждый из которых имеет направление координатной линии, соответствующей индексу вектора, следующим образом выражаются через $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^k$:

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sqrt{|g_{ii}|}}\mathbf{e}_i = \frac{1}{\sqrt{|g_{ii}|}} g_{ik}\mathbf{e}^k, \qquad \mathbf{e}_i = \sqrt{|g_{ii}|}\,\mathbf{u}_i, \qquad \mathbf{e}^k = g^{ik}\mathbf{e}_i. \qquad (16.8\text{-}5)$$

Физическими компонентами $\hat{A}_{j_1 j_2 \ldots j_R}$ тензора **A** (в частности, физическими компонентами $\hat{a}_j$ вектора **a**) называются величины, определяемые уравнениями

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j \mathbf{u}_j, \qquad \hat{a}_j = \sqrt{|g_{jj}|}\, a^j, \qquad (16.8\text{-}6)$$

$$\mathbf{A} = \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \ldots \sum_{j_R=1}^{n} \hat{A}_{j_1 j_2 \ldots j_R} \mathbf{u}_{j_1} \mathbf{u}_{j_2} \ldots \mathbf{u}_{j_R}; \qquad (16.8\text{-}7)$$

для определения $\hat{A}_{j_1 j_2 \ldots j_R}$ достаточно внести в (16.8-7) вместо **A** его выражение (16.6-3) и заменить $\mathbf{u}_i$ по формулам (16.8-5). Физическая компонента вектора **a** в направлении вектора **b** определяется как $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$.

16.8-4. Векторное произведение и смешанное произведение (см. также пп. 5.2-7, 5.2-8, 6.3-3, 6.4-2). **Векторным произведением** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ двух абсолютных или относительных **векторов a и b трехмерного риманова пространства** $(n=3)$ называется вектор с компонентами (см. также п. 16.5-3)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{|g|}} e^{ijk} a_i b_j = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|g|}} e^{ijk}(a_i b_j - a_j b_i) \\ \text{или} \qquad &\sqrt{|g|}\, e_{ijk} a^i b^j = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}\, e_{ijk}(a^i b^j - a^j b^i). \end{aligned}\right\} \qquad (16.8\text{-}8)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \sqrt{|g|} \begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \qquad (16.8\text{-}9)$$

Полезно отметить, что

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}^1 &= \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]}, & \mathbf{e}^2 &= \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]}, & \mathbf{e}^3 &= \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]}, \\ \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3}{[\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3]}, & \mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1}{[\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3]}, & \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2}{[\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3]}. \end{aligned}\right\} \qquad (16.8\text{-}10)$$

где **смешанное произведение** [abc] определяется, как и в п. 5.2-8, следующим образом:

$$[\mathbf{abc}]=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=\sqrt{|g|}\begin{vmatrix}a^1 & b^1 & c^1\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{|g|}}e^{ijk}a_ib_jc_k=\sqrt{|g|}\,e_{ijk}a^ib^jc^k; \tag{16.8-11}$$

в частности,

$$[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]=\sqrt{|g|},\qquad [\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3]=\frac{1}{\sqrt{|g|}}. \tag{16.8-12}$$

Формулы табл. 5.2-2 и п. 5.2-9 остаются в силе.

Замечание. Определение векторного произведения (8) охватывает элементарное соотношение (5.2-6) и определяет векторное произведение двух абсолютных векторов как абсолютный вектор. Некоторые авторы опускают множитель $\sqrt{|g|}$ в определении (8), вследствие чего векторное произведение двух абсолютных векторов становится «аксиальным» вектором (в отличие от «полярного» или абсолютного вектора), который можно рассматривать либо как относительный контравариантный вектор веса +1, либо как относительный ковариантный вектор веса — 1.

16.9. ТЕНЗОРЫ РАНГА 2 В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

16.9-1. Диадные произведения. Абсолютные (истинные) или относительные тензоры ранга 2 **A**, **B**, ... , риманова пространства, определенные, например, своими смешанными компонентами A^i_k, B^i_k ... (см. также п. 16.7-2, замечание о порядке индексов), представляют интерес для многих приложений. С ними иногда связывают особую систему обозначений, краткое описание которой дано в следующих пунктах.

Каждый тензор A (ранга 2) может быть представлен в виде суммы n **диадных произведений (диад)**, т. е. тензорных (внешних) произведений двух векторов:

$$\mathbf{A}=\mathbf{p}_j\mathbf{q}^j=\left(p^i_j\,\mathbf{e}_i\right)\left(q^j_k\mathbf{e}^k\right),\qquad A^i_k=p^i_j\,q^j_k. \tag{16.9-1}$$

Либо **левые множители** $\mathbf{p}^j$, либо **правые множители** $\mathbf{q}^j$ могут быть выбраны произвольно, если только они являются линейно независимыми (п. 14.2-3). В частности,

$$\mathbf{A}=A^i_k\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}^k=A_{ik}\,\mathbf{e}^i\mathbf{e}^k=A^{ik}\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k=A_i{}^k\mathbf{e}^i\mathbf{e}_k, \tag{16.9-2}$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{e}_i\mathbf{A}^i=\mathbf{A}_k\mathbf{e}^k,\ \ \mathbf{A}^i=A^i_k\mathbf{e}^k,\ \ A_k=A^i_k\mathbf{e}_i. \tag{16.9-3}$$

Используя физические компоненты $\hat{A}_{ik}$ (п. 16.8-3), можно представить тензор A в виде

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{A}_{ik}\mathbf{u}_i\mathbf{u}_k,\\ &\hat{A}_{ik}=A^{ik}\sqrt{|g_{ii}g_{kk}|}\ \text{(не суммировать!)},\\ &A^{ik}=g^{kj}A^i_j.\end{aligned}\right\} \tag{16.9-4}$$

В случае ортогональных координат (п. 16.8-2)

$$\hat{A}_{ik}=A^i_k\sqrt{\frac{g_{ii}}{g_{kk}}}\quad\text{(не суммировать!)}. \tag{16.9-5}$$

∗ Замечание. Иногда диадой называют *произвольную сумму диадных произведений*, т. е. произвольный тензор ранга 2. ∗

16.9-2. Умножение тензоров ранга 2 и векторов и связанная с ним система обозначений. Для обозначения внутреннего произведения, образованного из (действительных) тензоров ранга 2 и векторов риманова пространства (см. также п. 16.8-1), используются следующие обозначения:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{p}_j(\mathbf{q}^j\cdot\mathbf{a}) - \textit{вектор с компонентами } A^i_k a^k, \tag{16.9-6}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{A}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}_j)\,\mathbf{q}^j - \textit{вектор с компонентами } A^i_k a_i, \tag{16.9-7}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{p}_j(\mathbf{q}^j\cdot\mathbf{p}'_h)\,q'^h - \textit{тензор с компонентами } A^i_j B^j_k, \tag{16.9-8}$$

где $\mathbf{B}=\mathbf{p}'_j\mathbf{q}'^j=B^i_k\mathbf{e}_i\mathbf{e}^k$.

Благодаря принятым обозначениям алгебра тензоров ранга 2 в точности совпадает с алгеброй линейных операторов (аффиноров), изложенной в пп. 14.3-1 — 14.3-6, так как тензор ранга 2 связывает с каждой точкой $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ некоторое линейное преобразование. *В табл. 14.7-1 осуществляется сравнение тензорных обозначений, «классических» обозначений гл. 14 и матричных обозначений тензоров и векторов.*

Определения *симметричного* и *антисимметричного* тензора ранга 2 аналогичны соответствующим определениям из п. 16.5-1. Именно, тензор **A** называется симметричным, если $A^{ki}=A^{ik}$, или $A_{ik}=A_{ki}$, или $A_i^{\ k}=A^k_{\ i}$; но отсюда не следует с необходимостью, что $A_i^{\ k}=A^i_{\ k}$, так же как это соотношение не означает, что **A** симметричен (см. также п. 14.7-5).

След матрицы $\left[A_i^{\ k}\right]$, т. е. $\operatorname{Tr}(A)=\mathbf{p}_j\cdot\mathbf{q}^j$, называется **первым скаляром** тензора (1).

Скаляр $\mathbf{A}\cdot\cdot\,\mathbf{B}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}'_k\right)\left(\mathbf{q}^i\cdot\mathbf{q}'^k\right)$ называется **двойным скалярным произведением.** При $n=3$ можно определить **векторное произведение**

$$\mathbf{a}\times\mathbf{A}=\left(\mathbf{a}\times\mathbf{p}_j\right)\mathbf{q}^j,\quad \mathbf{A}\times\mathbf{a}=\mathbf{p}_j\left(\mathbf{q}^j\times\mathbf{a}\right),\qquad \mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{p}_j\left(\mathbf{q}^j\times\mathbf{p}'_h\right)\mathbf{q}'^h. \tag{16.9-9}$$

Вектор $\mathbf{v}_A=\mathbf{p}_j\times\mathbf{q}^j$ называется **вектором тензора** (1). $\mathbf{v}_A=0$ в том и только в том случае, если **A** симметричен. Если **A** антисимметричен, то для любого вектора **a**

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{2}\mathbf{v}_A\times\mathbf{a}=-\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}, \tag{16.9-10}$$

т. е. *векторное умножение эквивалентно внутреннему умножению на антисимметричный тензор ранга 2.*

16.9-3. Собственные векторы и собственные значения (см. также п. 14.8-3). Собственные значения и собственные векторы тензоров ранга 2 определяются *в каждой точке* $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ так же, как в п. 14.8-3. Коэффициенты характеристического уравнения (п. 14.8-5), соответствующего тензору, являются абсолютными или относительными скалярами.

Симметричный тензор ранга 2 **A** в трехмерном евклидовом пространстве может быть геометрически интерпретирован при помощи семейства поверхностей второго порядка (3.5-1) с коэффициентами $a_{ik}=A_{ik}$ $(i,\ k=1, 2, 3)$ (см. также п. 3.5-1).

16.10. АБСОЛЮТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

16.10-1. Абсолютные дифференциалы.

(а) Ни для определения бесконечно малого приращения тензорной величины, ни для определения ее дифференциала не может быть использовано понятие разности между «значениями» тензора в точках $(x^1+dx^1, \ldots, x^n+dx^n)$ и $(x^1, x^2 \ldots, x^n)$, так как тензорная алгебра в римановом пространстве (пп. 16.3-1 — 16.3-7) не определяет соотношений между «значениями» тензора в различных точках пространства. Вместо этого в тензорном анализе формулируются следующие требования (постулаты), определяющие **абсолютные дифференциалы** $d\alpha$, $d\mathbf{a}$, $d\mathbf{b}$, $d\mathbf{A}$, $d\mathbf{B}$, ... скаляров, векторов и тензоров *) (компо-

---

*) Если не оговорено противное, имеются в виду абсолютные скаляры, векторы и тензоры.

ненты скаляров, векторов и тензоров риманова пространства предполагаются дифференцируемыми):

1. Абсолютные дифференциалы $d\alpha$, $d\mathbf{a}$ и $d\mathsf{A}$ являются тензорами того же ранга и типа, что α, $\mathbf{a}$ и A.

2. Абсолютный дифференциал $d\alpha$ скаляра α определяется в соответствующей координатной системе выражением

$$D\alpha \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial x^j}\, dx^j \equiv \alpha_{,j}\, dx^j. \qquad (16.10\text{-}1)$$

3. Имеют место следующие правила дифференцирования:

$$\left.\begin{aligned} d(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) &= \mathbf{a}\cdot d\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot d\mathbf{a},\\ d(\mathsf{A}+\mathsf{B}) &= d\mathsf{A} + d\mathsf{B},\\ d(\mathsf{AB}) &= \mathsf{A}\, d\mathsf{B} + \mathsf{B}\, d\mathsf{A},\\ d(\alpha\mathsf{A}) &= \mathsf{A}\, d\alpha + \alpha\, d\mathsf{A}. \end{aligned}\right\} \qquad (16.10\text{-}2)$$

В частности,

$$d(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = d\mathbf{a} + d\mathbf{b}, \qquad d(\alpha\mathbf{a}) = \mathbf{a}\, d\alpha + \alpha\, d\mathbf{a};$$

отсюда следует, что

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} = d\left(a^i\mathbf{e}_i\right) &= \mathbf{e}_i\, da^i + a^i\, d\mathbf{e}_i = a^i_{,j}(x^1, x^2, \ldots, x^n)\, dx^j\mathbf{e}_i = \\ &= d\left(a_i\mathbf{e}^i\right) = \mathbf{e}^i\, da_i + a_i\, d\mathbf{e}^i = a_{i,j}(x^1, x^2, \ldots, x_n)\, dx^j\mathbf{e}^i, \end{aligned} \qquad (16.10\text{-}3)$$

т. е. компоненты вектора $d\mathbf{a}$ равны

$$Da^i \equiv a^i_{,j}\, dx^j \text{ или } Da_i \equiv a_{i,j}\, dx^j.$$

Постулаты, перечисленные выше, определяют инвариантные операции (пп. 16.4-1 и 16.10-7) и приводят к независимому обобщению векторного анализа, изложенного в гл. 5; постулаты удовлетворяются, если положить

$$a^i_{,j} \equiv \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj}a^k, \quad a_{i,j} \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\, a_k \equiv g_{ik}a^k_{,j}. \qquad (16.10\text{-}4)$$

Функции $\Gamma^k_{ij}\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ представляют собой **трехиндексные символы Кристоффеля 2-го рода**, определенные в п. 16.10-3.

Замечание. Формулы (3) и (4) определяют каждую компоненту абсолютного дифференциала $d\mathbf{a}$ как сумму «относительных дифференциалов» da^i или da_i и членов, вызванных *изменением базисных векторов* при переходе от точки к точке (и, следовательно, изменением *метрики* при этом переходе).

Производные $\partial\mathbf{a}/\partial x^j$ *вектора* $\mathbf{a}$ можно определить соотношением

$$d\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^j}\, dx^j. \qquad (16.10\text{-}5)$$

При этом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(a^i\mathbf{e}_i\right) = \frac{\partial a^i}{\partial x^j}\mathbf{e}_i + a^i\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = a^i_{,j}\mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(a_i\mathbf{e}^i\right) = \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\mathbf{e}^i + \\ + a_i\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^j} = a_{i,j}\mathbf{e}^i, \end{aligned} \qquad (16.10\text{-}6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\mathbf{e}_k = \Gamma_{ij;k}\mathbf{e}^k = \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^j} = -\Gamma^i_{kj}\mathbf{e}^k \qquad (16.10\text{-}7)$$

($\Gamma_{ij;k}$ — символы Кристоффеля первого рода (см. п. 16.10-3)).

(b) Из постулатов п. 16.10-1, а следует, что абсолютный дифференциал любого тензора A, заданного в римановом пространстве дифференцируемыми

компонентами $A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s}$, является тензором того же ранга и типа, причем его компоненты $DA^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s}$ определяются следующим уравнением:

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{A} = d\left(A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s} \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_r}\mathbf{e}^{i'_1}\mathbf{e}^{i'_2}\dots\mathbf{e}^{i'_s}\right) = \\ = DA^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s}\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_r}\mathbf{e}^{i'_1}\mathbf{e}^{i'_2}\dots\mathbf{e}^{i'_s}, \\ DA^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s} \equiv A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s, j}\, dx^j, \end{aligned}\right\} \qquad (16.10\text{-}8)$$

где (символы Кристоффеля Γ определены в п. 16.10-3)

$$\begin{aligned} A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s, j} &\equiv \frac{D}{\partial x^j} A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s} \equiv \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial x^j} A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s} - \Gamma^k_{i'_1 j} A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{k i'_2 \dots i'_s} - \dots - \Gamma^k_{i'_s j} A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_{s-1} k} + \\ &+ \Gamma^{i_1}_{kj} A^{k i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s} + \dots + \Gamma^{i_r}_{kj} A^{i_1 i_2 \dots i_{r-1} k}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s} \end{aligned} \qquad (16.10\text{-}9)$$

* Иногда для обозначения абсолютного дифференциала вместо $d\mathbf{a}$, $d\mathbf{A}$ пишут $D\mathbf{a}$, $D\mathbf{A}$. *

16.10-2. Абсолютный дифференциал относительного тензора. Абсолютный дифференциал относительного тензора (п. 16.2-1) определяется по аналогии с абсолютным дифференциалом тензора (п. 16.10-1). В частности, абсолютный дифференциал α относительного скаляра α веса W определяется в соответствующей координатной системе выражением

$$D\alpha = \alpha_{,j}\, dx^j, \text{ где } \alpha_{,j} = \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} - W\Gamma^k_{jk}\alpha. \qquad (16.10\text{-}10)$$

При $W = 0$ формула (10) переходит в (1). Абсолютный дифференциал $d\mathbf{A}$ любого относительного тензора веса W (с дифференцируемыми компонентами) определяется выражением (8) с дополнительным слагаемым вида

$$- W\Gamma^k_{jk} A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s} \qquad (16.10\text{-}11)$$

в правой части формулы (9), так что

$$\frac{D}{\partial x^j} A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s} \equiv \sqrt{|g|}^W \frac{D}{\partial x^j}\left[\frac{1}{\sqrt{|g|}^W} A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_s}\right]; \qquad (16.10\text{-}12)$$

$d\mathbf{A}$ является относительным тензором, ранг, тип и вес которого совпадают с рангом, типом и весом $\mathbf{A}$.

16.10-3. Символы Кристоффеля.

(a) Если риманово пространство отнесено к координатам $x^1, x^2, \dots, x^n$, то его **символами Кристоффеля первого рода** $[ij; k] \equiv \Gamma_{ij;\, k}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и **символами Кристоффеля второго рода** $\{i^k j\} \equiv \Gamma^k_{ij}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ (трехиндексными) называются следующие функции координат $x^1, x^2, \dots, x^n$:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_{ij;\,k} &\equiv [ij;k] \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right), \\ \Gamma^k_{ij} &\equiv \left\{\begin{matrix} & k & \\ i & & j\end{matrix}\right\} \equiv g^{kh}[ij;\, h], \end{aligned}\right\} \qquad (16.10\text{-}13)$$

где g_{ik} и g^{ik} — компоненты фундаментального тензора риманова пространства.

*Символы Кристоффеля**) *не являются, вообще говоря, тензорами* и при переходе к новой системе координат преобразуются по закону:

$$\left.\begin{aligned}\bar\Gamma_{hk;\,r}&=\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^h}\frac{\partial x^j}{\partial \bar x^k}\frac{\partial x^s}{\partial \bar x^r}\Gamma_{ij;\,s}+\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar x^h\partial \bar x^k}\frac{\partial x^j}{\partial \bar x^r}g_{ij},\\ \bar\Gamma^r_{hk}&=\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^h}\frac{\partial x^j}{\partial \bar x^k}\frac{\partial \bar x^r}{\partial x^s}\Gamma^s_{ij}+\frac{\partial^2 x^s}{\partial \bar x^h\partial \bar x^k}\frac{\partial \bar x^r}{\partial x^s};\end{aligned}\right\}\qquad(16.10\text{-}14)$$

функции $\bar\Gamma_{hk;\,r}\equiv\bar\Gamma_{hk;\,r}(\bar x^1,\bar x^2,\ldots,\bar x^n)$ и $\bar\Gamma^r_{hk}\equiv\bar\Gamma^r_{hk}(\bar x^1,\bar x^2,\ldots,\bar x^n)$ суть символы Кристоффеля, связанные с системой координат $\bar x^1,\bar x^2,\ldots,\bar x^n$.

(b) Символы Кристоффеля удовлетворяют следующим соотношениям;

$$\Gamma_{ij;\,k}=\Gamma_{ji;\,k},\qquad \Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji},\qquad(16.10\text{-}15)$$

$$\Gamma_{ij;\,k}=g_{hk}\Gamma^h_{ij},\qquad \Gamma^k_{ij}=g^{kh}\Gamma_{ij;\,h},\qquad(16.10\text{-}16)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=\Gamma_{ik;\,j}+\Gamma_{jk;\,i}=g_{hj}\Gamma^h_{ik}+g_{ih}\Gamma^h_{jk},\qquad(16.10\text{-}17)$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}=-g^{ih}\Gamma^j_{hk}-g^{jh}\Gamma^i_{hk},\qquad(16.10\text{-}18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\ln\sqrt{|g|}=\Gamma^h_{ih},\qquad g\equiv\det\,[g_{ik}],\qquad(16.10\text{-}19)$$

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{\partial \mathbf e_i}{\partial x^j}\cdot\mathbf e^k=\frac{\partial \mathbf e_j}{\partial x^i}\cdot\mathbf e^k=-\frac{\partial \mathbf e^k}{\partial x^j}\cdot\mathbf e^i,\qquad \Gamma_{ij;\,k}=\frac{\partial \mathbf e_i}{\partial x^j}\cdot\mathbf e_k.\qquad(16.10\text{-}20)$$

(c) В важном случае *ортогональных координат* $x^1, x^2, \ldots, x^n$ (пп. 6.4-1 и 16.8-2), который характеризуется условием $g_{ik}=g_{ii}\delta^i_k$, предыдущие соотношения принимают вид

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma_{ij;k}\equiv\Gamma^k_{ij}\equiv 0\qquad (i\neq j\neq k\neq i),\\ &\Gamma_{ii;\,k}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}\qquad (i\neq k),\\ &\Gamma_{ij;\,i}\equiv\Gamma_{ji;\,i}\equiv\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j},\\ &\Gamma^k_{ii}\equiv-\frac{1}{2g_{kk}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}\qquad (i\neq k),\\ &\Gamma^k_{ik}\equiv\Gamma^k_{ki}\equiv\frac{1}{2g_{kk}}\frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i}\equiv\frac{1}{2}\frac{\partial\ln g_{kk}}{\partial x^i}.\end{aligned}\right\}\qquad(16.10\text{-}21)$$

16.10-4. Ковариантное дифференцирование. Вследствие аналогии между выражениями (4), (9) и обычными частными производными операцию образования функций $A^{i_1 i_2\ldots i_r}_{i_1 i_2\ldots i_s,\,j}=\frac{D}{\partial x^j}A^{i_1 i_2\ldots i_r}_{i_1 i_2\ldots i_s}$ по компонентам тензора $A^{i_1 i_2\ldots i_r}_{i_1 i_2\ldots i_s}$ называют **ковариантным дифференцированием** по метрике, определяемой тензором g_{ik}.

*) В математической литературе символы Кристоффеля предпочтительно обозначаются $\Gamma_{ij;\,k}$, Γ^k_{ij}. Однако во многих руководствах для них сохраняется обозначение скобками $[ij;\,k]$, $\left\{{k \atop i\ j}\right\}$.

Если $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}$ являются компонентами абсолютного тензора **A**, то компоненты $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s, j}$ также определяют абсолютный тензор

$$\nabla \mathbf{A} = A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s, j} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \ldots \mathbf{e}_{i_r} \mathbf{e}^{i'_1} \mathbf{e}^{i'_2} \ldots \mathbf{e}^{i'_s} \mathbf{e}^{j}, \tag{16.10-22}$$

r раз контравариантный и $s+1$ раз ковариантный. Тензор $\nabla\mathbf{A}$ (а иногда также каждую отдельную его компоненту) называют **ковариантной производной тензора A**; для компонент тензора **A** используют также обозначение

$$\nabla_j A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s} \equiv \frac{D A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}}{\partial x^j} \equiv A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s, j}.$$

Следует иметь в виду, что ни частные производные $\frac{\partial}{\partial x^j} A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}$, *ни «относительные» дифференциалы* $dA^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}$ *не являются, вообще говоря, компонентами тензора.*

16.10-5. Правила ковариантного дифференцирования (см. также п. 16.10-7). Применение тензорного анализа часто упрощается благодаря тому, что обычные правила дифференцирования суммы и произведения (табл. 4.2-5) остаются справедливыми для ковариантного дифференцирования:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{D}{\partial x^j}\left(A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s} + B^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}\right) = A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s, j} + B^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s, j}, \\
&\frac{D}{\partial x^j}\left(A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s} B^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{k'_1 k'_2 \ldots k'_s}\right) = \\
&= A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s} B^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{k'_1 k'_2 \ldots k'_s, j} + B^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{k'_1 k'_2 \ldots k'_s} A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{k'_1 k'_2 \ldots k'_s, j}, \\
&\frac{D}{\partial x^j} A^{i_1 i_2 \ldots k \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots k \ldots i'_s} = A^{i_1 i_2 \ldots k \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots k \ldots i'_s, j} \ (\textit{правило для свертки}).
\end{aligned}\right\} \tag{16.10-23}$$

Последние два правила применяются также для ковариантного дифференцирования внутреннего произведения (пп. 16.3-7 и 16.8-1).

Важное значение имеют соотношения

$$\left.\begin{aligned}
&g_{ik,j} = g^{ik}{}_{,j} = 0 \quad (\textit{теорема Риччи}), \\
&g_{,j} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{16.10-24}$$

Уравнения (24) показывают, что *фундаментальные тензоры ведут себя относительно ковариантного дифференцирования как константы.*

Ковариантная производная тензора, ассоциированного тензору **A**, *является тензором, ассоциированным* $\nabla\mathbf{A}$ (см. также пп. 16.7-2 и 16.7-3).

Ковариантные производные δ-символов Кронекера и ε-объекта (пп. 16.5-2 и 16.5-3) *равны нулю.*

16.10-6. Ковариантные производные высших порядков. Если компоненты данного тензора и компоненты метрического тензора g_{ik} имеют производные достаточно высокого порядка, то можно рассматривать ковариантные производные высшего порядка с компонентами $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s, j_1 j_2 \ldots j_m}$. Полученные при этом тензоры, вообще говоря, не симметричны по нижним индексам j; *ковариантная производная не зависит от последовательности дифференцирования в том и только в том случае, если риманово пространство является*

плоским (локально евклидовым) (п. 17.4-6, с). Для любого вектора с компонентами a_i

$$a_{i,jk}-a_{i,kj}=R^r_{i\,jk}a_r, \qquad (16.10\text{-}25)$$

где $R^r_{i\,jk}$ — компоненты *смешанного тензора кривизны* (п. 17.4-5) риманова пространства.

16.10-7. Дифференциальные операторы и дифференциальные инварианты (см. также пп. 5.5-2 и 5.5-5).

(a) Если рассматривать выражение

$$\frac{D}{\partial x^j}A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_r}\mathbf{e}^{i'_1}\mathbf{e}^{i'_2}\ldots\mathbf{e}^{i'_s}\equiv\nabla_j A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_r}\mathbf{e}^{i'_1}\mathbf{e}^{i'_2}\ldots\mathbf{e}^{i'_s}\equiv$$

$$\equiv A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s, j}\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_r}\mathbf{e}^{i'_1}\mathbf{e}^{i'_2}\ldots\mathbf{e}^{i'_s}$$

как результат «умножения» тензора

$$A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_r}\mathbf{e}^{i'_1}\mathbf{e}^{i'_2}\ldots\mathbf{e}^{i'_s}$$

на символ $\nabla_j\equiv\frac{D}{\partial x^j}$, то ковариантную производную (22) тензора **A** можно записать в виде внешнего «произведения» (п. 16.3-6) тензора **A** и (инвариантного) «вектора»

$$\nabla\equiv\mathbf{e}^j\frac{D}{\partial x^j}\equiv\mathbf{e}^j\nabla_j, \qquad (16.10\text{-}26)$$

который называется **дифференциальным оператором набла**; его «компоненты» $\frac{D}{\partial x^j}=\nabla_j$ преобразуются, как ковариантные компоненты вектора (п. 16.2-1). Для любого преобразования координат в римановом пространстве

$$\frac{D}{\partial \bar{x}^k}=\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}\frac{D}{\partial x^j} \quad \text{или} \quad \bar{\nabla}_k=\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}\nabla_j. \qquad (16.10\text{-}27)$$

(b) *Соотношения между компонентами тензоров, полученные в результате ковариантного дифференцирования, а также сложения и умножения тензоров, инвариантны относительно группы допустимых преобразований координат* (см. также пп. 16.4-1 и 16.10-1). Тензорные величины, образованные посредством внешнего и внутреннего умножения других тензорных величин на инвариантный оператор (26), называются **дифференциальными инвариантами**. В табл. 16.10-1 указаны важнейшие дифференциальные инварианты.

16.10-8. Абсолютные (внутренние) производные и производные по направлению (см. также п. 5.5-3). Если в римановом пространстве задана регулярная кривая

$$x^i=x^i(t) \qquad (t_1\leqslant t\leqslant t_2), \qquad (16.10\text{-}28)$$

то компоненты dx^i/dt определяют контравариантный вектор $d\mathbf{r}/dt$, «направленный» по касательной к данной кривой (п. 17.4-2) **Абсолютной (внутренней) производной** $d\mathbf{A}/dt$ истинного или относительного тензора **A** (с дифференцируемыми компонентами) по параметру t вдоль данной кривой называется следующий тензор того же веса, ранга и типа, как **A**:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)\mathbf{A};$$

компоненты тензора $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ равны

$$\frac{D}{dt}A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}\equiv A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s, j}\frac{dx^j}{dt}. \qquad (16.10\text{-}29)$$

Таблица 16.10-1

Дифференциальные инварианты, определенные в римановых пространствах

$\left(\nabla \equiv \mathbf{e}^j \frac{D}{\partial x^j} \equiv \mathbf{e}^j \nabla_j\right.$, см. также пп. 16.2-2, 16.10-1 — 16.10-7, табл. 6.4-1 — 6.5-11$\left.\right)$

(a) **Градиент (абсолютного) скаляра** α есть (абсолютный) вектор

$$\nabla\alpha = \mathbf{e}^j \frac{\partial\alpha}{\partial x^j} = \mathbf{e}_i g^{ji} \frac{\partial\alpha}{\partial x^j}.$$

(b) Ковариантная производная $\nabla\mathbf{a}$ (абсолютного) вектора $\mathbf{a}$ называется **градиентом или локальным аффинором вектора a. Дивергенция (абсолютного) вектора a** является (абсолютным) скаляром $\nabla\cdot\mathbf{a}$; она равна

$$\nabla_i a^i \equiv \frac{Da^i}{\partial x^i} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + a^k \Gamma^i_{ki} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\, a^i\right).$$

Замечание. Соответствующие формулы табл. 5.5-1 могут применяться к градиенту и дивергенции в римановых пространствах (см. также п. 16.10-5).

(c) **Оператор Лапласа** $\nabla^2 \equiv \nabla\cdot\nabla$ является инвариантным скалярным оператором $g^{ik}\frac{D}{\partial x^i}\frac{D}{\partial x^k} \equiv g^{ik}\nabla_i\nabla_k$. В частности, лапласиан $\nabla^2\alpha$ (абсолютного) скаляра α имеет вид

$$g^{ik}\frac{D}{\partial x^i}\frac{\partial\alpha}{\partial x^k} \equiv g^{ik}\nabla_i\frac{\partial\alpha}{\partial x^k} \equiv g^{ik}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^i\,\partial x^k} - \Gamma^j_{ik}\frac{\partial\alpha}{\partial x^j}\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ik}\sqrt{|g|}\frac{\partial\alpha}{\partial x^k}\right).$$

(d) *Если (абсолютный) вектор* $\mathbf{a}$ *задан компонентами* a_i, *то антисимметричный (абсолютный) тензор с компонентами*

$$c_{ij} \equiv \frac{Da_i}{\partial x^j} - \frac{Da_j}{\partial x^i} \equiv \nabla_j a_i - \nabla_i a_j \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j}{\partial x^i}$$

тождественно обращается в нуль в том и только в том случае, если $\mathbf{a}$ *является градиентом (абсолютного) скаляра.*

Замечание. При $n = 3$ можно определить **ротор** (абсолютного) вектора $\mathbf{a}$ как (абсолютный) вектор $\nabla\times\mathbf{a}$ с компонентами

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{Da_j}{\partial x^i}e^{ijk} \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}}\nabla_i a_j e^{ijk} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\left(\frac{Da_j}{\partial x^i} - \frac{Da_i}{\partial x^j}\right)e^{ijk} \equiv \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\right)e^{ijk}$$

(см. также п. 16.8-4). К (абсолютным) векторам трехмерного риманова пространства могут применяться формулы табл. 5.5-1 и уравнения (5.5-19).

Если компоненты тензора A зависят от t не только через координаты $x^1, x^2, \ldots, x^n$ но и явно, то

$$\frac{d\mathsf{A}}{dt} = \frac{\partial\mathsf{A}}{\partial t} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)\mathsf{A},$$

$$\frac{DA^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}}{dt} = \frac{\partial A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}}{\partial t} + A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s,\, j}\frac{dx^j}{dt}. \qquad (16.10\text{-}30)$$

Производной по направлению $d\mathsf{A}/ds$ тензора A в направлении данной кривой ($ds \neq 0$, п. 17.4-2) называется абсолютная производная тензора A по длине дуги s вдоль кривой.

16.10-9. Тензоры, постоянные вдоль кривой. Уравнения параллелизма. Тензор **A** является по определению **постоянным** вдоль регулярной кривой (28) (т. е. его «значения» в соседних точках кривой «равны»), если его абсолютная производная (30) $\left(\text{и, следовательно, также его абсолютный дифференциал } d\mathbf{A}=\frac{d\mathbf{A}}{ds}ds\right)$ вдоль кривой равны нулю. *Суммы и произведения таких тензоров также постоянны вдоль рассматриваемой кривой*, так что, например, модули постоянных векторов и углы между ними постоянны. Каждый вектор **a**, компоненты которого $a^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $a_i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$Da^i=0 \quad \text{или} \quad Da_i=0 \quad (\textit{уравнения параллелизма}) \qquad (16.10\text{-}31)$$

при условии, что дифференциалы координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ определяют смещение вдоль кривой (28), подвергается «параллельному переносу» вдоль кривой.

Замечание. Вектор, полученный в результате «параллельного переноса» данного вектора **a** вдоль замкнутой кривой, не совпадает, вообще говоря, с этим вектором по возвращении в исходную точку (см. также п. 17.4-6).

16.10-10. Интегрирование тензорных величин. Элемент объема. Интегралы от тензорных величин вдоль кривых в римановом пространстве могут быть определены при помощи скалярных интегралов по параметру так же, как это сделано для векторов в пп. 5.4-5 и 6.2-3, a.

Элемент объема dV определяется (см. также пп. 6.2-3, b и 6.4-3, c) следующим выражением:

$$dV=\sqrt{|g|}\,dx^1\,dx^2\ldots dx^n. \qquad (16.10\text{-}32)$$

⚹Если в выражении для dV опустить множитель $\sqrt{|g|}$, то элемент объема оказывается псевдоскаляром веса −1, т. е. скалярной емкостью (п. 16.2-1); так как $\sqrt{|g|}$ — скалярная плотность, то (16.10-32) определяет dV как инвариант.⚹

Интегралы по объему от скалярных инвариантов являются скалярными инвариантами, но интегралы по объему от тензоров ранга $R>0$ не являются, вообще говоря, тензорами. Элемент объема может быть определен также для подпространства; он является аналогом элемента площади в трехмерном пространстве. Существуют обобщения интегральных теорем, приведенных в пп. 5.6-1 и 5.6-2 (см. п. 16.10-11).

16.10-11. Дифференциальные инварианты тензоров ранга 2; интегральные теоремы (см. также п. 16.9-1). **Дивергенцией тензора A ранга** 2 (с дифференцируемыми компонентами), определенного в римановом пространстве, называется вектор $\nabla\cdot\mathbf{A}$; оператор ∇ (п. 16.10-7) действует как ковариантный вектор. Следует отметить соотношения

$$\nabla\cdot(\alpha\mathbf{A})=\alpha\nabla\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\nabla\alpha, \qquad (16.10\text{-}33)$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{A})=(\nabla\mathbf{a})\cdot\cdot\mathbf{A}+(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{A}})\cdot\mathbf{a}, \quad \nabla\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{a})=(\nabla\mathbf{a})\cdot\cdot\tilde{\mathbf{A}}+(\nabla\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{a}, \qquad (16.10\text{-}34)$$

где тензор $\tilde{\mathbf{A}}$ получен *транспонированием* **A** $\left(\tilde{A}^i_k=A^k_i\right)$. Тензор $\nabla\mathbf{a}$ называется градиентом **a** (табл. 16.10-1).

Для функций, кривых и поверхностей, удовлетворяющих известным условиям, имеют место *интегральные теоремы*, аналогичные теоремам пп. 5.6-1 и 5.6-2:

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV=\int_S d\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}, \qquad (16.10\text{-}35)$$

$$\int_V \nabla\mathbf{a}\,dV=\int_S d\mathbf{A}\mathbf{a}; \quad \int_V(\nabla\times\mathbf{A})\,dV=\int_S(d\mathbf{A}\times\mathbf{A}), \qquad (16.10\text{-}36)$$

$$\int_V \nabla\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{a})\,dV=\int_S d\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}), \qquad (16.10\text{-}37)$$

$$\int_S d\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=\int_C d\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}. \qquad (16.10\text{-}38)$$

ГЛАВА 17

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

17.1. КРИВЫЕ НА ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

17.1-1. Касательная к плоской кривой. Пусть кривая C задана (п. 2.1-9) уравнениями

$$x=x(t), \qquad y=y(t) \tag{17.1-1a}$$

или

$$\varphi(x, y)=0, \tag{17.1-1b}$$

или

$$y=f(x). \tag{17.1-1c}$$

Касательной *к кривой C в ее точке $P_1(x_1, y_1) \equiv P_1[x(t_1), y(t_1)]$ называется прямая, являющаяся предельным положением секущей, проходящей через P_1 и через отличную от нее точку P_2 этой кривой при стремлении P_2 к P_1.*

Кривая (1) имеет единственную касательную с уравнениями

$$x=\left(\frac{dx}{dt}\right)_1(t-t_1)+x_1, \qquad y=\left(\frac{dy}{dt}\right)_1(t-t_1)+y_1, \tag{17.1-2a}$$

или

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_1(x-x_1)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_1(y-y_1)=0, \tag{17.1-2b}$$

или

$$y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_1(x-x_1) \tag{17.1-2c}$$

в каждой **регулярной** точке (x_1, y_1) кривой; регулярная точка характеризуется либо тем, что a) при некотором выборе параметра функции $x(t)$, $y(t)$ будут иметь в достаточной близости от t_1 непрерывные производные первого порядка, не равные одновременно нулю, либо тем, что b) для некоторого уравнения $\varphi(x, y)=0$ кривой C функция $\varphi(x, y)$ имеет в достаточно малой окрестности точки (x_1, y_1) непрерывные частные производные первого порядка, из которых по меньшей мере одна отлична от нуля Из b) всегда следует a); условия a) и b) эквивалентны, если (x_1, y_1) не является кратной точкой кривой C, что заведомо имеет место для той дуги кривой, на которой хотя бы одна из производных $x'(t)$, $y'(t)$ сохраняет знак.

Угловой коэффициент касательной (2) равен

$$\operatorname{tg}\theta=\left(\frac{dy}{dx}\right)_1=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_1\Big/\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_1=\left(\frac{dy}{dt}\right)_1\Big/\left(\frac{dx}{dt}\right)_1. \tag{17.1-3}$$

17.1-2. Нормаль к плоской кривой. Нормалью к кривой (1) в регулярной точке $P_1(x_1, y_1)$ называется прямая, проходящая через P_1 и перпендикулярная к касательной в точке P_1:

$$y-y_1=-\frac{1}{(dy/dx)_1}(x-x_1). \tag{17.1-4}$$

Положительное направление нормали может быть тем или иным способом согласовано с положительным направлением касательной; последнее совпадает с положительным направлением кривой. Положительное направление кривой определяется некоторым дополнительным условием (возрастание t, возрастание x и т. д.; см. также п. 2.2-1).

17.1-3. *Особые точки. *Всякая точка кривой, не являющаяся регулярной, называется* **особой**. Пусть кривая (1*b*) обладает тем свойством, что все производные от $\varphi(x, y)$ до $(n-1)$-го порядка включительно равны нулю в точке $P_1(x_1, y_1)$, в то время как производные n-го порядка непрерывны в некоторой окрестности (x_1, y_1) и не равны одновременно нулю в этой точке. Тогда кривая имеет n касательных в P_1; некоторые из них могут совпадать или оказаться мнимыми (последних будет четное число). Так, если все производные первого порядка от $\varphi(x, y)$ равны нулю в точке $P_1(x_1, y_1)$, а производные второго порядка не все равны нулю, то угловые коэффициенты dy/dx двух касательных в точке P_1 являются корнями квадратного уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0 \qquad (x=x_1,\ y=y_1). \qquad (17.1\text{-}5)$$

Корни уравнения (5) и, следовательно, две касательные, могут быть действительными и различными (*двойная точка, узел*), совпадающими (*точка возврата* либо *точка самоприкосновения*) или мнимыми (*изолированная точка*); во всех этих случаях точка (x_1, y_1) является особой.

Свойства кривой в особой точке могут быть описаны также в терминах производных от $x(t)$ и $y(t)$.

17.1-4. Кривизна плоской кривой. Соприкасающейся окружностью (кругом кривизны) плоской кривой C в ее точке P_1 называется предельное положение окружности, проходящей через P_1 и две соседние точки кривой P_2 и P_3, при стремлении P_2 и P_3 к P_1.

Центр этой окружности (**центр кривизны** кривой C, соответствующий точке P_1) лежит на нормали к C, проведенной в точке P_1. Координаты центра кривизны равны

$$\left.\begin{aligned} x_k&=x_1-\left(\frac{dy}{dx}\right)_1\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2\right]\Big/\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1=x_1-\frac{\dot y(\dot x^2+\dot y^2)}{\dot x\ddot y-\dot y\ddot x},\\ y_k&=y_1+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2\right]\Big/\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1=y_1+\frac{\dot x(\dot x^2+\dot y^2)}{\dot x\ddot y-\dot y\ddot x};\end{aligned}\right\} \qquad (17.1\text{-}6)$$

все производные вычисляются при $x=x_1\ (t=t_1)$; точками обозначено дифференцирование по t. Радиус ρ_k круга кривизны (**радиус кривизны** кривой C в точке P_1) равен обратной величине **кривизны** k кривой C в точке P_1; кривизну можно определить как предел отношения угла поворота касательной к длине соответствующей дуги Δs кривой C при стремлении Δs к нулю:

$$k=\frac{1}{\rho_k}=\frac{d\theta}{ds}=\frac{d^2y}{dx^2}\Big/\left[\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]^3=\frac{\dot x\ddot y-\dot y\ddot x}{\sqrt{(\dot x^2+\dot y^2)^3}}; \qquad (17.1\text{-}7)$$

все производные подсчитываются при $x=x_1\ (t=t_1)$[1]. Данная кривая C является соответственно *вогнутой* или *выпуклой* в положительном направлении оси Oy в зависимости от того, будет ли производная d^2y/dx^2 и, следовательно, кривизна k положительной или отрицательной. Многие авторы называют кривизной, как это и сделано в п. 17.2-3, не k, а $|k|$.

В полярных координатах ρ, φ (п. 2.1-8) дифференциал длины дуги ds и угол μ между касательной к кривой $\rho=\rho(\varphi)$ и полярным радиусом-вектором определяется формулами

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2\,d\varphi^2, \qquad \operatorname{tg}\mu=\rho\Big/\frac{d\rho}{d\varphi}, \qquad (17.1\text{-}8)$$

откуда следует, что

$$k=\frac{1}{\rho_k}=\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{d\varphi}{ds}+\frac{d\mu}{ds}=\frac{\rho^2+2\left(\dfrac{d\rho}{d\varphi}\right)^2-\rho\dfrac{d^2\rho}{d\varphi^2}}{\left[\sqrt{\rho^2+\left(\dfrac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\right]^3}. \qquad (17.1\text{-}9)$$

---

[1]) Правые части формул (6) и (7) можно выразить через частные производные от левой части уравнения кривой $\varphi(x, y)=0$ при помощи формул (4.5-16).

17.1-5. Порядок касания плоских кривых. Говорят, что кривые $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют в точке $P_1(x_1, y_1)$ **касание n-го порядка**, если

$$f(x_1)=g(x_1), \quad f'(x_1)=g'(x_1), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x_1)=g^{(n)}(x_1), \quad f^{(n+1)}(x_1)\neq g^{(n+1)}(x_1); \tag{17.1-10}$$

это определение предполагает, что $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_1 производные до $(n+1)$-го порядка включительно.

При соблюдении условий (10) разность $f(x+\Delta x)-g(x+\Delta x)$ является бесконечно малой $(n+1)$-го порядка относительно Δx.

В точке касания касательные к кривым совпадают.

Одна из кривых лежит по разные стороны от другой в достаточной близости от точки касания, т. е. кривые пересекаются в этой точке в том и только в том случае, если n четно. Точка, в которой кривая и касательная к ней имеют касание второго порядка (или любого *четного* порядка), называется **точкой перегиба.** В точке перегиба кривая пересекает свою касательную. Кривизна в точке перегиба равна нулю.

17.1-6. Асимптоты. Прямую линию называют **асимптотой** данной кривой C, если расстояние от точки $P(x, y)$ кривой до прямой стремится к нулю при $x^2+y^2\to\infty$; говорят также, что кривая C **асимптотически приближается** к этой прямой. Предельное положение касательной к регулярной кривой есть асимптота; обратное утверждение неверно.

*Если кривая задана уравнением $y=f(x)$ и пределы

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$$

существуют, то прямая $y=ax+b$ является асимптотой кривой.*

17.1-7. Огибающая семейства плоских кривых. Огибающей однопараметрического семейства кривых

$$\varphi(x, y, \lambda)=0 \tag{17.1-11}$$

называется кривая, касающаяся в каждой своей точке одной из кривых семейства. Иногда к огибающей относят также точки, которые принадлежат одновременно всем кривым семейства. В дальнейшем имеется в виду именно это последнее определение. Уравнение огибающей можно получить, если исключить параметр λ из уравнений (11) и уравнения

$$\frac{\partial\varphi(x, y, \lambda)}{\partial\lambda}\equiv\varphi_\lambda(x, y, \lambda)=0; \tag{17.1-12}$$

такое исключение параметра возможно и заведомо приводит к огибающей, если в рассматриваемой области значений x, y и λ выполняются условия

$$\frac{\partial(\varphi, \varphi_\lambda)}{\partial(x, y)}\neq 0, \qquad \varphi_{\lambda\lambda}\neq 0. \tag{17.1-13}$$

В общем случае уравнения (11) и (12) определяют **λ-дискриминантную кривую,** т. е. *геометрическое место точек, в которых пересекаются бесконечно близкие кривые семейства* (предельное положение точек пересечения кривых $\varphi(x, y, \lambda_1)=0$ и $\varphi(x, y, \lambda_2)=0$ при $\lambda_2\to\lambda_1$). Наряду с огибающей λ-дискриминантная кривая содержит и особые точки кривых, принадлежащих семейству.

17.1-8. Изогональные траектории. Семейство кривых, пересекающих все кривые однопараметрического семейства $\varphi(x, y, \lambda)=0$ под данным углом γ, определяется дифференциальным уравнением

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\gamma-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\sin\gamma\right)dx+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\sin\gamma+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\gamma\right)dy=0; \tag{17.1-14}$$

при $\gamma=\pi/2$ уравнение (14) определяет **ортогональные траектории.**

17.2. КРИВЫЕ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

17.2-1. Вводные замечания (см. также п. 3.1-13). В пп. 17.2-1—17.2-6 рассматриваются геометрические свойства кривой C, определяемой уравнениями

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)\\ \text{или}\\ x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\end{array}\right\}\quad (t_1\leqslant t\leqslant t_2)\qquad (17.2\text{-}1)$$

(t_1 и t_2 могут равняться соответственно $-\infty$ и $+\infty$). Функции (1) имеют непрерывные производные по t, и $d\mathbf{r}/dt\neq 0$ для всех значений t из промежутка $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, т. е. C — *регулярная дуга*. В случае необходимости будет предполагаться существование производных более высокого порядка.

Удобно принять за новый параметр *длину дуги*

$$s\equiv\int_C ds\equiv\int_C\sqrt{d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}}=\int_C\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$$

(п. 5.5-4); знак ds выбирается произвольно и определяет *положительное направление* на кривой и касательной (см. также пп. 17.2-2 и 17.2-3). Производные по s будут обозначаться штрихами, так что, например,

$$x'\equiv x'_s\equiv\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{dt}\Big/\frac{ds}{dt}.$$

Уравнения кривых в криволинейных координатах (гл. 6) кратко рассмотрены в п. 17.4-1.

17.2-2. Подвижной трехгранник (см. также пп. 17.2-3 и 17.2-4).

(a) **Касательная к кривой. Касательной** к кривой C в точке $P_1(\mathbf{r}_1)\equiv\equiv P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ называется прямая, являющаяся предельным положением секущей, проходящей через P_1 и отличную от нее точку P_2 кривой при стремлении P_2 к P_1. Кривая (1) имеет единственную касательную в каждой точке, в которой существует $d\mathbf{r}/dt\neq 0$. Положительное направление касательной соответствует положительному направлению на кривой.

(b) **Соприкасающаяся плоскость и соприкасающаяся окружность. Главная нормаль. Соприкасающейся окружностью** или **кругом кривизны** кривой C в точке P_1 называется предельное положение окружности, проходящей через P_1 и две соседние точки P_2 и P_3 кривой при стремлении P_2 и P_3 к P_1. Плоскость этой окружности называется **соприкасающейся плоскостью** кривой C в точке P_1; она содержит касательную к C в точке P_1. Направленная прямая, идущая из точки P_1 в центр соприкасающейся окружности, называется **главной нормалью** кривой C в точке P_1; главная нормаль перпендикулярна к касательной.

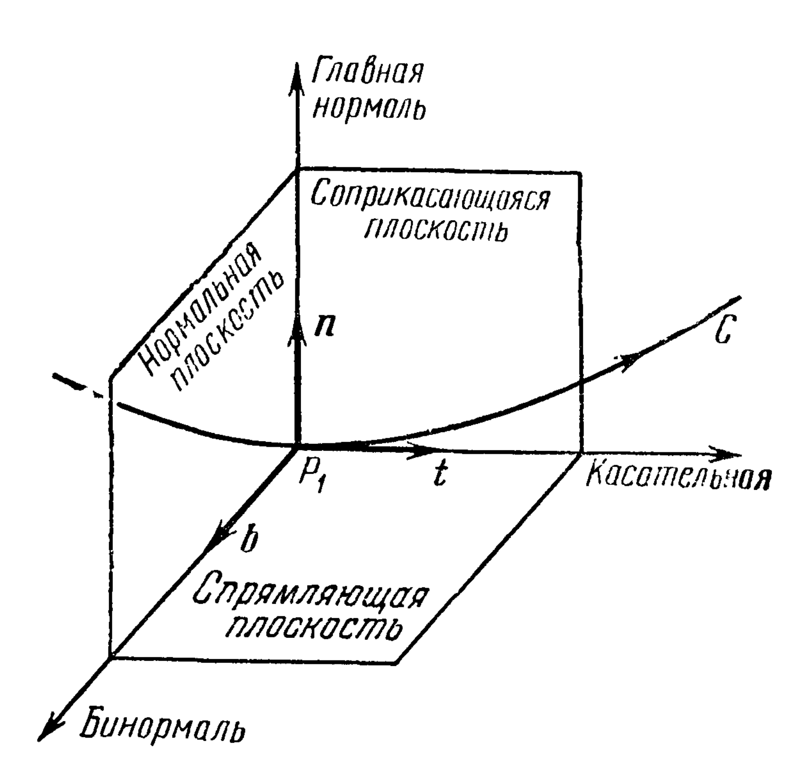


Рис. 17.2-1. Подвижный трехгранник, связанный с пространственной кривой C.

(c) **Бинормаль. Нормальная и спрямляющая плоскость. Бинормалью** кривой C в точке P_1 называется направленная прямая, проходящая через точку P_1 и *образующая вместе с положительной касательной и главной нормалью правую систему* декартовых прямоугольных осей (п. 3.1-3). Плоскости, определяемые осями этого «подвижного трехгранника», называются: **нормальной** (плоскость, перпендикулярная к касательной), **спрямляющей** (плоскость, перпендикулярная к главной нормали), **соприкасающейся** (плоскость, перпендикулярная к бинормали) (см. рис. 17.2-1).

(d) Единичные векторы **t**, **n** и **b**, направленные, соответственно вдоль положительной касательной, главной нормали и бинормали, следующим образом выражаются через производные от функции $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ по s; здесь и далее производные по s обозначаются штрихами:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{t}=\mathbf{r}' && (\textit{единичный вектор касательной}),\\ &\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|}=\frac{1}{k}\mathbf{r}'' && (\textit{единичный вектор главной нормали}),\\ &\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n} && (\textit{единичный вектор бинормали}). \end{aligned}\right\} \qquad (17.2\text{-}2)$$

Вектор $k\mathbf{n}=\mathbf{r}''$ называется **вектором кривизны**; через k обозначена кривизна, рассмотренная в п. 17.2-3.

17.2-3. Формулы Френе — Серре. Кривизна и кручение пространственной кривой (см. также пп. 17.2-4 и 17.2-5).

(a) Единичные векторы (2) удовлетворяют в каждой точке кривой соотношениям

$$\mathbf{t}'=k\mathbf{n}, \quad \mathbf{n}'=-k\mathbf{t}+\tau\mathbf{b}, \quad \mathbf{b}'=-\tau\mathbf{n} \ (\textit{формулы Френе — Серре}),$$

где

$$k=\frac{1}{\rho_k}=|\mathbf{t}'|=|\mathbf{r}''|, \qquad \tau=\frac{1}{\rho_\tau}=\frac{1}{k^2}[\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''']. \qquad (17.2\text{-}3)$$

При возрастании s точка P_1 движется по кривой C; при этом:

1. Касательная вращается вокруг мгновенного положения бинормали с положительной угловой скоростью k (**кривизна** кривой C в точке P_1).

2. Бинормаль вращается вокруг мгновенного положения касательной с угловой скоростью τ (**кручение** кривой C в точке P_1); τ положительно, если вид кривой напоминает правую винтовую нарезку.

3. Трехгранник вращается как твердое тело вокруг мгновенной оси, направление которой определяется **вектором Дарбу** $\boldsymbol{\Omega}=\tau\mathbf{t}+k\mathbf{b}$, с угловой скоростью (положительной), равной $|\boldsymbol{\Omega}|=\sqrt{\tau^2+k^2}$ (**полная кривизна** кривой C в точке P_1).

Механический смысл производных от базисных векторов трехгранника Френе становится более очевидным, если переписать формулы Френе в виде

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{t}'=\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{t}=(k\mathbf{b})\times\mathbf{t}, \quad \mathbf{n}'=\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{n},\\ &\mathbf{b}'=\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{b}=(\tau\mathbf{t})\times\mathbf{b}; \end{aligned}\right\} \qquad (17.2\text{-}4)$$

$\rho_k=1/k$ есть **радиус кривизны** кривой C в точке P_1 (радиус соприкасающейся окружности); $\rho_\tau=1/\tau$ называется **радиусом кручения**.

(b) Скалярные функции $k=k(s)$ и $\tau=\tau(s)$ определяют кривую с точностью до положения в пространстве (*естественные уравнения* кривой). C является *плоской кривой* в том и только в том случае, если ее кручение тождественно равно нулю; аналогично C — прямая линия, если ее кривизна тождественно равна нулю, и только в этом случае.

(c) При произвольном выборе параметра t

$$k=\frac{1}{\rho_k}=\frac{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}, \quad \tau=\frac{1}{\rho_\tau}=\frac{[\dot{\mathbf{r}}\,\ddot{\mathbf{r}}\,\dddot{\mathbf{r}}]}{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|^2}; \qquad (17.2\text{-}5)$$

точками обозначено дифференцирование по t. Полезно отметить, что

$$\ddot{\mathbf{r}}=\ddot{s}\,\mathbf{t}+\frac{1}{\rho_k}\dot{s}^2\mathbf{n}=\ddot{s}\,\mathbf{t}+\left(\frac{\dot{s}}{\rho_k}\mathbf{b}\right)\times\dot{\mathbf{r}} \qquad (17.2\text{-}6)$$

(*разложение ускорения движущейся точки на тангенциальную и нормальную составляющие*; см. также п. 5.3-2).

17.2-4. Уравнения касательной, нормали и бинормали; уравнения соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей.

(a) Касательная, главная нормаль и бинормаль кривой C в точке $P_1(\mathbf{r}_1) \equiv P_1(x_1, y_1, z_1)$ определяются соответственно следующими векторными уравнениями:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{t}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{n}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{b}, \tag{17.2-7}$$

где u — переменный параметр.

Векторные уравнения соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей имеют соответственно следующий вид:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{b} = 0, \qquad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{t} = 0, \qquad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{n} = 0. \tag{17.2-8}$$

(b) Координаты единичных векторов (2) относительно правой декартовой прямоугольной системы координат равны:

$$t_x = x', \quad t_y = y', \quad t_z = z' \text{ (направляющие косинусы касательной)}, \tag{17.2-9a}$$

$$n_x = \frac{1}{k}x'', \quad n_y = \frac{1}{k}y'', \quad n_z = \frac{1}{k}z'' \text{ (направляющие косинусы главной нормали)}, \tag{17.2-9b}$$

$$b_x = \frac{1}{k}(y'z'' - y''z'), \quad b_y = \frac{1}{k}(z'x'' - z''x'), \quad b_z = \frac{1}{k}(x'y'' - x''y') \tag{17.2-9c}$$

(*направляющие косинусы бинормали*).

Кривизна и кручение выражаются формулами

$$k = \frac{1}{\rho_k} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}, \qquad \tau = \frac{1}{\rho_\tau} = \frac{1}{k^2}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}. \tag{17.2-10}$$

Подстановка направляющих косинусов (9) в

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha_x} = \frac{y - y_1}{\cos\alpha_y} = \frac{z - z_1}{\cos\alpha_z} \tag{17.2-11}$$

приводит к уравнениям касательной, нормали и бинормали в декартовых прямоугольных координатах; уравнение

$$(x - x_1)\cos\alpha_x + (y - y_1)\cos\alpha_y + (z - z_1)\cos\alpha_z = 0 \tag{17.2-12}$$

определяет соприкасающуюся, нормальную, спрямляющую плоскости.

17.2-5. Дополнительные замечания.

(a) Центр кривизны кривой C, связанный с ее точкой P_1, определяется радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_1 + \rho_k\mathbf{n}. \tag{17.2-13}$$

(b) Предельное положение сферы, проходящей через четыре различные точки P_1, P_2, P_3 и P_4 кривой, при стремлении P_2, P_3 и P_4 к P_1 называется **соприкасающейся сферой** кривой в точке P_1. Ее центр лежит на прямой, проходящей через центр кривизны и имеющей направление бинормали. Радиус-вектор $\mathbf{r}_Q$ центра соприкасающейся сферы и ее радиус ρ_Q таковы:

$$\rho_Q = \sqrt{\rho_k^2 + (\rho_\tau\rho_k')^2}, \quad \mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_k + \rho_\tau\rho_k'\mathbf{b} = \mathbf{r}_1 + \rho_k\mathbf{n} + \rho_\tau\rho_k'\mathbf{b}. \tag{17.2-14}$$

Кривая C лежит на сфере радиуса R, если $\rho_Q \equiv R$ (необходимое и достаточное условие).

Полярными прямыми кривой C называются касательные к ее **полярной кривой**; последняя определяется как геометрическое место центров соприкасающихся сфер кривой C. **Полярная поверхность** кривой C есть линейчатая поверхность (п. 3.1-15), образованная касательными к полярной кривой.

(c) Эвольвенты и эволюты. Касательная к кривой C описывает линейчатую поверхность, состоящую из двух полостей, касающихся вдоль данной кривой. **Эвольвентами** (развертками) кривой называются кривые, лежащие на этой поверхности и ортогональные ее образующим, т. е. касательным к кривой C. Если известно уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ кривой C, то уравнения эвольвент имеют вид

$$\rho = \rho(s) = \mathbf{r}(s) + (d - s)\,\mathbf{t}(s). \tag{17.2-15}$$

Каждой эвольвенте соответствует свое значение d, представляющее собой постоянную сумму длины дуги s и отрезка касательной $P_C P_I$ от точки P_C кривой C до точки P_I эволюты. Кривая C' называется эволютой кривой C, если касательные к C' являются нормалями к C, т. е. если C есть эвольвента кривой C'. Эволюты кривой C лежат на ее полярной поверхности.

17.2-6. Порядок касания (см. также п. 17.1-5). Пусть кривые $\mathbf{r}=\mathbf{f}(s)$ и $\mathbf{r}=\mathbf{g}(s)$ проходят через точку $P_1(\mathbf{r}_1)$, где $\mathbf{r}_1=\mathbf{f}(s_1)=\mathbf{g}(s_1)$. Если расстояние между точками этих кривых $|\mathbf{f}(s_1+\Delta s)-\mathbf{g}(s_1+\Delta s)|$ является бесконечно малой $(n+1)$-го порядка относительно Δs, то говорят, что кривые имеют **касание** n-го порядка в точке P_1.

Необходимым и достаточным условием того, что регулярные кривые $\mathbf{r}=\mathbf{f}(s)$ и $\mathbf{r}=\mathbf{g}(s)$ имеют касание n-го порядка в точке $P_1(x_1, y_1, z_1)\equiv P_1(\mathbf{r}_1)$, являются соотношения

$$\mathbf{f}(s_1)=\mathbf{g}(s_1)=\mathbf{r}_1,\quad \mathbf{f}'(s_1)=\mathbf{g}'(s_1),\ \ldots,\ \mathbf{f}^{(n)}(s_1)=\mathbf{g}^{(n)}(s_1),\quad \mathbf{f}^{(n+1)}(s_1)\neq\mathbf{g}^{(n+1)}(s_1), \tag{17.2-16}$$

которые должны выполняться при подходящем выборе начала отсчета и направления на каждой из кривых.

Для кривой, заданной уравнениями $z=z(x)$, $y=y(x)$, условия касания n-го порядка принимают вид, аналогичный (17.1-10).

17.3. ПОВЕРХНОСТИ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

17.3-1. Вводные замечания (см. также п. 3.1-14, примеры см. в п. 3.5-10). В пп. 17.3-1 — 17.3-14 рассматривается геометрия регулярного куска поверхности S, определяемого векторным уравнением

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v), \tag{17.3-1a}$$

или уравнениями

$$x=x(u, v),\quad y=y(u, v),\quad z=z(u, v), \tag{17.3-1b}$$

или

$$\varphi(x, y, z)=0, \tag{17.3-1c}$$

для некоторой области изменения параметров **(криволинейных координат на поверхности)** u, v (п. 3.1-14). Предполагается, что функции (1) имеют непрерывные частные производные первого порядка, и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{17.3-2}$$

равен 2 (п. 13.2-7), т. е. три функциональных определителя $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ $\partial(y, z)/\partial(u, v)$, $\partial(z, x)/\partial(u, v)$ не обращаются в нуль одновременно, или

$$\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\neq 0\qquad \left(\mathbf{r}_u\equiv\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u},\ \mathbf{r}_v\equiv\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right). \tag{17.3-3}$$

В случае необходимости предполагается существование производных более высокого порядка.

Условия, перечисленные выше, обеспечивают существование и линейную независимость векторов $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$, направленных соответственно по касательным к **координатным линиям** $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$ **на поверхности**, проходящим через точку (u, v). Точки поверхности, в которых три определителя существуют, но обращаются в нуль при любом выборе параметров u, v, называются *особыми точками*; им соответствуют ребра, вершины и т. д.

17.3-2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

(a) В каждой точке поверхности $P_1(\mathbf{r}_1)\equiv P_1(x_1\ y_1, z_1)\equiv(u_1, v_1)$, удовлетворяющей условиям п. 17.3-1 (*регулярная точка* поверхности), существует единственная **касательная плоскость**, которая определяется как предельное положение плоскости, проходящей через три различные точки поверхности P_1, P_2, P_3 при стремлении P_2 и P_3 к P_1; при этом P_2 и P_3 перемещаются вдоль кривых, имеющих различные касательные в точке P_1. Эта плоскость содержит

касательные ко всем регулярным кривым поверхности, проходящим через P_1. Касательная плоскость определяется уравнением

$$[\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_v]=0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}=0, \tag{17.3-4}$$

где все производные берутся при $u=u_1$, $v=v_1$.

(b) **Нормалью** к поверхности S в ее регулярной точке P_1 называется прямая, проходящая через P_1 и перпендикулярная к касательной плоскости в этой точке. Уравнение нормали имеет вид

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=t\mathbf{N}, \tag{17.3-5}$$

где

$$\mathbf{N}=\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}=\frac{\frac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)}\mathbf{i}+\frac{\partial(z,\ x)}{\partial(u,\ v)}\mathbf{j}+\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\mathbf{k}}{\sqrt{\left[\frac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(z,\ x)}{\partial(u,\ v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right]^2}} \tag{17.3-6}$$

есть **единичный вектор нормали** к поверхности S в точке P_1; все производные берутся при $u=u_1$, $v=v_1$. Направление вектора $\mathbf{N}$ называется **направлением положительной нормали** в точке P_1; положительное направление линии u (направление вектора $\mathbf{r}_u$), положительное направление линии v (направление вектора $\mathbf{r}_v$) и положительная нормаль образуют правую систему осей (п. 3.1-3).

17.3-3. Первая основная квадратичная форма поверхности. Дифференциал длины дуги и элемент площади.

(a) Дифференциал радиуса-вектора $\mathbf{r}$ вдоль кривой

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}[u(t),\ v(t)] \quad \text{или} \quad u=u(t),\ v=v(t), \tag{17.3-7}$$

лежащей на поверхности S, имеет вид

$$d\mathbf{r}=\mathbf{r}_u\,du+\mathbf{r}_v\,dv \tag{17.3-8}$$

и, следовательно, **квадрат дифференциала длины дуги** $ds=|d\mathbf{r}|$ на поверхности (1) в точке $(u,\ v)$ равен

$$\left.\begin{aligned} &ds^2=|d\mathbf{r}|^2=E(u,\ v)\,du^2+2F(u,\ v)\,du\,dv+G(u,\ v)\,dv^2 \\ &\quad(\textit{первая основная квадратичная форма поверхности}), \\ &E(u,\ v)=\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ &F(u,\ v)=\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ &G(u,\ v)=\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{17.3-9}$$

где

В каждой регулярной точке поверхности (1), отнесенной к (действительным) координатам u, v, квадратичная форма (9) является положительно определенной (п. 13.5-2), т. е.

$$E>0, \quad G>0, \quad EG-F^2>0. \tag{17.3-10}$$

(b) Угол γ между двумя регулярными кривыми на поверхности:

$$\mathbf{r}=\mathbf{R}_1(t) \quad \text{или} \quad u=U_1(t), \quad v=V_1(t)$$

$$\mathbf{r}=\mathbf{R}_2(t) \quad \text{или} \quad u=U_2(t), \quad v=V_2(t),$$

проходящими через точку (u, v), определяется формулой

$$\cos\gamma = \frac{d\mathbf{R}_1 \cdot d\mathbf{R}_2}{|d\mathbf{R}_1|\,|d\mathbf{R}_2|} = \frac{E\,dU_1\,dU_2 + F\,(dU_1\,dV_2 + dU_2\,dV_1) + G\,dV_1\,dV_2}{\sqrt{E\,dU_1^2 + 2F\,dU_1\,dV_1 + G\,dV_1^2}\,\sqrt{E\,dU_2^2 + 2F\,dU_2\,dV_2 + G\,dV_2^2}} =$$

$$= E\,\frac{dU_1}{ds}\,\frac{dU_2}{ds} + F\left(\frac{dU_1}{ds}\,\frac{dV_2}{ds} + \frac{dU_2}{ds}\,\frac{dV_1}{ds}\right) + G\,\frac{dV_1}{ds}\,\frac{dV_2}{ds}. \qquad (17.3\text{-}11)$$

В частности, угол γ_1 между координатными линиями $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$, проходящими через точку (u, v), определяется формулами

$$\cos\gamma_1 = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad \sin\gamma_1 = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}. \qquad (17.3\text{-}12)$$

Условие ортогональности координатных линий u, v имеет вид $F \equiv 0$ (см. также пп. 6.4-1 и 16.8-2).

(c) **Векторный элемент площади** $d\mathbf{A}$ и **элемент площади** dA в регулярной точке поверхности (u, v) определяются выражениями

$$d\mathbf{A} = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,du\,dv = \mathbf{N}\,|d\mathbf{A}|,$$

$$dA = \pm\,|d\mathbf{A}| = \sqrt{a(u, v)}\,du\,dv,$$

где

$$a(u, v) = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = EG - F^2 = \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2. \quad (17.3\text{-}13)$$

Знак dA может быть выбран произвольно (см. также пп. 4.6-11, 5.2-7, 6.4-3, b).

17.3-4. Геодезическая и нормальная кривизна кривой на поверхности. Теорема Менье.

(a) В каждой точке (u, v) регулярной кривой C

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\,[u(s),\ v(s)] \quad \text{или} \quad u = u(s),\ v = v(s), \qquad (17.3\text{-}14)$$

лежащей на поверхности S, вектор кривизны $\mathbf{r}'' = k\mathbf{n}$ (п. 17.2-2, d) может быть единственным образом представлен в виде суммы двух векторов, один из которых (**вектор геодезической** или **тангенциальной кривизны**) лежит в касательной плоскости, а другой (**вектор нормальной кривизны**) направлен вдоль нормали к поверхности S, т. е.

$$\mathbf{r}'' = k\mathbf{n} = k_G\,(\mathbf{N} \times \mathbf{r}') + k_N\mathbf{N}; \qquad (17.3\text{-}15)$$

$\mathbf{N}$ — единичный вектор нормали к поверхности. В каждой точке $[u(s),\ v(s)]$ величина

$$k_G = [k\mathbf{r}'\mathbf{n}\mathbf{N}] = [\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{N}] \quad \text{(*геодезическая кривизна кривой C в точке (u, v)*)} \qquad (17.3\text{-}16)$$

является кривизной проекции кривой C на касательную плоскость (см. также п. 17.4-2, d) и

$$k_N = k\,(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}) = \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{N} = -\,\mathbf{r}' \cdot \mathbf{N}'$$

(*нормальная кривизна кривой C в точке (u, v)*) (17.3-17)

является кривизной **нормального сечения** (сечение поверхности плоскостью, содержащей нормаль к поверхности, плоскость которого проходит через касательную к C; см. также п. 17.3-5).

(b) Теорема Менье. *Кривизна k кривой, лежащей на поверхности, равна кривизне k_N нормального сечения, плоскость которого проходит через касательную к кривой в данной ее точке, деленной на косинус угла α между соприкасающейся плоскостью кривой в этой точке и плоскостью нормального сечения, т. е.*

$$k = \left|\frac{k_N}{\cos\alpha}\right|. \qquad (17.3\text{-}18)$$

Уравнение (18) выражает кривизну любого наклонного сечения через кривизну нормального сечения с той же касательной.

17.3-5. Вторая основная квадратичная форма. Главные кривизны, гауссова кривизна и средняя кривизна.

(a) Для того чтобы записать выражения для k_N (формула (17)) в криволинейных координатах u, v, рассматриваем $d\mathbf{N}=\mathbf{N}_u\,du+\mathbf{N}_v\,dv$ и вводим обозначения

$$-d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{N}=L(u, v)\,du^2+2M(u, v)\,du\,dv+N(u, v)\,dv^2$$

(*вторая основная квадратичная форма поверхности*),

где

$$L(u,\ v)=-\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{N}_u=\frac{[\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v]}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$M(u,\ v)=-\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{N}_v=-\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{N}_u=\frac{[\mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v]}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$N(u,\ v)=-\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{N}_v=\frac{[\mathbf{r}_{vv}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v]}{\sqrt{EG-F^2}}. \qquad (17.3\text{-}19)$$

Все производные берутся в точке (u, v); подробные выражения для смешанных произведений можно написать по формуле (5.2-11).

Кривизна нормального сечения в точке (u, v) поверхности S, плоскость которого проходит через бесконечно близкую точку этой поверхности $(u+du$, $v+dv)$, равна

$$k_N=-\frac{d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{N}}{ds^2}=L\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}. \qquad (17.3\text{-}20)$$

⁎ Из формулы (8), записанной в виде $d\mathbf{r}=du\left(\mathbf{r}_u+\frac{dv}{du}\mathbf{r}_v\right)$, следует, что отношение dv/du вполне определяет направление касательной к рассматриваемому нормальному сечению. ⁎

(b) Точка поверхности, в которой k_N имеет одно и то же значение для всех нормальных сечений $(L:M:N=E:F:G)$, называется **омбилической**. В каждой неомбилической точке (u, v) существует два нормальных сечения (**главные нормальные сечения**), которым соответствуют наибольшая величина k_1 и наименьшая величина k_2 кривизны k_N (**главные кривизны** поверхности S в точке (u, v)). *Плоскости главных нормальных сечений взаимно перпендикулярны; для любого нормального сечения в точке (u, v), плоскость которого образует угол θ с плоскостью первого главного нормального сечения,*

$$k_N=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta \quad (\textit{теорема Эйлера}). \qquad (17.3\text{-}21)$$

Величины k_1 и k_2 являются корнями характеристического уравнения *)

$$\begin{vmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{vmatrix}=0. \qquad (17.3\text{-}22)$$

*) Иначе говоря, k_1 и k_2 есть собственные числа обобщенной задачи о собственных значениях матрицы $A-kB$, где

$$A=\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

и матрица B положительно определена (п. 14.8-7).

Симметрические функции

$$H(u, v) \equiv \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad \text{и} \quad K(u, v) \equiv k_1 k_2$$

называются соответственно **средней** и **полной (гауссовой) кривизной** поверхности S в точке (u, v); они следующим образом выражаются через коэффициенты основных квадратичных форм:

$$H \equiv \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \equiv \frac{1}{2}\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \quad (\textit{средняя кривизна}), \qquad (17.3\text{-}23)$$

$$K \equiv k_1 k_2 \equiv \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (\textit{гауссова кривизна}) \qquad (17.3\text{-}24)$$

(см. также пп. 17.3-8 и 17.3-13). Значения функций k_1, k_2, H и K не зависят от выбора криволинейных координат.

В зависимости от того, будет ли квадратичная форма (19) определенной, полуопределенной или неопределенной (п. 13.5-2) в точке (u, v), эта последняя является

эллиптической точкой, в которой $K = k_1 k_2 > 0$ (нормальные сечения все выпуклы или все вогнуты; поверхность не пересекает касательную плоскость; пример: любая точка эллипсоида);

параболической точкой, в которой $K = k_1 k_2 = 0$ (например, любая точка цилиндра);

гиперболической точкой (седловой точкой), в которой $K = k_1 k_2 < 0$ (имеются как выпуклые, так и вогнутые нормальные сечения; поверхность пересекает касательную плоскость; пример: любая точка однополостного гиперболоида).

Омбилическая точка ($k_1 = k_2$, п. 17.3-5, b) необходимо является либо эллиптической, либо параболической.

17.3-6. Некоторые направления и кривые на поверхности. Минимальные поверхности.

(a) **Линией кривизны** на поверхности называется кривая, в каждой точке которой касательная принадлежит плоскости главного нормального сечения в этой точке. Через каждую неомбилическую точку (u, v) поверхности S проходят две линии кривизны $v = v(u)$, которые являются взаимно перпендикулярными; их дифференциальное уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \qquad (17.3\text{-}25)$$

(b) **Асимптотической линией** поверхности называется кривая, нормальная кривизна
(20) которой в каждой точке равна нулю; асимптотические линии определяются дифференциальным уравнением

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0. \qquad (17.3\text{-}26)$$

(Пример: любая прямая линия на поверхности.) Направления касательных к асимптотическим линиям называются **асимптотическими направлениями** поверхности.

* В эллиптической точке поверхности асимптотические направления являются мнимыми.

В гиперболической точке имеются два различных асимптотических направления. Линии кривизны делят пополам угол между ними.

В параболической точке имеется одно асимптотическое направление, которое совпадает с направлением касательной к главному нормальному сечению, имеющему нулевую кривизну. *

(c) Направления двух регулярных дуг поверхности

$$u = U_1(t), \quad v = V_1(t) \quad \text{и} \quad u = U_2(t) \quad v = V_2(t)$$

называются **сопряженными** в точке их пересечения (u, v), если касательная к одной из

этих дуг в точке (u, v) является предельным положением прямой, по которой касательная плоскость поверхности в точке (u, v) пересекается с касательной плоскостью поверхности в некоторой точке второй дуги при стремлении этой точки к (u, v). Условие сопряженности имеет вид

$$L\,dU_1\,dU_2 + M\,(dU_1\,dV_2 + dU_2\,dV_1) + N\,dV_1\,dV_2 = 0. \qquad (17.3\text{-}27)$$

(Пример: направления линий кривизны.)

Отношение сопряженности является взаимным.

(d) Координатные линии $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ являются
ортогональными, если $F \equiv 0$,
сопряженными, если $M \equiv 0$,
линиями кривизны, если $F \equiv 0$, $M \equiv 0$,
асимптотическими, если $L \equiv 0$, $N \equiv 0$.
Все приведенные условия необходимы и достаточны.

(e) ✳ **Минимальной поверхностью** называется поверхность, у которой $H(u, v) \equiv 0$, т. е. $k_2 = -k_1$ (формула (23)). *Это имеет место в том и только в том случае, когда асимптотические линии образуют ортогональную сеть.* ✳

Пусть дана поверхность в виде односвязной области, ограниченной замкнутым контуром. Если оставить неизменным контур и менять натянутую на него поверхность (как меняется упругая пленка), то *поверхность, имеющая наименьшую площадь, будет обязательно минимальной;* отыскание минимальной поверхности по заданному контуру называется *задачей Плато.*

Физическим аналогом минимальной поверхности может служить мыльная пленка, натянутая на изогнутый в пространстве проволочный контур.

17.3-7. Поверхности как римановы пространства. Трехиндексные символы Кристоффеля и параметры Бельтрами. Регулярный кусок поверхности S с первой основной квадратичной формой (9) является *двумерным римановым пространством*, отнесенным к координатам u, v, *метрический тензор* которого имеет компоненты: $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$ (пп. 16.7-1 и 17.4-1; см. также п. 17.3-12); $a(u, v) = EG - F^2$ есть *определитель метрического тензора* (п. 16.7-1). Если рассматривать поверхность как риманово пространство, то на ней можно определить векторы, тензоры, скалярное произведение и ковариантное дифференцирование (п. 16.2-1, 16.8-1 и 16.10-1). *Трехиндексные символы Кристоффеля второго рода* (п. 16.10-3) имеют для поверхности S следующий вид *):

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\begin{matrix}1\\1\;1\end{matrix}\right\}_S \equiv \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)}, &&\left\{\begin{matrix}2\\1\;1\end{matrix}\right\}_S \equiv \frac{-FE_u + 2EF_u - EE_v}{2(EG-F^2)},\\
&\left\{\begin{matrix}1\\1\;2\end{matrix}\right\}_S \equiv \left\{\begin{matrix}1\\2\;1\end{matrix}\right\}_S \equiv \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)}, &&\left\{\begin{matrix}2\\1\;2\end{matrix}\right\}_S \equiv \left\{\begin{matrix}2\\2\;1\end{matrix}\right\}_S \equiv \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)},\\
&\left\{\begin{matrix}1\\2\;2\end{matrix}\right\}_S \equiv \frac{-FG_v + 2GF_v - GG_u}{2(EG-F^2)}, &&\left\{\begin{matrix}2\\2\;2\end{matrix}\right\}_S \equiv \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG-F^2)};
\end{aligned}\right\} \qquad (17.3\text{-}28)$$

обозначение «S» использовано для того, чтобы отличить символы Кристоффеля поверхности от символов Кристоффеля $\left\{\begin{matrix}k\\i\;j\end{matrix}\right\}$ объемлющего пространства.

Для функций $\Phi(u, v)$, $\Psi(u, v)$, имеющих непрерывные частные производные нужного порядка, могут быть составлены дифференциальные инварианты

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla_S(\Phi, \Psi) \equiv \frac{E\Phi_v\Psi_v - F(\Phi_u\Psi_v + \Phi_v\Psi_u) + G\Phi_u\Psi_u}{EG-F^2}\\
&\text{(первый дифференциальный параметр Бельтрами)},\\
&\nabla_S^2(\Phi) \equiv \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{G\Phi_u - F\Phi_v}{\sqrt{EG-F^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{E\Phi_v - F\Phi_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right]\\
&\text{(второй дифференциальный параметр Бельтрами)},
\end{aligned}\right\} \qquad (17.3\text{-}29)$$

вполне аналогичные $\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi$ и $\nabla^2\Phi$, определенным в табл. 16.10-1. Так как двумерное риманово пространство «погружено» в трехмерное евклидово пространство, ковариантное дифференцирование на поверхности можно интерпретировать при помощи действительного сравнения векторов поверхности в соседних ее точках; однако при этом должно рассматриваться не приращение вектора, а его ортогональная проекция на касательную плоскость.

*) См. сноску на стр. 513.

17.3-8. Уравнения с частными производными, связывающие коэффициенты основных квадратичных форм. Theorema Egregium Гаусса.

(a) Изменение линейно независимых векторов $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, $\mathbf{N}$ («локальный базис») при смещении вдоль координатных линий поверхности описывается следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_{uu} &= \left\{ {1 \atop 1\ 1} \right\}_S \mathbf{r}_u + \left\{ {2 \atop 1\ 1} \right\}_S \mathbf{r}_v + L\mathbf{N}, \\ \mathbf{r}_{uv} &= \left\{ {1 \atop 1\ 2} \right\}_S \mathbf{r}_u + \left\{ {2 \atop 1\ 2} \right\}_S \mathbf{r}_v + M\mathbf{N}, \\ \mathbf{r}_{vv} &= \left\{ {1 \atop 2\ 2} \right\}_S \mathbf{r}_u + \left\{ {2 \atop 2\ 2} \right\}_S \mathbf{r}_v + N\mathbf{N}, \end{aligned}\right\} \text{(уравнения Гаусса)}, \qquad (17.3\text{-}30)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{N}_u &= \frac{1}{EG-F^2}\left[(FM-GL)\,\mathbf{r}_u + (FL-EM)\,\mathbf{r}_v\right], \\ \mathbf{N}_v &= \frac{1}{EG-F^2}\left[(EN-GM)\,\mathbf{r}_u + (FM-EN)\,\mathbf{r}_v\right]. \end{aligned}\right\} \text{(уравнения Вейнгартена)} \qquad (17.3\text{-}31)$$

(b) Условия совместности системы дифференциальных уравнений (17.3-30) (условия интегрируемости, п. 10.1-2, с), равносильные соотношениям $\mathbf{r}_{uuv} = \mathbf{r}_{uvu}$, $\mathbf{r}_{vvu} = \mathbf{r}_{uvv}$, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} L_v + \left\{ {1 \atop 1\ 1} \right\}_S M + \left\{ {2 \atop 1\ 1} \right\}_S N &= M_u + \left\{ {1 \atop 1\ 2} \right\}_S L + \left\{ {2 \atop 1\ 2} \right\}_S M, \\ M_v + \left\{ {1 \atop 1\ 2} \right\}_S M + \left\{ {2 \atop 1\ 2} \right\}_S N &= N_u + \left\{ {1 \atop 2\ 2} \right\}_S L + \left\{ {2 \atop 2\ 2} \right\}_S M, \end{aligned}\right\} \text{(уравнения Майнарди — Кодацци *))} \qquad (17.3\text{-}32)$$

$$\frac{1}{F}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{ {1 \atop 1\ 2} \right\}_S - \frac{\partial}{\partial v}\left\{ {1 \atop 1\ 1} \right\}_S + \left\{ {2 \atop 1\ 2} \right\}_S \left\{ {1 \atop 1\ 2} \right\}_S - \left\{ {2 \atop 1\ 1} \right\}_S \left\{ {1 \atop 2\ 2} \right\}_S\right] = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = K. \qquad (17.3\text{-}33)$$

(c) Уравнения (33) выражают K только через E, F, G и их производные, откуда следует, что *гауссова кривизна* $K(u, v)$ *поверхности является* **инвариантом изгибания,** *т. е. не меняется при таких деформациях поверхности, при которых сохраняется ее первая квадратичная форма* (*Theorema Egregium Гаусса*).

17.3-9. Определение поверхности коэффициентами ее основных квадратичных форм. Три функции $E(u, v)$, $G(u, v)$ и $F(u, v)$, удовлетворяющие условиям $E(u, v) > 0$, $G(u, v) > 0$, $EG - F^2 > 0$, определяют метрику (внутреннюю геометрию) поверхности. *Шесть функций E, F, G, L, M, N, удовлетворяющих указанным выше неравенствам и условиям совместности* (32) *и* (33), *однозначно определяют действительную поверхность* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ *с точностью до ее положения в пространстве* (*основная теорема теории поверхностей*).

17.3-10. Отображения.

(a) Взаимно однозначное преобразование (отображение)

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v), \qquad \bar{v} = \bar{v}(u, v), \qquad \left[\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \neq 0\right] \qquad (17.3\text{-}34)$$

ставит в соответствие каждой точке (u, v) данного регулярного куска поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ определенную точку $(\bar{u}, \bar{v})$ регулярного куска другой поверхности $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}(\bar{u}, \bar{v})$. В дальнейшем символы с чертой сверху будут относиться ко второй поверхности. Функции $\bar{u}(u, v)$, $\bar{v}(u, v)$ предполагаются дифференцируемыми достаточное число раз. Отображение называется

изометрическим (*сохраняет все метрические величины на поверхности*), если

$$\bar{E}(\bar{u}, \bar{v}) \equiv E(u, v), \quad \bar{F}(\bar{u}, \bar{v}) \equiv F(u, v), \quad \bar{G}(\bar{u}, \bar{v}) \equiv G(u, v);$$

---

*) В отечественной литературе уравнения (17.3-32), основываясь на хронологической последовательности, в которой они рассматривались, называют уравнениями Петерсона — Кодацци.

конформным (*сохраняет углы*), если

$$\bar{E}(\bar{u}, \bar{v}) : \bar{F}(\bar{u}, \bar{v}) : \bar{G}(\bar{u}, \bar{v}) \equiv E(u, v) : F(u, v) : G(u, v);$$

эквиареальным (*сохраняет площади*), если

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \equiv \sqrt{\frac{EG - F^2}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}}.$$

(b) Для получения конформного отображения (34) каждая из поверхностей конформно отображается на плоскость, а затем одна плоскость отображается на другую при помощи аналитической функции комплексного переменного (п. 7.9-1).

Для того чтобы отобразить конформно поверхность $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ на плоскость с декартовыми прямоугольными координатами $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$, решается дифференциальное уравнение

$$E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2 = 0 \qquad (17.3\text{-}35\ a)$$

или, что то же,

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{G}\left(-F + i\sqrt{EG - F^2}\right) \quad \text{и} \quad \frac{dv}{du} = \frac{1}{G}\left(-F - i\sqrt{EG - F^2}\right). \qquad (17.3\text{-}35\ b)$$

Интегралы этих уравнений определяют мнимые кривые (**изотропные** или **минимальные** «кривые» на поверхности, которые характеризуются условием $ds^2 = 0$)

$$U(u, v) = \text{const}, \qquad V(u, v) = \text{const}.$$

Тогда первая квадратичная форма поверхности в действительных ортогональных координатах

$$\xi(u, v) = \frac{1}{2}(U + V), \qquad \eta(u, v) = \frac{1}{2i}(U - V) \qquad (17.3\text{-}36)$$

(**изотропные** или **изотермические координаты**) принимает вид

$$ds^2 = \psi(\xi, \eta)\,(d\xi^2 + d\eta^2) \qquad (17.3\text{-}37)$$

и становится пропорциональной первой квадратичной форме $d\xi^2 + d\eta^2$ плоскости с декартовыми прямоугольными координатами ξ, η.

17.3-11. Огибающие (см. также пп. 10.2-3 и 17.1-7). Пусть уравнение

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = 0 \qquad (17.3\text{-}38)$$

определяет однопараметрическое семейство поверхностей, для которого

$$\nabla\varphi \times \nabla\varphi'_{\lambda} \neq 0, \qquad \varphi''_{\lambda\lambda} \neq 0 \qquad (17.3\text{-}39)$$

в некоторой области V пространства. Тогда в области V существует поверхность (**огибающая** данного семейства), которая касается каждой из поверхностей (38) вдоль кривой (**характеристики**), определяемой уравнениями

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = 0 \qquad \varphi'_{\lambda}(x, y, z, \lambda) = 0, \qquad (17.3\text{-}40)$$

т. е. имеет с поверхностью семейства общую касательную плоскость в каждой точке характеристики.

Если, кроме того, в области V выполняется условие $\left[\nabla\varphi\nabla\varphi'_{\lambda}\nabla\varphi''_{\lambda\lambda}\right] \neq 0$, то огибающая имеет **ребро возврата**, т. е. кривую, которая касается каждой характеристики (40); точка касания ребра возврата и характеристики называется **фокусом**. Координаты фокуса определяются уравнениями

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = 0, \qquad \varphi'_{\lambda}(x, y, z, \lambda) = 0, \qquad \varphi''_{\lambda\lambda}(x, y, z, \lambda) = 0. \qquad (17.3\text{-}41)$$

Исключение λ из уравнений (41) приводит к уравнениям ребра возврата.

Уравнения (40) определяют при фиксированном значении $\lambda = \lambda_1$ *кривую, являющуюся предельным положением линии пересечения поверхностей*

$$\varphi(x, y, z, \lambda_1) = 0 \text{ и } \varphi(x, y, z, \lambda_2) = 0 \text{ при } \lambda_2 \to \lambda_1;$$

если λ произвольно, то уравнения (40) определяют геометрическое место таких кривых. Это геометрическое место (**λ-дискриминантная поверхность**) содержит, наряду с огибающей, все особые точки поверхностей семейства (ребра, узловые точки и т. д.).

Ребро возврата является, аналогично, *геометрическим местом точек пересечения трех бесконечно близких поверхностей* (38).

17.3-12. Геодезические линии поверхности (см. также п. 17.4-3). **Геодезической линией** регулярного куска поверхности S называется регулярная дуга, геодезическая кривизна которой (п. 17.3-4, а) тождественно равна нулю;

геодезическая либо является прямой линией, либо ее главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности в каждой точке. Для любой геодезической

$$u = u(s), \quad v = v(s) \quad \text{или} \quad v = v(u)$$

соответствующие функции $u(s)$, $v(s)$ и $v(u)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2u}{ds^2} + \left\{\begin{matrix}1\\1\ 1\end{matrix}\right\}_S \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\left\{\begin{matrix}1\\1\ 2\end{matrix}\right\}_S \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \left\{\begin{matrix}1\\2\ 2\end{matrix}\right\}_S \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0, \\ \frac{d^2v}{ds^2} + \left\{\begin{matrix}2\\1\ 1\end{matrix}\right\}_S \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\left\{\begin{matrix}2\\1\ 2\end{matrix}\right\}_S \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \left\{\begin{matrix}2\\2\ 2\end{matrix}\right\}_S \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (17.3\text{-}42a)$$

или

$$\frac{d^2v}{du^2} = \left\{\begin{matrix}1\\2\ 2\end{matrix}\right\}_S \left(\frac{dv}{du}\right)^3 + \left[2\left\{\begin{matrix}1\\1\ 2\end{matrix}\right\}_S - \left\{\begin{matrix}2\\2\ 2\end{matrix}\right\}_S\right]\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \\ + \left[\left\{\begin{matrix}1\\1\ 1\end{matrix}\right\}_S - 2\left\{\begin{matrix}2\\1\ 2\end{matrix}\right\}_S\right]\frac{dv}{du} - \left\{\begin{matrix}2\\1\ 1\end{matrix}\right\}_S. \qquad (17.3\text{-}42b)$$

Эти соотношения определяют единственную геодезическую, проходящую через каждую данную точку в каждом данном направлении. Геодезические линии кривой поверхности имеют много свойств, аналогичных свойствам прямых линий на плоскости (см. также п. 17.4-3). *Если на поверхности существует кривая наибольшей или наименьшей длины, соединяющая две данные точки поверхности, то она является геодезической.* Вопрос о существовании геодезической, проходящей через две данные точки поверхности, требует специального исследования в каждом отдельном случае.

17.3-13. Геодезические нормальные координаты. Геометрия на поверхности (см. также п. 17.4-7).

(a) ✳ Система **геодезических нормальных координат** u, v (**полугеодезические координаты**) характеризуется тем, что координатные линии $v = \text{const}$ являются геодезическими линиями, а координатные линии $u = \text{const}$ — их ортогональными траекториями. ✳

Всегда можно так выбрать систему полугеодезических координат, что вдоль каждой из геодезических координата u играет роль длины дуги s и длина отрезка геодезической между линиями $u = u_1$ и $u = u_2$ равна $u_2 - u_1$. Тогда семейство линий $u = \text{const}$ называется **геодезическими параллелями**, так как заключенные между любыми двумя из таких линий отрезки ортогональных к ним геодезических имеют равные длины.

Первая основная квадратичная форма поверхности, отнесенной к полугеодезическим координатам, принимает вид

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2. \qquad (17.3\text{-}43)$$

В полугеодезических координатах полная (гауссова) кривизна

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = \frac{G_u^2 - 2GG_{uu}}{4G^2}. \qquad (17.3\text{-}44)$$

(b) В специальном случае **геодезических полярных координат** геодезические $v = \text{const}$ пересекаются в одной точке (*полюсе*), а v_1 есть угол (п. 17.3-3, b) между геодезическими $v = 0$ и $v = v_1$. Каждая линия $u = \text{const}$ есть **«геодезическая окружность»** радиуса u, пересекающая все линии $v = \text{const}$ под прямым углом. «Дуга окружности радиуса u», соответствующая центральному углу dv, равна

$$\sqrt{G(u, v)}\,dv = \left[u - \frac{1}{6}K_0u^3 + o(u^3)\right]dv, \qquad (17.3\text{-}45)$$

где K_0 — гауссова кривизна в полюсе. Величина (45) меньше, равна или больше чем $u\,dv$, если соответственно $K_0 > 0$, $K_0 = 0$ или $K_0 < 0$.

Длина окружности $C_G(u)$ и площадь $A_G(u)$ геодезического круга малого радиуса u с центром в полюсе связаны с длиной окружности $2\pi u$ и площадью πu^2 круга того же радиуса на плоскости следующими соотношениями:

$$\frac{3}{\pi}\lim_{u\to 0}\frac{2\pi u - C_G(u)}{u^3} = \frac{12}{\pi}\lim_{u\to 0}\frac{\pi u^2 - A_G(u)}{u^4} = K_0. \qquad (17.3\text{-}46)$$

(c) Для любого геодезического треугольника на поверхности постоянной гауссовой кривизны K разность $\pi-(A+B+C)$, где A, B, C — углы треугольника (дефект треугольника), связана с его площадью S_T соотношением

$$A+B+C-\pi=KS_T. \qquad (17.3\text{-}47)$$

Как следствие, геометрия на поверхности постоянной кривизны является *евклидовой* при $K=0$, **гиперболической** при $K<0$ и **эллиптической** при $K>0$. *Поверхности постоянной равной гауссовой кривизны изометричны* (*теорема Миндинга*).

Примеры. Для сферы радиуса R гауссова кривизна $K=1/R^2$. Поверхность постоянной отрицательной кривизны K может быть получена вращением *трактрисы*

$$x=\frac{1}{\sqrt{-K}}\sin t, \qquad y=\frac{1}{\sqrt{-K}}\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right)$$

вокруг ее асимптоты (*псевдосфера*).

17.3-14. Теорема Гаусса — Бонне. *Пусть гауссова кривизна $K(u, v)$ непрерывна в замкнутой односвязной области поверхности S, граница которой C состоит из n регулярных дуг с геодезической кривизной $K_G(u, v)$. Тогда сумма Θ всех n внешних углов границы связана с* **интегральной кривизной** $\iint\limits_S K\,dA$ *области S следующей формулой*:

$$\int\limits_C K_G\,ds+\iint\limits_S K\,dA=2\pi-\Theta \quad (\textit{теорема Гаусса — Бонне}). \qquad (17.3\text{-}48)$$

Первый из интегралов обращается в нуль, если область ограничена геодезическими; формула (47) является частным случаем теоремы Гаусса — Бонне.

17.4. ПРОСТРАНСТВА С КРИВИЗНОЙ

17.4-1. Вводные замечания. Теория, изложенная в пп. 17.4-2 — 17.4-7, посвящена изучению в криволинейных координатах таких геометрических понятий, как длина, угол, кривизна, и обобщению их на некоторый класс многомерных пространств, а именно *римановых пространств*, введенных в гл. 16.

17.4-2. Кривые, длины и направления в римановом пространстве (см. также пп. 4.6-9, 5.4-4, 6.2-3)[1].

(a) Метрические свойства, связанные с n-мерным точечным римановым пространством, отнесенным к координатам $x^1, x^2, \ldots, x^n$, задаются компонентами его *метрического тензора* $g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ (п. 16.7-1), который определяет *скалярное произведение* и, следовательно, модули и направления векторов в каждой точке (п. 16.8-1).

(b) **Регулярная дуга** C определяется n параметрическими уравнениями

$$x^i=x^i(t) \qquad (t_1\leqslant t\leqslant t_2) \qquad (17.4\text{-}1)$$

с непрерывными производными dx^i/dt, не обращающимися одновременно в нуль. Дифференциалы $dx^i\equiv(dx^i/dt)\,dt$ служат компонентами вектора, который можно рассматривать как направляющий вектор $d\mathbf{r}$ касательной к кривой C в ее точке $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$; **элемент расстояния** ds между двумя соседними точками кривой $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $(x^1+dx^1, x^2+dx^2, \ldots, x^n+dx^n)$ определяется следующим образом:

$$ds\equiv\sqrt{g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n)\,dx^i\,dx^k}\equiv\sqrt{g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}}\,dt. \qquad (17.4\text{-}2a)$$

Знак ds выбирается так, что $ds>0$ для $dt>0$ (*положительное направление* на

---

[1]) Уравнения (4) — (6) могут применяться непосредственно лишь в случае $ds\neq0$. Изотропные направления и линии нулевой длины ($d\mathbf{r}\neq0$, $ds=|d\mathbf{r}|=0$) в римановых пространствах с неопределенной метрикой кратко рассмотрены в п. 17.4-4.

кривой C в случае положительно определенной квадратичной формы $g_{ik}\,dx^i dx^k$). В некоторых случаях ds определяется соотношением

$$ds \equiv \sqrt{|g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n)\,dx^i\,dx^k|}. \qquad (17.4\text{-}2b)$$

Длина дуги s кривой C от точки кривой, соответствующей значению параметра $t = t_0$, определяется интегралом

$$s = \int_{t_0}^{t} ds \equiv \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}}\,dt. \qquad (17.4\text{-}3)$$

Величина интеграла (3) не зависит от выбора параметра t на кривой.

(c) Под направлением кривой (1) в каждой ее точке $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ понимается направление вектора $d\mathbf{r}$; иными словами, угол γ между любым вектором $\mathbf{a}$, заданным в точке $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, и кривой определяется формулой $\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}}{|\mathbf{a}|\,|ds|}$ (п. 16.8-1). В частности, угол γ между двумя регулярными дугами $x^i = X^i_1(t)$ и $x^i = X^i_2(t)$ находится по формуле

$$\cos\gamma = g_{ik}\frac{dX^i_1}{ds}\frac{dX^k_2}{ds}. \qquad (17.4\text{-}4)$$

Общие точки $(n-1)$ из n **координатных гиперповерхностей** $x^i = \text{const}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, проходящих через данную точку $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, лежат на **координатной линии**, соответствующей n-й координате (см. также п. 6.2-2). Косинус угла между i-й и k-й координатными линиями в точке $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ равен $g_{ik}/\sqrt{g_{ii}g_{kk}}$.

(d) Единичный вектор $d\mathbf{r}/ds$ (с компонентами dx^i/ds) является **единичным вектором касательной** к кривой C в точке $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. **Первый вектор кривизны** $d^2\mathbf{r}/ds^2$ (с компонентами $\frac{D}{ds}\left(\frac{dx^i}{ds}\right)$) перпендикулярен к кривой (**направление главной нормали**, см. также п. 17.2-2, b); его абсолютная величина

$$|k| = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| = \sqrt{g_{ik}\frac{D}{ds}\left(\frac{dx^i}{ds}\right)\frac{D}{ds}\left(\frac{dx^k}{ds}\right)} \qquad (17.4\text{-}5)$$

называется **первой кривизной** кривой C в точке $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ (см. также п. 17.3-7).

17.4-3. Геодезические линии в римановом пространстве (см. также п. 17.3-12).

(a) **Геодезической линией** риманова пространства называется регулярная дуга, геодезическая кривизна которой равна нулю в каждой точке кривой или, что то же, единичный касательный вектор которой $d\mathbf{r}/ds$ сохраняет постоянное значение (в смысле параллельного перенесения, п. 16.10-9) вдоль кривой:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{D}{ds}\left(\frac{dx^i}{ds}\right) \equiv \frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{{i \atop j\;k}\right\}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \qquad (17.4\text{-}6)$$

Дифференциальные уравнения (6) (*n уравнений второго порядка*) *определяют единственную геодезическую* $x^i = x^i(s)$, *проходящую через данную точку* $\left[x^i_1 = x^i(s_1)\right]$ *в любом данном направлении* (соответствующем заданным значениям dx^i/ds при $s = s_1$).

Геодезические линии могут определяться также уравнениями более общего вида, а именно, дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \left\{{i \atop j\;k}\right\}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \lambda(t)\frac{dx^i}{dt} \qquad (17.4\text{-}7)$$

(с заданными начальными значениями x^i и dx^i/dt) определяют геодезическую $x^i = x^i(t)$; вид функции

$$\lambda(t) \equiv -\frac{d^2t}{ds^2} \Big/ \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \qquad (17.4\text{-}8)$$

связан с выбором параметра t на геодезической, но не меняет кривую как таковую.

(b) Геодезические линии обладают многими свойствами прямых евклидовой геометрии (см. также п. 17.4-6). *Если существует кривая наименьшей или наибольшей длины* (3), *соединяющая две данные точки риманова пространства, то она является геодезической.* Дифференциальные уравнения геодезической (6) или (7) можно рассматривать как уравнения Эйлера (пп. 11.6-1 и 11.6-2), выражающие тот факт, что первая вариация длины дуги (3), соединяющей данные точки, равна нулю. Вопрос о существовании геодезической, соединяющей две данные точки риманова пространства, требует в каждом отдельном случае специального исследования.

17.4-4. Римановы пространства с неопределенной метрикой. Изотропные направления и геодезические нулевой длины. Если фундаментальная форма

$$g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n)\, dx^i dx^k$$

риманова пространства является неопределенной (п. 13.5-2) в точке $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, то квадрат $|\mathbf{a}|^2 = g_{ik}a^i a^k$ вектора $\mathbf{a}$ может быть положительным, отрицательным или равным нулю, и из $|\mathbf{a}| = 0$ не следует, вообще говоря, что $\mathbf{a} = 0$. В любой точке $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ направление вектора $\mathbf{a} \neq 0$, удовлетворяющего условию $|\mathbf{a}|^2 = g_{ik}a^i a^k = 0$, называется **изотропным** направлением. Для вектора элементарного перемещения $d\mathbf{r} \neq 0$, имеющего изотропное направление, $ds = |d\mathbf{r}| = 0$; при этом точки $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $(x^1 + dx^1, \ldots, x^n + dx^n)$, связанные таким изотропным перемещением, различны. Кривая $x^i = x^i(t)$, удовлетворяющая условию

$$g_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0, \qquad (17.4\text{-}9)$$

имеет изотропное направление в каждой своей точке (**кривая нулевой длины, изотропная кривая**, см. также п. 17.3-10, b).

Кривая $x^i = x^i(t)$, удовлетворяющая одновременно уравнениям (7) и (9), называется **геодезической линией нулевой длины**. *Каждое изотропное направление определяет единственную геодезическую линию нулевой длины, проходящую через данную точку в этом направлении* (одно из применений — траектории светового луча в римановом пространстве теории относительности).

17.4-5. Тензор кривизны риманова пространства.

(a) **Тензором кривизны (тензором Римана — Кристоффеля)** данного риманова пространства называется абсолютный тензор ранга 4 со следующими смешанными компонентами (здесь r — немой индекс):

$$R^i_{jkh} \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{ {i \atop j\ h} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^h}\left\{ {i \atop j\ k} \right\} + \left\{ {i \atop r\ k} \right\}\left\{ {r \atop j\ h} \right\} - \left\{ {i \atop r\ h} \right\}\left\{ {r \atop j\ k} \right\} \qquad (17.4\text{-}10)$$

или с ковариантными компонентами

$$R_{ijkh} \equiv g_{ir}R^r_{jkh} \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}[jh;\ i] - \frac{\partial}{\partial x^h}[jk;\ i] + \left\{ {r \atop j\ k} \right\}[ih;\ r] - \left\{ {r \atop j\ h} \right\}[ik;\ r] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{ih}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^i \partial x^k}\right] +$$

$$+ g^{rs}\{[jk;\ s][ih;\ r] - [jh;\ s][ik;\ r]\}. \qquad (17.4\text{-}11)$$

* Иногда пользуются также обозначениями

$$R_{ijkh} \equiv R_{ij,\ kh} \quad \text{и} \quad R^i_{jkh} \equiv R^{\ i}_{\cdot j.\ kh} \equiv R_{hk,\ j.}^{\quad\ i} \ *$$

Компоненты тензора кривизны удовлетворяют следующим соотношениям:

$$R^i_{jkh} = -R^i_{jhk} = g^{ri} R_{rjkh}, \qquad R^i_{jkh} + R^i_{khj} + R^i_{hjk} = 0, \qquad (17.4\text{-}12)$$

$$R_{ijkh} = R_{khij} = -R_{jikh} = -R_{ijhk}, \quad R_{ijkh} + R_{ikhj} + R_{ihjk} = 0; \qquad (17.4\text{-}13)$$

вторые соотношения в формулах (12) и (13) столбца называются *тождествами Риччи.*

Тензор кривизны n-мерного риманова пространства имеет $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ *существенных компонент*, через которые выражаются остальные его компоненты. Абсолютные производные тензора кривизны удовлетворяют *тождествам Бианки* (Бианки — Падова)

$$\left.\begin{aligned} &R^i_{jkh,r} + R^i_{jhr,k} + R^i_{jrk,h} = 0, \\ &R_{ijkh,r} + R_{ijhr,k} + R_{ijrk,h} = 0 \end{aligned}\right\} \text{(тождества Бианки).} \qquad (17.4\text{-}14)$$

(b) Тензором Риччи данного риманова пространства называется абсолютный тензор ранга 2 с ковариантными компонентами

$$R_{ij} \equiv R_{ji} \equiv R^k_{ijk} \equiv \frac{\partial^2 \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{ {k \atop i\ j} \right\} - \left\{ {h \atop i\ j} \right\} \frac{\partial}{\partial x^h} \ln \sqrt{|g|} + \left\{ {k \atop h\ j} \right\}\left\{ {h \atop i\ k} \right\} \qquad (17.4\text{-}15)$$

или со смешанными компонентами $R^i_j \equiv g^{ik} R_{kj}$. *Тензор Риччи в n-мерном римановом пространстве является симметричным и имеет* $\frac{n(n+1)}{2}$ *существенных компонент.*

Собственные направления тензора Риччи (п. 14.8-3) называются **главными направлениями Риччи**; они определены в каждой точке риманова пространства.

(c) Скалярным инвариантом или **скалярной кривизной** риманова пространства называется скалярный (абсолютный) инвариант

$$R \equiv R^i_i \equiv g^{ik} R_{ik} \equiv g^{ik} R^j_{ikj}. \qquad (17.4\text{-}16)$$

(d) Тензором Эйнштейна данного риманова пространства называется абсолютный тензор ранга 2 с компонентами

$$G^i_j \equiv R^i_j - \frac{1}{2} R \delta^i_j \quad \text{или} \quad G_{ij} \equiv g_{ik} G^k_j \equiv R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij}. \qquad (17.4\text{-}17)$$

Дивергенция (п. 16.10-7) $G^i_{j,\,i}$ *тензора Эйнштейна тождественно равна нулю.*

17.4-6. Геометрическое истолкование тензора кривизны. Плоские пространства и евклидовы пространства.

(a) Параллельное перенесение вектора вдоль замкнутого контура. Параллельное перенесение вектора **a** ($Da^i = 0$, п. 16.10-9) вдоль бесконечно малого замкнутого контура

$$(x^1, x^2, \ldots, x^n) \to (x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, \ldots, x^n + dx^n) \to$$
$$\to (x^1 + dx^1 + d\xi^1, x^2 + dx^2 + d\xi^2, \ldots, x^n + dx^n + d\xi^n) \to$$
$$\to (x^1 + d\xi^1, x^2 + d\xi^2, \ldots, x^n + d\xi^n) \to (x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

вызывает изменение каждой компоненты a^i вектора **a** на

$$\delta a^i = -R^i_{jkh} a^j dx^k d\xi^h \qquad (17.4\text{-}18)$$

(см. также уравнение (16.10-25)).

(b) * Геодезически параллельные линии. Пусть $x^i = x^i(s, \lambda)$[1] — уравнения однопараметрического семейства геодезических, где

---

[1]) Принятое здесь обозначение $x^i = x^i(s, \lambda)$ исключает геодезические нулевой длины.

s — длина дуги геодезической, λ — параметр семейства. Ортогональные траектории семейства **(геодезические параллельные)** отсекают на геодезических линиях дуги равной длины. Следовательно, эти ортогональные траектории можно при подходящем выборе начала отсчета на каждой из геодезических определить уравнением $s = \text{const}$. Вектор с компонентами

$$\frac{\delta x^i(s, \lambda)}{\partial \lambda} = \eta^i(s, \lambda)$$

будет иметь направление нормали к геодезической $\lambda = \text{const}$, касаясь в то же время двумерной поверхности риманова пространства $x^i = x^i(s, \lambda)$ (s, λ — переменные параметры). Вектор η^i меняется при перемещении вдоль любой из геодезических семейства таким образом, что

$$\frac{D^2\eta^i}{ds^2} = -R^i_{jkh}\eta^k p^j p^h, \qquad (17.4\text{-}19)$$

где p^j — координаты единичного вектора касательной к данной геодезической линии.

(c)* Плоские пространства. Риманово пространство называется **плоским**, если в окрестности каждой его точки существует такая система координат $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ (декартовы прямоугольные координаты), что в этой окрестности

$$ds^2 = \varepsilon_1(\xi^1)^2 + \varepsilon_2(\xi^2)^2 + \ldots + \varepsilon_n(\xi^n)^2, \qquad (17.4\text{-}20)$$

где ε_i постоянны и равны либо $+1$, либо -1.

Риманово пространство является плоским в том и только в том случае, если все компоненты его тензора кривизны R^i_{jkh} или R_{ijkh} равны нулю в каждой точке пространства, так что в плоском пространстве смешанные ковариантные производные не зависят от последовательности дифференцирования, и параллельное перенесение тензора вдоль замкнутого контура оставляет все компоненты тензора неизменными (пп. 16.10-9 и 17.4-6, а)[1]).

В любой декартовой координатной системе все символы Кристоффеля тождественно равны нулю; ковариантное дифференцирование сводится к обычному дифференцированию и любая геодезическая определяется линейными параметрическими уравнениями $\xi^i = a^i t + b^i$.

Фундаментальная форма (20) может быть дополнительно упрощена посредством введения координат $\zeta^i = \sqrt{\varepsilon_i}\xi^i$; ζ^i является мнимым, если $\varepsilon_i = -1$ (это последнее обстоятельство имеет место в теории относительности).

* (d) Плоское риманово пространство с положительно определенной метрикой (все ε_i в (20) равны $+1$) называют **локально евклидовым**. Топология (п. 12.5-1) локально евклидова пространства может отличаться от «обычной» топологии евклидова пространства элементарной геометрии (гл. 2 и 3); иногда, впрочем, локально евклидово пространство также называют евклидовым независимо от его топологии. С другой стороны, плоское пространство иногда называют локально евклидовым независимо от того, является ли его фундаментальная форма положительно определенной, а в случае положительно определенной формы (17.4-20) употребляют термин «собственно евклидово пространство»; если же форма (20) не является положительно определенной, то пространство называют псевдоевклидовым. *

17.4-7. Специальные координатные системы. Благодаря инвариантности тензорных уравнений (п. 16.1-4, 16.4-1, 16.10-7, b) часто удается упростить математические рассуждения путем использования одной из *специальных координатных систем.*

---

[1]) При этом предполагается, что контур может служить границей поверхности, все точки которой принадлежат плоскому пространству.

(a) Не каждое риманово пространство допускает *ортогональные координаты* ($g_{ik} \equiv 0$ для $i \neq k$, п. 16.8-2), но всегда возможно выбрать одну из координат, пусть для определенности это будет x^n, так, что ее координатные линии будут ортогональны ко всем остальным координатным линиям, вследствие чего фундаментальная квадратичная форма принимает вид

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} g_{ik}\, dx^i\, dx^k + g_{nn}\,(dx^n)^2 \tag{17.4-21}$$

в каждой точке $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. При этом всегда можно выбрать систему координат так, что будет выполняться одно из дополнительных условий $g_{nn} = 1$ или $g_{nn} = -1$; x^n является тогда длиной s дуги каждой из координатных линий $x^i = \text{const}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, представляющих собой геодезические, ортогональные ко всем гиперплоскостям $x^n = \text{const}$ (**нормальные геодезические** или **полугеодезические координаты**, см. также п. 17.3-13).

(b) * Каждое риманово пространство допускает такую систему координат $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$, что его фундаментальная квадратичная форма будет иметь вид (20) в *одной* наперед заданной точке пространства. Более того, система координат может быть выбрана таким образом, что в этой точке компоненты тензора g_{ik} и частные производные первого порядка $\partial g_{ik}/\partial x^j$ будут совпадать соответственно с компонентами метрического тензора псевдоевклидова пространства и их частными производными; оно называется **соприкасающимся псевдоевклидовым пространством** риманова пространства в данной его точке. В окрестности каждой своей точки риманово пространство с точностью до бесконечно малых высшего порядка изометрично соприкасающемуся псевдоевклидову (собственно евклидову, если метрика положительно определенная) пространству.

(c) **Римановыми (нормальными) координатами с началом** O называются числа $x^i = sp^i$, где p^i — компоненты единичного вектора касательной в точке O к геодезической линии, соединяющей O с точкой $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, а s — геодезическое расстояние между O и точкой $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. *Каждое риманово пространство допускает геодезические координаты с любым началом* O; при этом символы Кристоффеля обращаются в точке O в нуль.

ГЛАВА 18

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

18.1. ВВЕДЕНИЕ

18.1-1. Вводные замечания. Вероятностями называются значения некоторой действительной функции, определенной на классе идеализированных событий, которые представляют собой результаты испытания (опыта или наблюдения). Вероятности вводятся посредством определенных аксиом (п. 18.2-2; см. также п. 12.1-1), абстрагируемых из основных свойств статистических относительных частот (п. 19.2-1). Практически понятие вероятности проявляется в том, что обычно относительная частота случайного события в каждой последовательности независимых повторных испытаний приближается к соответствующей вероятности (п. 19.2-1) [1]).

Теория вероятностей занимается определением и описанием моделей, связанных с понятием вероятности. В частности, здесь рассматриваются методы вычисления вероятности некоторого события по известным или заданным вероятностям других событий, которые с ним логически связаны. Многие приложения теории вероятностей относятся к области *случайных процессов* (пп. с 18.8-1 по 18.11-5).

18.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ

18.2-1. Алгебра событий, связанных с данным испытанием. Каждая вероятностная модель описывает некоторый идеализированный опыт (или наблюдение), обладающий тем свойством, что для класса $\mathcal{S}^+$ его возможных исходов (событий) имеют смысл следующие определения.

1. **Объединение (логическая сумма)** $E_1 \cup E_2 \cup \ldots$ (или $E_1 + E_2 + \ldots$) конечной или бесконечной последовательности событий $E_1, E_2, \ldots$ есть событие, состоящее в осуществлении *хотя бы одного* из событий $E_1, E_2, \ldots$

2. **Совмещение (логическое произведение)** $E_1 \cap E_2$ (или E_1E_2) двух событий E_1 и E_2 есть событие, состоящее в осуществлении *и* E_1 *и* E_2.

3. **Дополнение (логическое отрицание)** $\bar{E}$ события E есть событие, состоящее в *неосуществлении* события E (событие $\bar{E}$ называют *«противоположным»* событию E).

4. **Достоверное событие** I состоит в осуществлении хотя бы одного из событий класса $\mathcal{S}^+$.

5. **Невозможное событие** O состоит в том, что не осуществляется ни одно из событий класса $\mathcal{S}^+$.

Класс $\mathcal{S}$ событий, состоящий из класса $\mathcal{S}^+$ и 0, образует вполне аддитивную булеву алгебру (пп. 12.8-1 и 12.8-4) — **алгебру событий, связанных с данным испытанием.**

Любое из соотношений $E_1 \cup E_2 = E_1$ или $E_1 \cap E_2 = E_2$ заключает в себе **логическое отношение включения** $E_2 \subset E_1$ (E_2 *влечет* E_1). Отметим, что $0 \subset E \subset I$. События E_1 и E_2 называются **несовместными,** если $E_1 \cap E_2 = 0$. Множество $\mathcal{S}_1$

---

[1]) До тех пор, пока это положение имеет место, оно может рассматриваться как *закон природы*; не надо смешивать это положение с *математическими теоремами* типа теоремы Бернулли или закона больших чисел (п. 18.6-5).

совмещений $E \cap E_1$ образует алгебру событий, связанных с данным испытанием *при дополнительном условии, что имеет место событие* E_1; $E_1 \cap E_1 = E_1$ есть достоверное событие в $\mathfrak{S}_1$ (см. также п. 12.8-3).

18.2-2. Определение вероятности. Условные вероятности. Пусть с данным испытанием связан класс $\mathfrak{S}$ событий E (п. 18.2-1). **Вероятностью** $\mathrm{P}\{E\}$ события E называется определенная на $\mathfrak{S}$ однозначная действительная функция, удовлетворяющая трем условиям (**аксиомам вероятностей**):

1) $\mathrm{P}\{E\} \geqslant 0$ для любого события E из $\mathfrak{S}$;
2) $\mathrm{P}\{I\} = 1$ для достоверного события I;
3) $\mathrm{P}\{E_1 \cup E_2 \cup \ldots\} = \mathrm{P}\{E_1\} + \mathrm{P}\{E_2\} + \ldots$ для любой (конечной или бесконечной) последовательности *попарно несовместных событий* $E_1, E_2 \ldots$

Из аксиом 1), 2), 3) *следует, что* $0 \leqslant \mathrm{P}\{E\} \leqslant 1$; *в частности, если* 0 — *невозможное событие, то* $\mathrm{P}\{0\} = 0$. Важно отметить, что из равенств $\mathrm{P}\{E\} = 1$ или $\mathrm{P}\{E\} = 0$ *не* следует, что E является достоверным или соответственно невозможным событием.

Вводимая далее аксиома 4) связывает «абсолютную» вероятность $\mathrm{P}\{E\}$, относящуюся к данному испытанию, и «условную» вероятность $\mathrm{P}\{E \mid E_1\}$, относящуюся к испытанию, ограниченному дополнительным условием осуществления события E_1. **Условная вероятность** $\mathrm{P}\{E \mid E_1\}$ события E при условии осуществления события E_1 определяется аксиомой

4) Вероятность совмещения событий $E \cap E_1$ равна

$$\mathrm{P}\{E \cap E_1\} = \mathrm{P}\{E_1\}\, \mathrm{P}\{E \mid E_1\} \quad (\textit{правило умножения вероятностей});$$

вероятность $\mathrm{P}\{E \mid E_1\}$ *не определена, если* $\mathrm{P}\{E_1\} = 0$.

По отношению к указанному выше «ограниченному» испытанию все величины $\mathrm{P}\{E \mid E_1\}$ являются обычными вероятностями, именно вероятностями совмещенных событий $E \cap E_1$, образующих алгебру $\mathfrak{S}_1$ исходов этого испытания (п. 18.2-1). На практике каждая вероятноть может быть истолкована как условная вероятность, соответствующая некоторым условиям, наложенным при проведении испытания.

18.2-3. Независимость случайных событий. Два события E_1 и E_2 называются **независимыми (независимыми по вероятности)**, если

$$\mathrm{P}\{E_1 \cap E_2\} = \mathrm{P}\{E_1\}\, \mathrm{P}\{E_2\}, \tag{18.2-1}$$

так что $\mathrm{P}\{E_1 \mid E_2\} = \mathrm{P}\{E_1\}$, если $\mathrm{P}\{E_2\} \neq 0$, и $\mathrm{P}\{E_2 \mid E_1\} = \mathrm{P}\{E_2\}$, если $\mathrm{P}\{E_1\} \neq 0$.

События $E_1, E_2, \ldots, E_N$ называются **независимыми в совокупности**, если выполняются все указанные ниже соотношения:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{P}\{E_i \cap E_j\} = \mathrm{P}\{E_i\}\, \mathrm{P}\{E_j\} & (1 \leqslant i < j \leqslant N), \\ \mathrm{P}\{E_i \cap E_j \cap E_k\} = \mathrm{P}\{E_i\}\, \mathrm{P}\{E_j\}\, \mathrm{P}\{E_k\} & (1 \leqslant i < j < k \leqslant N), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \mathrm{P}\{E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_N\} = \mathrm{P}\{E_1\}\, \mathrm{P}\{E_2\} \ldots \mathrm{P}\{E_N\}. & \end{array}\right\} \tag{18.2-2}$$

18.2-4. Сложные испытания. Независимые испытания и повторные независимые испытания. Часто испытание можно расчленить на отдельные частичные испытания (см. также пп. 18.7-3 и 18.8-1). Результаты первого, второго, ... частичных испытаний обозначим через E', E'', ... Результат E сложного испытания может быть описан как совмещение событий $E = E' \cap E'' \cap \ldots$; в общем случае их вероятности будут зависеть от природы и взаимодействия частичных испытаний.

Два (или более) частичных испытания называются **независимыми**, если независимы их результаты E', E'', ..., полученные *в процессе сложного испытания*. Если некоторое частичное испытание независимо от остальных, то вероятность осуществления любого его исхода при проведении сложного испытания равна соответствующей вероятности при самостоятельном проведении частичного испытания.

Повторными независимыми испытаниями называется последовательность независимых испытаний, каждое из которых имеет один и тот же набор возможных исходов E и их вероятностей $\mathrm{P}\{E\}$. *Вероятность получения определенной последовательности результатов* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *при проведении* n *повторных независимых испытаний равна*

$$\mathrm{P}\{E_1, E_2, \ldots, E_n\} = \mathrm{P}\{E_1\}\, \mathrm{P}\{E_2\} \ldots \mathrm{P}\{E_n\}. \tag{18.2-3}$$

18.2-5. Правила сочетаний (см. также пп. 18.7-1 — 18.7-3). Каждая из теорем табл. 18.2-1 выражает вероятность некоторого события через вероятности других событий, логически связанных с ним.

Таблица 18.2-1

Вероятности логически связанных событий

(a) Вероятность **неосуществления** события E	$\mathsf{P}\{\overline{E}\} = 1 - \mathsf{P}\{E\}$
Вероятность осуществления **хотя бы одного из двух событий** E_1 и E_2 (E_1 или E_2 или обоих)	$\mathsf{P}\{E_1 \cup E_2\} = \mathsf{P}\{E_1\} + \mathsf{P}\{E_2\} - \mathsf{P}\{E_1 \cap E_2\}$
Вероятность **совмещения всех событий** $E_1, E_2, \ldots, E_N$	$\mathsf{P}\{E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_N\} = \mathsf{P}\{E_1\} \mathsf{P}\{E_2 \mid E_1\} \ldots \mathsf{P}\{E_N \mid E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{N-1}\}$
(b) Вероятность осуществления **хотя бы одного из** N **независимых в совокупности событий** $E_1, E_2, \ldots, E_N$	$\mathsf{P}\{E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_N\} = 1 - (1 - \mathsf{P}\{E_1\}) \times (1 - \mathsf{P}\{E_2\}) \ldots (1 - \mathsf{P}\{E_N\})$
Вероятность **совмещения событий** $E_1, E_2, \ldots, E_N$, **независимых в совокупности**	$\mathsf{P}\{E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_N\} = \mathsf{P}\{E_1\} \mathsf{P}\{E_2\} \ldots \mathsf{P}\{E_N\}$

Вероятности осуществления **не менее** m **и точно** m *из* N (*не обязательно независимых*) *событий* $E_1, E_2, \ldots, E_N$ равны соответственно

$$P_m = \sum_{j=m}^{N} (-1)^{j-m} \binom{j-1}{m-1} S_j; \qquad P_{[m]} = \sum_{j=m}^{N} (-1)^{j-m} \binom{j}{m} S_j \qquad (m = 1, 2, \ldots, N), \tag{18.2-4}$$

где

$$S_1 = \sum_i \mathsf{P}\{E_i\}; \quad S_2 = \sum_{i<k}\sum \mathsf{P}\{E_i \cap E_k\}; \quad \ldots; \quad S_N = \mathsf{P}\{E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_N\}. \tag{18.2-5}$$

Заметим, что

$$S_j = \sum_{k=j}^{N} \binom{k-1}{j-1} P_k = \sum_{k=j}^{N} \binom{k}{j} P_{[k]} \qquad (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{18.2-6}$$

Если $E_1, E_2, \ldots, E_N$ независимы в совокупности, то величины (5) приводятся к симметрическим функциям (1.4-9) от $\mathsf{P}\{E_i\}$ (табл. 18.2-1, b).

Примеры. Если вероятность выпадения каждой стороны игральной кости равна 1/6, то

вероятность выпадения *или* 1 *или* 6 есть $1/6 + 1/6 = 1/3$,

вероятность *невыпадения* 6 есть $1 - 1/6 = 5/6$,

вероятность выпадения 6 *хоть один раз* за два бросания кости есть $1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36$,

вероятность выпадения 6 *точно один раз* за два бросания кости есть $1/3 - 2/36 = 5/18$,

вероятность выпадения 6 дважды за два бросания есть $1/36$.

18.2-6. Теоремы Байеса (см. также п. 18.4-5, b). *Пусть H_1, H_2, ... — последовательность попарно несовместных событий, образующих полную группу, т. е. $H_1 \cup H_2 \cup \ldots = I$.* Тогда для каждой пары событий H_i, E имеет место формула Байеса

$$\mathsf{P}\{H_i \mid E\} = \frac{\mathsf{P}\{H_i \cap E\}}{\mathsf{P}\{E\}} = \frac{\mathsf{P}\{H_i\}\,\mathsf{P}\{E \mid H_i\}}{\sum\limits_i \mathsf{P}\{H_i\}\,\mathsf{P}\{E \mid H_i\}}. \tag{18.2-7}$$

Формула (7) позволяет вычислять «апостериорные» вероятности $\mathsf{P}\{H_i \mid E\}$ через «априорные» вероятности $\mathsf{P}\{H_i\}$ «гипотез» H_i.

18.2-7. Представление событий как множеств в пространстве выборок. Каждый класс $\mathcal{S}$ событий E может быть представлен как множество g попарно несовместных событий $\hat{E} \neq 0$ так, что каждое событие E есть объединение некоторого подмножества событий из g. g называется **пространством выборок или множеством элементарных событий,** связанных с данным испытанием. Каждое множество элементарных событий $\hat{E}$ из g соответствует некоторому событию E. В частности, само g соответствует достоверному событию, а пустое множество из g — невозможному событию. Вероятности $\mathsf{P}\{E\}$ могут рассматриваться при этом как значения некоторой аддитивной *функции множества,* **вероятностной функции,** определяющей **распределение вероятностей** в пространстве выборок.

Таким образом, алгебра событий $\mathcal{S}$ изоморфно отображается на алгебру измеримых множеств (см. также пп. 4.6-17, b и 12.8-4). Множество элементарных событий, соответствующее условным вероятностям $\mathsf{P}\{E \mid E_1\}$, есть подмножество, составляющее событие E_1. Обратно, множество элементарных событий, связанное с некоторым испытанием, может рассматриваться как подмножество в пространстве выборок, связанном с более общим испытанием.

18.2-8. Случайные величины. Случайная величина есть любая (не обязательно численная) переменная $\mathbf{x}$, «значения» которой $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ образуют множество элементарных событий $\{\mathbf{x} = \mathbf{X}\}$ или, другими словами, обозначают точки в пространстве выборок. Соответствующее распределение вероятностей называется **распределением случайной величины x.**

Каждая измеримая функция (п. 4.6-14, с) $\mathbf{x}$, определенная на некотором множестве элементарных событий, есть случайная величина; ее распределение задается вероятностями событий — измеримых подмножеств значений $\mathbf{x}$.

18.2-9. Описание вероятностных моделей на языке случайных величин и их функций распределения. Во многих задачах элементарные события $\hat{E}$ бывают отмечены значениями X действительной случайной величины x. Таковы, например, результаты измерения. Сложные события, скажем, $\{x \leqslant a\}$, $\{\sin x > 0{,}5\}$ или $\{x = \operatorname{arctg} 2\}$, соответствуют измеримым множествам значений величины x.

Более общим образом каждое случайное событие может быть отмечено упорядоченным набором $\mathbf{X} \equiv (X_1, X_2, \ldots)$ действительных чисел X_1, X_2, ..., который дает «значение» многомерной случайной величины $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots)$. Каждая из действительных величин x_1, x_2, ... сама является случайной величиной.

Если множество элементарных событий, связанное с данным испытанием, отмечено случайной величиной x или $\mathbf{x}$, то *вероятности случайных событий однозначно описываются распределением вероятностей этой случайной величины.*

В настоящем справочнике все действительные случайные величины считаются заданными в интервале $(-\infty, +\infty)$; значения случайной величины, не соответствующие элементарным событиям $\hat{E}$, трактуются как невозможные события и им приписывается вероятность 0.

Распределение действительной случайной величины x задается ее **функцией распределения** *)

$$\Phi_x(X) \equiv \Phi(X) \equiv \mathrm{P}\{x < X\}. \qquad (18.2\text{-}8)$$

Распределение многомерной случайной величины $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots)$ задается **функцией совместного распределения**

$$\Phi_{\mathbf{x}}(X_1, X_2, \ldots) \equiv \Phi(X_1, X_2, \ldots) \equiv \mathrm{P}\{x_1 < X_1, x_2 < X_2, \ldots\}. \qquad (18.2\text{-}9)$$

Обратно, функция распределения определяется по данному распределению вероятностей однозначно для всех значений случайной величины, за возможным исключением множества меры нуль (п. 4.6-14). Функция распределения всегда определена однозначно в точках непрерывности. Каждая функция распределения является неубывающей функцией от каждого из своих аргументов и

$$\Phi_x(-\infty) = 0, \quad \Phi_x(+\infty) = 1, \qquad (18.2\text{-}10)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{\mathbf{x}}(-\infty, X_2, X_3, \ldots) = \Phi_{\mathbf{x}}(X_1, -\infty, X_3, \ldots) = \ldots = 0, \\ &\Phi_{\mathbf{x}}(+\infty, +\infty, +\infty, \ldots) = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (18.2\text{-}11)$$

18.3. ОДНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

18.3-1. Дискретные одномерные распределения вероятностей (примеры см. в табл. 18.8-1—18.8-7). Действительная случайная величина x называется **дискретной**, если вероятности

$$p_x(X) \equiv p(X) \equiv \mathrm{P}\{x = X\} \qquad (18.3\text{-}1)$$

отличны от нуля только для счетного множества **спектральных значений** $X = X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots$ (**спектр** дискретной случайной величины). Каждое дискретное распределение вероятностей описывается или функцией (1) или *функцией распределения*

$$\Phi_x(X) \equiv \Phi(X) \equiv \mathrm{P}\{x < X\} = \sum_{X_{(i)} < X} p(X_{(i)}). \qquad (18.3\text{-}2a)$$

Функцию распределения удобно записывать с помощью единичной функции $U_+(t)$ такой, что $U_+(t) = 0$ при $t \leqslant 0$, $U_+(t) = 1$ при $t > 0$ (п. 21.9-1):

$$\Phi(X) = p(X_{(1)})\, U_+(X - X_{(1)}) + p(X_{(2)})\, U_+(X - X_{(2)}) + \ldots \qquad (18.3\text{-}2b)$$

В настоящем справочнике символ $\sum\limits_x y(x)$ обозначает сумму значений функции $y(x)$ по всем спектральным значениям дискретной случайной величины x. Заметим, что

$$\sum_x p(x) = \Phi(+\infty) = 1. \qquad (18.3\text{-}3)$$

18.3-2. Непрерывные одномерные распределения вероятностей (примеры см. в табл. 18.8-11). Действительная случайная величина x называется **непрерывной,** если ее функция распределения $\Phi_x(X) \equiv \Phi(X)$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную — **плотность распределения вероятностей величины** x:

$$\varphi_x(X) \equiv \varphi(X) \equiv \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\mathrm{P}\{X \leqslant x < X + \Delta X\}}{\Delta X} = \frac{d\Phi}{dX}. \qquad (18.3\text{-}4)$$

---

*) В некоторых руководствах функция распределения определяется несколько иначе: $\Phi(X) \equiv \mathrm{P}\{x \leqslant X\}$.

Дифференциал $d\Phi = \varphi(X)\,dX \approx \mathsf{P}\{X \leqslant x < X + dX\}$ называется **элементом вероятности.** Отметим формулы

$$\mathsf{P}\{x < X\} \equiv \Phi(X) = \int_{-\infty}^{X} \varphi(x)\,dx,$$

$$\mathsf{P}\{a \leqslant x < b\} = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_{a}^{b} \varphi(x)\,dx, \qquad (18.3\text{-}5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \Phi(\infty) = 1. \qquad (18.3\text{-}6)$$

Если x — непрерывная случайная величина, то каждое событие $\{x = X\}$ имеет вероятность нуль, но *не обязательно является невозможным.* **Спектром** непрерывной случайной величины x называется множество значений $x = X$, в которых $\varphi(X) \neq 0$.

18.3-3. Математическое ожидание и дисперсия. Числовые характеристики одномерного распределения вероятностей (см. также п. 18.3-6).

(a) **Математическое ожидание (среднее значение) функции** $y(x)$ от дискретной или непрерывной случайной величины x есть

$$\mathsf{M}\,y(x) = \begin{cases} \sum\limits_{x} y(x)\,p(x) & (x \text{ дискретна}), \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} y(x)\,\varphi(x)\,dx & (x \text{ непрерывна}), \end{cases} \qquad (18.3\text{-}7)$$

если эти выражения существуют в смысле абсолютной сходимости (см. пп. 4.6-2).

(b) В частности, **математическое ожидание (среднее значение, центр распределения)** $\mathsf{M}x = \xi$ и **дисперсия** $\mathsf{D}x = \sigma^2$ дискретной или непрерывной случайной величины x определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{M}x = \xi &= \begin{cases} \sum\limits_{x} x\,p(x) & (x \text{ дискретна}), \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi(x)\,dx & (x \text{ непрерывна}), \end{cases} \\ \mathsf{D}x = \sigma^2 = \mathsf{M}(x - \xi)^2 &= \begin{cases} \sum\limits_{x} (x-\xi)^2\,p(x) & (x \text{ дискретна}), \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\xi)^2\,\varphi(x)\,dx & (x \text{ непрерывна}). \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (18.3\text{-}8)$$

Для вычисления дисперсии можно применять формулы

$$\mathsf{D}x = \sigma^2 = \mathsf{M}x^2 - \xi^2 = \mathsf{M}x(x-1) - \xi(\xi - 1). \qquad (18.3\text{-}9)$$

Если существуют $\mathsf{M}x$ и $\mathsf{D}x$, то средний квадрат отклонения $\mathsf{M}(x - X)^2 = \sigma^2 + (\xi - X)^2$ случайной величины x от данного числа X будет наименьшим (и равным σ^2) при $X = \xi$.

(c) $\mathsf{M}x$ и $\mathsf{D}x$ *не являются* функциями от x; это — ***функционалы*** (п. 12.1-4), описывающие свойства *распределения* случайной величины x : $\mathsf{M}x$ характеризует *положение величины* x, а $\mathsf{D}x$ — ее *рассеяние.* Определения других числовых характеристик одномерного распределения вероятностей даны в табл. 18.3-1 и в пп. 18.3-7 и 18.3-9. Заметим, что некоторые параметры типа $\mathsf{M}x$, $\mathsf{D}x$, $\mathsf{M}\,|x - \xi|$, ... могут не существовать у данного распределения вероятностей.

(d) Табл. 18.8-1 — 18.8-7 и 18.8-11 дают математические ожидания и дисперсии некоторых часто употребляемых распределений.

Таблица 18.3-1

Числовые характеристики одномерных распределений вероятностей

(см. также пп. 18.3-3, 18.3-7, 18.3-9)

(a) **Квантили. Квантиль порядка** P одномерного распределения есть такое значение x_P случайной величины x, для которого

$$\mathrm{P}\{x < x_P\} = \Phi(x_P) = P \qquad (0 < P < 1).$$

$x_{1/2}$ есть медиана распределения. **Квартили** $x_{1/4}$, $x_{1/2}$, $x_{3/4}$, **децили** $x_{0,1}$, $x_{0,2}$, ..., $x_{0,9}$ и **процентили** $x_{0,01}$, $x_{0,02}$, ..., $x_{0,99}$ делят область изменения x соответственно на 4, 10 и 100 интервалов, попадания в которые имеют равные вероятности.

Квантили существуют у каждого распределения вероятностей, но они не обязательно однозначно определены. Таблицы квантилей широко используются в статистике (пп. 19.5-3, 19.5-4).

(b) **Характеристики положения.**

1. **Центр распределения (математическое ожидание)** $\mathrm{M}x = \xi$ (п. 18.3-3).

2. **Медиана** $x_{1/2}$ (см. выше).

3. **Мода** *непрерывного* распределения есть точка максимума плотности распределения вероятностей $\varphi(x)$. Мода *дискретного* распределения есть такое спектральное значение ξ_m, что предшествующее и следующее за ним спектральные значения имеют вероятности, меньшие чем $p(\xi_m)$.

Распределения, имеющие одну, две или более мод, называются соответственно **одномодальными, двухмодальными или многомодальными.**

(c) **Характеристики рассеяния.**

1. **Дисперсия** $\sigma^2 = \mathrm{D}x$ (п. 18.3-3).

2. **Среднее квадратическое отклонение (стандарт)** $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}x}$.

3. **Коэффициент вариации** σ/ξ.

4. **Среднее абсолютное отклонение** $\mathrm{M}\,|x - \xi|$.

5. **Интерквартильная широта** $x_{3/4} - x_{1/4}$ и **(10—90)-процентильная широта** $x_{0,9} - x_{0,1}$.

6. **Размах** (разность между наибольшим и наименьшим спектральными значениями).

7. **Полуширота** одномодального непрерывного распределения есть полуразность двух значений величины x, в которых

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\max\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi(\xi_m).$$

(d) **Характеристики асимметрии и эксцесса.** Первые две из вводимых ниже характеристик определяются через моменты (см. пп. 18.3-7 и 18.3-9).

1. **Коэффициент асимметрии** $\gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \dfrac{\varkappa_3}{\varkappa_2^{3/2}}$.

2. **Коэффициент эксцесса** $\gamma_2 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \dfrac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}$.

3. **Пирсоновская мера асимметрии** для одномодального распределения $s = \dfrac{\xi - \xi_m}{\sigma}$ (см. также п. 19.3-5).

Вместо величин γ_1 и γ_2 употребляются также γ_1^2 и $\gamma_2 + 3$ или $\frac{1}{2}(\gamma_2 + 3)$.

18.3-4. Нормирование. Если известно, что функция $\psi(x) \geqslant 0$ пропорциональна вероятности $p(x)$ дискретной случайной величины x (п. 18.3-1), то

$$p(x) = \frac{1}{k}\psi(x) = \frac{\psi(x)}{\sum\limits_x \psi(x)}; \qquad \mathbf{M}\,y(x) = \frac{\sum\limits_x y(x)\psi(x)}{\sum\limits_x \psi(x)}. \tag{18.3-10}$$

Если функция $\psi(x) \geqslant 0$ пропорциональна плотности $\varphi(x)$ распределения непрерывной случайной величины x (п. 18.3-2), то

$$\varphi(x) = \frac{1}{k}\psi(x) = \frac{\psi(x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,dx}; \qquad \mathbf{M}\,y(x) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(x)\psi(x)\,dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,dx}. \tag{18.3-11}$$

В обоих случаях $1/k$ называется **нормирующим множителем**. Подобный метод применим и в случае многомерных распределений.

18.3-5. ⁎ Неравенство Чебышева и связанные с ним формулы. Неравенство Чебышева дает оценку сверху для вероятности того, что абсолютное отклонение $|x-\xi|$ случайной величины x от ее центра распределения $\xi = \mathbf{M}x$ превзойдет данное число

$$\mathbf{P}\{|x-\xi| \geqslant a\} \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2} \qquad (a > 0). \tag{18.3-12}$$

Если все значения $x \geqslant 0$, то имеет место оценка

$$\mathbf{P}\{x \geqslant a\} \leqslant \frac{\xi}{a} \qquad (a > 0). \tag{18.3-13}$$

Если x имеет непрерывное одномодальное распределение, то справедлива более сильная оценка

$$\mathbf{P}\{|x-\xi| \geqslant a\} \leqslant \frac{4}{9}\,\frac{1+s^2}{\left(\frac{a}{\sigma} - |s|\right)^2}, \tag{18.3-14}$$

где s — пирсоновская мера асимметрии (табл. 18.3-1); заметим, что $s = 0$, если распределение симметрично относительно моды.

18.3-6. Единое описание распределений вероятностей с помощью интеграла Стилтьеса. Изучение дискретных и непрерывных распределений вероятностей можно объединить, если представить вероятность каждого события $\{a \leqslant x < b\}$ как интеграл Лебега—Стилтьеса (п. 4.6-17)

$$\mathbf{P}\{a \leqslant x < b\} = \int\limits_a^b d\Phi(x), \tag{18.3-15}$$

где $\Phi(x) \equiv \mathbf{P}\{x < X\}$ — функция распределения случайной величины x (пп. 18.2-9, 18.3-1, 18.3-2). В случае непрерывного распределения интеграл (15) приводится к интегралу Римана. В случае дискретного распределения функция $\Phi(x)$ определяется формулой (2) и интеграл (15) приводится к сумме $\sum\limits_{a \leqslant x < b} p(x)$.

С помощью интеграла Стилтьеса мы получаем единые выражения

$$\mathbf{M}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,d\Phi(x); \qquad \mathbf{M}\,y(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y(x)\,d\Phi(x); \qquad \mathbf{D}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\xi)^2\,d\Phi(x) \tag{18.3-16}$$

как для дискретного, так и для непрерывного распределений. Интеграл

Стилтьеса применим также и к более общим распределениям, в частности. к распределениям, которые частично дискретны, а частично непрерывны. Аналогичные понятия применяются в случае многомерных распределений (пп. 18.4-4 и 18.4-8).

18.3-7. Моменты одномерного распределения вероятностей.

(a) **Моментом порядка** $r \geqslant 0$ случайной величины x относительно числа X называется математическое ожидание $\mathrm{M}(x-X)^r$.

(b) В частности, **начальный момент порядка** r (относительно $X=0$) есть

$$\alpha_r = \mathrm{M}x^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \, d\Phi(x) = \begin{cases} \sum_x x^r p(x) & (x \text{ дискретна}), \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r \varphi(x)\, dx & (x \text{ непрерывна}). \end{cases} \qquad (18.3\text{-}17)$$

Центральный момент порядка r (относительно центра распределения $\xi = \mathrm{M}\,x$) есть

$$\mu_r = \mathrm{M}(x-\xi)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\xi)^r \, d\Phi(x) = \begin{cases} \sum_x (x-\xi)^r p(x) & (x \text{ дискретна}), \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\xi)^r \varphi(x)\, dx & (x \text{ непрерывна}). \end{cases} \qquad (18.3\text{-}18)$$

Если существует величина α_r *или* μ_r, *то существуют все моменты* α_k *и* μ_k *порядков* $k \leqslant r$; *если интеграл (или ряд) для* α_r *или* μ_r *расходится, то расходятся все интегралы (ряды) для* α_k *и* μ_k *порядков* $k \geqslant r$.

Если распределение вероятностей симметрично относительно своего центра, то все (существующие) центральные моменты μ_r нечетного порядка r равны нулю.

(c) **Факториальным моментом порядка** r случайной величины x относительно $X=0$ называется

$$\alpha_{[r]} = \mathrm{M}x^{[r]} = \mathrm{M}x(x-1)\dots(x-r+1). \qquad (18.3\text{-}19)$$

Центральным факториальным моментом порядка r называется $\mathrm{M}(x-\xi)^{[r]}$.

Абсолютным моментом порядка r относительно $X=0$ называется $\beta_r = \mathrm{M}\,|x|^r$.

Отметим формулы

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{M}(x-X)^2 = \mu_2 + (\xi - X)^2 \geqslant \mu_2; \\ &\sqrt[r]{\beta_r} \leqslant \sqrt[r+1]{\beta_{r+1}}, \\ &\alpha_0 = \mu_0 = \alpha[0] = \beta_0 = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (18.3\text{-}20)$$

(d) *Одномерное распределение вероятностей однозначно определяется своими моментами* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$, *если все они существуют и если ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|\, s^k}{k!}$ *сходится при некотором* $s > 0$ (см. также соотношение (28) и сноску на стр. 548).

(e) Примеры приведены в табл. 18.8-1—18.8-7; в п. 18.3-10 указана связь между α_r, μ_r и $\alpha_{[r]}$.

18.3-8. Характеристические и производящие функции (примеры см. в табл. 18.8-1 — 18.8-8).

(a) По распределению вероятностей одномерной случайной величины x однозначно определяется (в общем случае комплексная) **характеристическая функция**

$$\chi_x(q) \equiv \mathsf{M}e^{iqx} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqx}\, d\Phi(x) = \begin{cases} \sum_x e^{iqx} p(x) & (x \text{ дискретна}), \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqx}\varphi(x)\, dx & (x \text{ непрерывна}), \end{cases} \tag{18.3-21}$$

где q — действительная переменная, изменяющаяся от $-\infty$ до $+\infty$.

(b) По распределению вероятностей случайной величины x однозначно определяются **производящая функция моментов**

$$M_x(s) \equiv \mathsf{M}e^{sx} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}\, d\Phi(x) = \begin{cases} \sum_x e^{sx} p(x) & (x \text{ дискретна}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}\varphi(x)\, dx & (x \text{ непрерывна}) \end{cases} \tag{18.3-22}$$

и производящая функция факториальных моментов

$$\gamma_x(s) \equiv \mathsf{M}s^x \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s^x\, d\Phi(x) = \begin{cases} \sum_x s^x p(x) & (x \text{ дискретна}), \\ \int_{-\infty}^{\infty} s^x\varphi(x)\, dx & (x \text{ непрерывна}), \end{cases} \tag{18.3-23}$$

где s — любое комплексное число, для которого приведенные интегралы или ряды сходятся абсолютно.

(c) *Характеристическая функция* $\chi_x(q)$ *однозначно определяет распределение вероятностей*[1]). *Это же справедливо и для каждой из функций* $M_x(s)$ *и* $\gamma_x(s)$, *если они существуют в смысле абсолютной сходимости в некотором интервале действительной оси, включающем точку* $s=0$ *в случае* $M_x(s)$ *или точку* $s=1$ *в случае* $\gamma_x(s)$. В частности, для дискретной или непрерывной случайной величины x имеем

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= \lim_{Q\to\infty} \frac{1}{2Q}\int_{-Q}^{Q} e^{-iqx}\chi_x(q)\, dq \quad (x \text{ дискретна}), \\ \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx}\chi_x(q)\, dq \qquad (x \text{ непрерывна}). \end{aligned}\right\} \tag{18.3-24}$$

Формула (24) дает также выражение $p(x)$ или $\varphi(x)$ через $M_x(s)$, так как

$$M_x(iq) = \chi_x(q). \tag{18.3-25}$$

(d) Во многих задачах бывает значительно легче описать распределение вероятностей через $\chi_x(q)$, $M_x(s)$ или $\gamma_x(s)$, чем вычислить непосредственно $\Phi(x)$, $p(x)$ или $\varphi(x)$ (пп. 18.5-3, 18.5-7 и 18.5-8). Методы п. 18.3-10 позволяют просто вычислять математическое ожидание, дисперсию и моменты через $\chi_x(q)$, $M_x(s)$ или $\gamma_x(s)$. Линейные инте-

---

[1]) $\Phi(x)$ определяется однозначно, за возможным исключением множества точек меры нуль; если $\Phi(x)$ непрерывна, то она определяется однозначно (см. также п. 18.2-9).

гральные преобразования с (21) по (24) можно осуществлять с помощью таблиц преобразования Фурье или Лапласа.

(е) Производящая функция $\gamma_x(s)$ применяется, в частности, в задачах, содержащих дискретные распределения со спектром 0, 1, 2, ..., для которых

$$\gamma_x(s) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} s^k p(k), \qquad p(k) = \frac{1}{k!}\gamma_x^{(k)}(0) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

18.3-9. Семиинварианты (см. также п. 18.3-10). Если для одномерного распределения вероятностей существует момент r-го порядка α_r, то существуют **семиинварианты** $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$, определяемые разложением

$$\ln \chi_x(q) = \sum_{k=1}^{r} \varkappa_k \frac{(iq)^k}{k!} + o(q^r). \tag{18.3-26}$$

При условиях п. 18.3-7, d все семиинварианты существуют и однозначно определяют распределение вероятностей.

18.3-10. Вычисление моментов и семиинвариантов через $\chi_x(q)$, $M_x(s)$ и $\gamma_x(s)$. Соотношения между моментами и семиинвариантами. Многие характеристики распределения могут быть вычислены непосредственно по $\chi_x(q)$, $M_x(s)$ и $\gamma_x(s)$ без предварительного нахождения $\Phi(x)$, $p(x)$ или $\varphi(x)$. Если рассматриваемые далее выражения существуют, то

$$\alpha_r = i^{-r}\chi_x^{(r)}(0) = M_x^{(r)}(0); \qquad \alpha_{[r]} = \gamma_x^{(r)}(1),$$

$$\varkappa_r = i^{-r}\frac{d^r}{dq^r}\ln \chi_x(q)\Big|_{q=0} = \frac{d^r}{ds^r}\ln M_x(s)\Big|_{s=0}. \tag{18.3-27}$$

Заметим, что

$$M_x(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{s^k}{k!}; \qquad \ln M_x(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k \frac{s^k}{k!}; \qquad \gamma_x(s+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{[k]} \frac{s^k}{k!}, \tag{18.3-28}$$

если только стоящие слева функции (**производящая функция моментов, производящая функция семиинвариантов и производящая функция факториальных моментов** соответственно) аналитичны в окрестности точки $s = 0$.

Из формул (28) можно получить $\mathsf{M}x$ и $\mathsf{D}x$:

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{M}x &= \xi = \alpha_1 = \alpha_{[1]} = \varkappa_1, \\ \mathsf{D}x &= \sigma^2 = \mu_2 = \alpha_2 - \xi^2 = \alpha_{[2]} - \xi(\xi - 1) = \varkappa_2. \end{aligned}\right\} \tag{18.3-29}$$

В табл. 18.3-1 указаны и другие характеристики, которые могут быть выражены через моменты.

Следующие формулы связывают моменты и семиинварианты

$$\mu_r = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \alpha_{r-k}\xi^k; \quad \alpha_r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \mu_{r-k}\xi^k \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots), \tag{18.3-30}$$

$$\alpha_{[r]} = \sum_{k=0}^{r-1} S_k^r \alpha_{r-k} \quad (r = 0, 1, 2, \ldots, \text{ см. также п. 21.5-3}), \tag{18.3-31}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_{[2]} + \alpha_{[1]} = \varkappa_2 + \varkappa_1^2, \\ \alpha_3 &= \alpha_{[3]} + 3\alpha_{[2]} + \alpha_{[1]} = \varkappa_3 + 3\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_1^3; \\ \alpha_4 &= \alpha_{[4]} + 6\alpha_{[3]} + 7\alpha_{[2]} + \alpha_{[1]} = \varkappa_4 + 6\varkappa_1^2\varkappa_2 + 4\varkappa_1\varkappa_3 + 3\varkappa_2^2 + \varkappa_1^4, \end{aligned}\right\} \tag{18.3-32}$$

$$\mu_3 = \varkappa_3; \quad \mu_4 = \varkappa_4 + 3\varkappa_2^2, \tag{18.3-33}$$

$$\varkappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2, \quad \varkappa_5 = \mu_5 - 10\mu_2\mu_3, \quad \varkappa_6 = \mu_6 - 15\mu_2\mu_4 - 10\mu_3^2 + 30\mu_2^3. \tag{18.3-34}$$

18.4. МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

18.4-1. ✳ **Многомерные случайные величины** (см. также п. 18.2-9). Если случайное событие описывается упорядоченным набором действительных чисел $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то этот набор представляет значение **n-мерной случайной величины** $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Можно также говорить о **системе случайных величин** или о **n-мерном случайном векторе**. Каждое элементарное событие может рассматриваться как результат сложного испытания, состоящего в измерении всех величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и интерпретироваться как точка n-мерного пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или как вектор $\mathbf{x}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Каждая из величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ является случайной величиной (одномерной). Если говорят, что $\mathbf{x}$ — случайный вектор (или n-мерная случайная величина), то величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют его *случайными координатами*.

18.4-2. Двумерные распределения вероятностей. Распределения координат случайной величины. Распределение системы двух случайных величин x_1, x_2 или двумерного случайного вектора $\mathbf{x}\{x_1, x_2\}$ задается функцией совместного распределения

$$\Phi_x(X_1, X_2) \equiv \Phi(X_1, X_2) \equiv \mathrm{P}\{x_1 < X_1;\ x_2 < X_2\}. \tag{18.4-1}$$

Каждая из случайных величин x_1 и x_2 (координаты случайного вектора) определяется соответствующей функцией распределения (одномерной)

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(X_1) &\equiv \mathrm{P}\{x_1 < X_1\} \equiv \mathrm{P}\{x_1 < X_1;\quad x_2 < \infty\} = \Phi(X_1, \infty), \\ \Phi_2(X_2) &\equiv \mathrm{P}\{x_2 < X_2\} \equiv \mathrm{P}\{x_1 < \infty;\ x_2 < X_2\} = \Phi(\infty, X_2). \end{aligned}\right\} \tag{18.4-2}$$

Отметим, что функция (1) полностью определяет функции (2). Наоборот, функции (2) определяют функцию (1) только при условии, что случайные величины x_1 и x_2 *независимы* (см. п. 18.4-11).

18.4-3. Дискретные и непрерывные двумерные распределения вероятностей.

(a) Двумерная случайная величина $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$ называется **дискретной** (имеет **дискретное распределение вероятностей**), если **совместная вероятность** выполнения условий $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2$

$$p_x(X_1, X_2) \equiv p(X_1, X_2) \equiv \mathrm{P}\{x_1 = X_1;\ x_2 = X_2\} \tag{18.4-3}$$

отлична от нуля только для счетного множества (**спектра**) точек (X_1, X_2), т. е. если и x_1 и x_2 являются дискретными случайными величинами (п. 18.3-1). Распределения случайных координат x_1 и x_2 определяются вероятностями

$$\left.\begin{aligned} p_1(X_1) &\equiv \mathrm{P}\{x_1 = X_1\} = \sum_{x_2} p(X_1, X_2), \\ p_2(X_2) &\equiv \mathrm{P}\{x_2 = X_2\} = \sum_{x_1} p(X_1, X_2). \end{aligned}\right\} \tag{18.4-4}$$

(b) Двумерная случайная величина $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$ называется **непрерывной** (имеет **непрерывное распределение вероятностей**), если функция распределения $\Phi(X_1, X_2)$ непрерывна всюду и если **двумерная плотность распределения вероятностей**

$$\varphi_{\mathrm{x}}(X_1, X_2) \equiv \varphi(X_1, X_2) \equiv \frac{\partial^2 \Phi(X_1, X_2)}{\partial X_1 \partial X_2} \tag{18.4-5}$$

существует и кусочно-непрерывна. Дифференциал $\varphi(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$ называется **элементом вероятности. Спектр** непрерывного двумерного распределения вероятностей есть множество точек, в которых плотность распределения (5) от-

лична от нуля. Распределения координат x_1 и x_2 определяются плотностями распределения

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(X_1) &\equiv \frac{d\Phi_1(X_1)}{dX_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(X_1, x_2)\,dx_2, \\ \varphi_2(X_2) &\equiv \frac{d\Phi_2(X_2)}{dX_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, X_2)\,dx_1. \end{aligned}\right\} \quad (18.4\text{-}6)$$

(c) Отметим формулы

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{x_1}\sum_{x_2} p(x_1, x_2) = \sum_{x_1} p_1(x_1) = \sum_{x_2} p_2(x_2) = 1, \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x_1)\,dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x_2)\,dx_2 = 1. \end{aligned}\right\} \quad (18.4\text{-}7)$$

18.4-4. Математическое ожидание, моменты, ковариация и коэффициент корреляции.

(а) Математическое ожидание (среднее значение) функции $y(x_1, x_2)$ двух случайных величин x_1, x_2 определяется через их совместное распределение формулой

$$\mathsf{M}y(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y(x_1, x_2)\,d\Phi(x_1, x_2) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{x_1}\sum\limits_{x_2} y(x_1, x_2)\,p(x_1, x_2) & \text{для дискретного распределения,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(x_1, x_2)\,\varphi(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 & \text{для непрерывного распределения,} \end{cases} \quad (18.4\text{-}8)$$

если эти выражения существуют в смысле абсолютной сходимости.

Замечание. Если y есть функция только одного x_1, то среднее значение (8) совпадает со средним значением, определенным по распределению величины x_1.

(b) Средние значения (математические ожидания) $\mathsf{M}x_1 = \xi_1$, $\mathsf{M}x_2 = \xi_2$ определяют точку (ξ_1, ξ_2), называемую **центром совместного распределения вероятностей (центром рассеяния)**. Величины $\mathsf{M}(x_1 - X_1)^{r_1}(x_2 - X_2)^{r_2}$ называются **моментами порядка $r_1 + r_2$ относительно точки** (X_1, X_2). В частности, моменты порядка $r_1 + r_2$ относительно начала (**начальные моменты**) и относительно центра распределения (**центральные моменты**) определяются соответственно формулами (см. также п. 18.3-7):

$$\alpha_{r_1 r_2} = \mathsf{M}x_1^{r_1}x_2^{r_2}; \qquad \mu_{r_1 r_2} = \mathsf{M}(x_1 - \xi_1)^{r_1}(x_2 - \xi_2)^{r_2}. \quad (18.4\text{-}9)$$

(c) Центральные моменты второго порядка представляют особый интерес и имеют специальные названия и обозначения

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned}\lambda_{11} &= \mathsf{M}(x_1 - \xi_1)^2 = \mathsf{D}x_1 = \sigma_1^2, \\ \lambda_{22} &= \mathsf{M}(x_2 - \xi_2)^2 = \mathsf{D}x_2 = \sigma_2^2\end{aligned}\right\} \text{(дисперсии } x_1 \text{ и } x_2\text{)}, \\ &\lambda_{12} = \lambda_{21} = \mathsf{M}(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) = \operatorname{cov}\{x_1, x_2\} \\ &\text{(ковариация } x_1 \text{ и } x_2\text{, корреляционный момент, смешанный момент второго порядка),} \\ &\rho_{12} = \rho_{21} = \rho(x_1, x_2) = \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{22}}} = \mathsf{M}\,\frac{x_1 - \xi_1}{\sigma_1}\,\frac{x_2 - \xi_2}{\sigma_2} \\ &\text{(коэффициент корреляции между } x_1 \text{ и } x_2\text{).} \end{aligned}\right\} \quad (18.4\text{-}10)$$

Заметим, что

$$-1 \leqslant \rho_{12} \leqslant 1, \qquad \lambda_{12} = \mathsf{M} x_1 x_2 - \xi_1 \xi_2 = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2. \tag{18.4-11}$$

18.4-5. Условные распределения вероятностей, связанные с двумя случайными величинами.

(a) Распределение системы двух случайных величин x_1, x_2 определяет **условное распределение величины** x_1 при $x_2 = X_2$, и **условное распределение величины** x_2 **при** $x_1 = X_1$. В случае **дискретного** совместного распределения эти условные распределения также являются дискретными и описываются **условными вероятностями** (п. 18.2-2):

$$\begin{aligned} p_{1|2}(X_1 \mid X_2) &\equiv \mathsf{P}\{x_1 = X_1 \mid x_2 = X_2\} = \frac{p(X_1, X_2)}{p_2(X_2)}, \\ p_{2|1}(X_2 \mid X_1) &\equiv \mathsf{P}\{x_2 = X_2 \mid x_1 = X_1\} = \frac{p(X_1, X_2)}{p_1(X_1)}. \end{aligned} \tag{18.4-12}$$

В случае **непрерывного** совместного распределения условные распределения величин x_1 и x_2 также являются непрерывными и описываются **условными плотностями распределений:**

$$\varphi_{1|2}(X_1 \mid X_2) = \frac{\varphi(X_1, X_2)}{\varphi_2(X_2)}; \qquad \varphi_{2|1}(X_2 \mid X_1) = \frac{\varphi(X_1, X_2)}{\varphi_1(X_1)}. \tag{18.4-13}$$

(b) Отметим формулы

$$\begin{gathered} \sum_{x_1} p_{1|2}(X_1|X_2) = \sum_{x_2} p_{2|1}(X_2|X_1) = 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{1|2}(x_1|x_2)\,dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2|1}(x_2|x_1)\,dx_2 = 1, \end{gathered} \tag{18.4-14}$$

$$\left.\begin{aligned} p_{1|2}(X_1|X_2) &= \frac{p_1(X_1)\,p_{2|1}(X_2|X_1)}{\sum\limits_{x_1} p_1(x_1)p_{2|1}(X_2|x_1)}, \\ p_{2|1}(X_2|X_1) &= \frac{p_2(X_2)p_{1|2}(X_1|X_2)}{\sum\limits_{x_2} p_2(x_2)\,p_{1|2}(X_1|x_2)}, \\ \varphi_{1|2}(X_1|X_2) &= \frac{\varphi_1(X_1)\,\varphi_{2|1}(X_2|X_1)}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x_1)\,\varphi_{2|1}(X_2|x_1)\,dx_1}, \\ \varphi_{2|1}(X_2|X_1) &= \frac{\varphi_2(X_2)\,\varphi_{1|2}(X_1|X_2)}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x_2)\,\varphi_{1|2}(X_1|x_2)\,dx_2}. \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}(\textit{формулы} \\ \textit{Байеса}, \\ \text{см. также} \\ \text{п. 18.2-6)}\end{array} \tag{18.4-15}$$

(c) Если дано дискретное или непрерывное распределение вероятностей системы двух случайных величин x_1 и x_2, то **условное математическое ожидание функции** $y(x_1, x_2)$ **при** $x_1 = X_1$ есть

$$\mathsf{M}\{y(x_1, x_2)|X_1\} = \begin{cases} \sum\limits_{x_2} y(X_1, x_2)\,p_{2|1}(x_2|X_1) & \text{для дискретного распределения}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} y(X_1, x_2)\,\varphi_{2|1}(x_2|X_1)\,dx_2 & \text{для непрерывного распределения}, \end{cases} \tag{18.4-16}$$

если эти выражения существуют в смысле абсолютной сходимости. Заметим, что $\mathsf{M}\{y(x_1, x_2)|X_1\}$ есть функция от X_1.

Пример. **Условные дисперсии** величин x_1 и x_2 равны соответственно

$$\left.\begin{aligned} D\{x_1|X_2\} &= M\{(x_1 - M\{x_1|X_2\})^2|X_2\}, \\ D\{x_2|X_1\} &= M\{(x_2 - M\{x_2|X_1\})^2|X_1\}. \end{aligned}\right\} \tag{18.4-17}$$

18.4-6. Регрессии (см. также пп. 18.4-9 и 19.7-2).

(a) Если дано распределение системы двух случайных величин x_1 и x_2, то **регрессией** x_2 **на** x_1 называется любая функция $g_2(x_1)$, приближенно представляющая статистическую зависимость x_2 от x_1. При этом величина x_2 представляется как сумма двух случайных величин

$$x_2 = g_2(x_1) + h_2(x_1, x_2), \tag{18.4-18}$$

где $h_2(x_1, x_2)$ рассматривается в качестве поправочного члена *(остатка)*.

В частности, *средняя квадратическая регрессия* x_2 *на* x_1

$$g_2(x_1) \equiv M\{x_2|x_1\} = \begin{cases} \sum\limits_{x_2} x_2 p_{2|1}(x_2|x_1) & \text{для дискретного распределения,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_2 \varphi_{2|1}(x_2|x_1)\,dx_2 & \text{для непрерывного распределения} \end{cases} \tag{18.4-19}$$

минимизирует средний квадрат отклонения

$$M[x_2 - g_2(x_1)]^2 = M[h_2(x_1, x_2)]^2. \tag{18.4-20}$$

Соответствующая кривая $x_2 = M\{x_2|x_1\}$ называется **кривой средней квадратической регрессии величины** x_2.

(b) Часто оказывается достаточным аппроксимировать регрессию (19) линейной функцией

$$g_2(x_1) \equiv g_2^{(1)}(x_1) = \xi_2 + \beta_{21}(x_1 - \xi_1); \quad \beta_{21} = \rho_{12}\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{ (линейная регрессия } x_2 \text{ на } x_1). \tag{18.4-21}$$

Уравнение (21) описывает прямую линию — **прямую регрессии величины** x_2; β_{21} есть **коэффициент регрессии** x_2 **на** x_1. Формула (21) представляет линейную функцию $ax_1 + b$, коэффициенты которой $a = \beta_{21}$ и $b = \xi_2 - \beta_{21}\xi_1$ минимизируют средний квадрат отклонения

$$M[x_2 - (ax_1 + b)]^2 = \sigma_2^2 + a^2\sigma_1^2 - 2a\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + [\xi_2 - (a\xi_1 + b)]^2.$$

Наименьший средний квадрат отклонения *(остаточная дисперсия)* равен $\sigma_2^2(1 - \rho_{12}^2)$; таким образом, *коэффициент корреляции* ρ_{12} *измеряет качество «наилучшего» линейного приближения.*

(c) Регрессия (19) может быть аппроксимирована более точно с помощью многочлена степени $m > 1$ (**параболическая регрессия порядка** m) или с помощью других функций, коэффициенты которых выбираются так, чтобы минимизировать отклонение (20).

(d) Если рассматривать в качестве независимой переменной величину x_2, то мы получим подобным образом среднюю квадратическую регрессию x_1 на x_2:

$$g_1(x_2) = M\{x_1|x_2\}, \tag{18.4-22}$$

и линейную регрессию x_1 на x_2:

$$g_1^{(1)}(x_2) = \xi_1 + \beta_{12}(x_2 - \xi_2); \quad \beta_{12} = \rho_{12}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \tag{18.4-23}$$

Заметим, что в общем случае ни функции (19) и (22), ни функции (21) и (23) не являются взаимно обратными. Все линии регрессии проходят через центр (ξ_1, ξ_2) распределения вероятностей.

18.4-7. n-мерные распределения вероятностей.

(a) Распределение системы n случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или n-мерного случайного вектора x задается функцией совместного распределения

$$\Phi_{\mathbf{x}}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \equiv \Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = P\{x_1 < X_1, x_2 < X_2, \ldots, x_n < X_n\} \tag{18.4-24}$$

(п. 18.2-9). Распределение подсистемы $m < n$ величин $x_1, x_2, \ldots, x_m$ есть m-мерное распределение, получаемое из исходного распределения (**маргинальное распределение**). Соответствующая m-**мерная функция распределения** (**маргинальная функция распределения**) получается из n-мерной функции распределения (24) подстановкой $X_j = \infty$ для каждого из $n-m$ аргументов X_j, которые не входят в выбранную подсистему, например,

$$\Phi_{12}(X_1, X_2) = \Phi(X_1, X_2, \infty, \ldots, \infty);$$
$$\Phi_2(X_2) = \Phi(\infty, X_2, \infty, \ldots, \infty), \quad \text{и т. д.}$$

(b) n-мерная случайная величина $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **дискретной** (имеет **дискретное распределение вероятностей**), если совместные вероятности

$$p_{\mathbf{x}}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \equiv p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \mathrm{P}\{x_1 = X_1, x_2 = X_2, \ldots, x_n = X_n\} \qquad (18.4\text{-}25)$$

отличны от нуля лишь для счетного множества (**спектра**) точек $(X_1, \ldots, X_n)$, т. е. если каждая из величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дискретна (см. также пп. 18.3-1 и 18.4-3, a).

Распределения подсистем случайных величин и условные распределения определяются так же, как в пп. 18.4-3,a и 18.4-5,a, т. е.

$$p_{12}(X_1, X_2) = \sum_{x_3} \ldots \sum_{x_n} p(X_1, X_2, x_3, \ldots, x_n),$$
$$p_2(X_2) = \sum_{x_1} \sum_{x_3} \ldots \sum_{x_n} p(x_1, X_2, x_3, \ldots, x_n) = \sum_{x_1} p_{12}(x_1, X_2) \quad \text{и т. д.},$$
$$p_{1|2}(X_1 | X_2) = \frac{p_{12}(X_1, X_2)}{p_2(X_2)}; \qquad p_{1|23}(X_1 | X_2, X_3) = \frac{p_{123}(X_1, X_2, X_3)}{p_{23}(X_2, X_3)};$$
$$p_{23|1}(X_2, X_3 | X_1) = \frac{p_{123}(X_1, X_2, X_3)}{p_1(X_1)} \quad \text{и т. д.}$$

(c) n-мерная случайная величина $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **непрерывной** (имеет **непрерывное распределение вероятностей**), если функция распределения $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ непрерывна всюду и если плотность распределения вероятностей

$$\varphi_{\mathbf{x}}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \equiv \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{\partial^n \Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_1 \partial X_2 \ldots \partial X_n} \qquad (18.4\text{-}26)$$

существует и кусочно-непрерывна. Дифференциал

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

называется **элементом вероятности** (см. также пп. 18.3-2 и 18.4-3, b). **Спектр** непрерывного распределения вероятностей есть множество всех точек $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, в которых плотность распределения (26) отлична от нуля.

(d) Отметим формулы

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{x_1} \sum_{x_2} \ldots \sum_{x_n} p(x_1, x_2, \ldots x_n) = 1, \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (18.4\text{-}27)$$

(е) Плотности *m-мерных маргинальных распределений* и *условных распределений*, получаемых из непрерывного n-мерного распределения вероятностей, определяются так же, как в пп. 18.4-3, b и 18.4-5, a, например,

$$\varphi_{12}(X_1, X_2) \equiv \frac{\partial^2 \Phi_{12}(X_1, X_2)}{\partial X_1 \partial X_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(X_1, X_2, x_3, \dots, x_n)\, dx_3 \dots, dx_n,$$

$$\varphi_{1|2}(X_1 \mid X_2) = \frac{\varphi_{12}(X_1, X_2)}{\varphi_2(X_2)}, \qquad \varphi_{1|23}(X_1 \mid X_2, X_3) = \frac{\varphi_{123}(X_1, X_2, X_3)}{\varphi_{23}(X_2, X_3)};$$

$$\varphi_{12|3}(X_1, X_2 \mid X_3) = \frac{\varphi_{123}(X_1, X_2, X_3)}{\varphi_3(X_3)}.$$

(f) *Распределение системы двух или более многомерных случайных величин* $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots)$, $\mathbf{y} \equiv (y_1, y_2, \dots)$, ... есть совместное распределение всех величин $x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots; \dots$

Замечание. Совместное распределение может оказаться дискретным по одной или нескольким случайным величинам и непрерывным по другим; кроме того, каждая случайная координата может быть частично дискретной и частично непрерывной.

18.4-8. Математические ожидания и моменты (см. также п. 18.4-4).

(а) **Математическое ожидание (среднее значение)** функции $y = y(x_1, \dots, x_n)$ от n случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ определяется формулой

$$\mathrm{M}\, y(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} y(x_1, x_2, \dots, x_n)\, d\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{x_1} \sum\limits_{x_2} \dots \sum\limits_{x_n} y(x_1, x_2, \dots, x_n)\, p(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{(для дискретного распределения)}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} y(x_1, x_2, \dots, x_n)\, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n & \\ \qquad \text{(для непрерывного распределения)}, & \end{cases} \tag{18.4-28}$$

если эти выражения существуют в смысле абсолютной сходимости.

Замечание. Если y есть функция только $m < n$ из n случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, то математическое ожидание (28) совпадает с математическим ожиданием y по отношению к m-мерному распределению только рассматриваемых m величин.

(b) n математических ожиданий $\mathrm{M}x_1 = \xi_1$, $\mathrm{M}x_2 = \xi_2$, ..., $\mathrm{M}x_n = \xi_n$ определяют точку $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, которая называется **центром распределения вероятностей.** Величины $\mathrm{M}(x_1 - X_1)^{r_1}(x_2 - X_2)^{r_2} \dots (x_n - X_n)^{r_n}$ называются **моментами порядка** $r_1 + r_2 + \dots + r_n$ **относительно точки** $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. В частности, моменты относительно начала (**начальные моменты**) и относительно центра распределения (**центральные моменты**) определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{r_1 r_2 \dots r_n} &= \mathrm{M} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}, \\ \mu_{r_1 r_2 \dots r_n} &= \mathrm{M}(x_1 - \xi_1)^{r_1}(x_2 - \xi_2)^{r_2} \dots (x_n - \xi_n)^{r_n}. \end{aligned}\right\} \tag{18.4-29}$$

(с) **Центральные моменты второго порядка** представляют особый интерес и имеют специальные названия и обозначения:

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki} = \mathrm{M}(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \mathrm{D}x_i = \sigma_i^2 & \text{при} & i = k \text{ (дисперсия)}, \\ \operatorname{cov}\{x_i, x_k\} & \text{при} & i \neq k \text{ (ковариация)} \end{matrix} \right\} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \tag{18.4-30}$$

Эти моменты определяют **матрицу моментов** $[\lambda_{ik}]$. Ее определитель $\det[\lambda_{ik}]$

называется **обобщенной дисперсией** n-мерного распределения. **Коэффициенты корреляции**

$$\rho_{ik}=\rho(x_i,\ x_k)=\frac{\lambda_{ik}}{\sqrt{\lambda_{ii}\lambda_{kk}}}=\mathsf{M}\,\frac{x_i-\xi_i}{\sigma_i}\,\frac{x_k-\xi_k}{\sigma_k}\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\qquad(18.4\text{-}31)$$

определяют **корреляционную матрицу** $[\rho_{ik}]$ n-мерного распределения, если только все $\sigma_i\neq 0$. Величину

$$\sqrt{\det[\rho_{ik}]}=\frac{\sqrt{\det[\lambda_{ik}]}}{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}$$

иногда называют **коэффициентом разброса.**

Матрицы $[\lambda_{ik}]$ и $[\rho_{ik}]$ действительны и симметричны. Их общий ранг (п. 13.2-7) r есть **ранг n-мерного распределения вероятностей.**

*Распределение называется *собственным* или *несобственным* в зависимости от того, будет ли $r=n$ или $r<n$. В случае собственного распределения матрицы $[\lambda_{ik}]$ и $[\rho_{ik}]$ являются положительно определенными (п. 13.5-2).*

Эллипсоидом рассеяния для собственного n-мерного распределения вероятностей с центром в начале координат называется n-мерный «эллипсоид»

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Lambda_{ik}x_ix_k=n+2,\qquad(18.4\text{-}32)$$

где $[\Lambda_{ik}]=[\lambda_{ik}]^{-1}$ есть матрица, обратная матрице моментов.

Эллипсоид рассеяния обладает тем свойством, что при равномерном распределении вероятностей в нем матрица моментов такого распределения совпадает с $[\lambda_{ik}]$. Эллипсоид рассеяния иллюстрирует распределение вероятностей по различным направлениям. «Объем» этого эллипсоида пропорционален корню квадратному из обобщенной дисперсии. Для несобственного распределения вероятностей (при $r<n$) спектр (п.18.4-7) сосредоточен на некотором r-мерном линейном многообразии (прямой, плоскости, гиперплоскости) в n-мерном пространстве точек $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ и там же расположен его эллипсоид рассеяния. Так, например, спектр двумерного распределения вероятностей при $r=1$ лежит на прямой, а при $r=0$ находится в одной точке.

18.4-9. Регрессия. Коэффициенты корреляции (см. также пп. 18.4-6 и 19.7-2).

(a) Если дано совместное распределение n случайных величин $x_1,\ x_2,\ \ldots$ $\ldots,\ x_n$, то зависимость одной из этих величин, например x_1, от остальных $n-1$ величин можно изучать с помощью формулы

$$x_1=g_1(x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n)+h_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\qquad(18.4\text{-}33)$$

где $h_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ рассматривается как поправочный член.

(Средняя квадратическая) регрессия x_1 на $x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$ есть функция

$$\left.\begin{aligned}&g_1(x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n)\equiv\mathsf{M}\,\{x_1\,|\,x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n\}=\\&=\begin{cases}\sum\limits_{x_1}x_1\,p_{1|23\cdots n}(x_1|x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n), & \text{если } x_1 \text{ дискретна},\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}x_1\,\varphi_{1|23\cdots n}(x_1|x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n)\,dx_1, & \text{если } x_1 \text{ непрерывна},\end{cases}\end{aligned}\right\}\qquad(18.4\text{-}34)$$

которая минимизирует средний квадрат отклонения

$$\mathsf{M}\,[x_1-g_1(x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n)]^2=\mathsf{M}\,[(h_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)]^2.$$

$\mathsf{M}\,\{x_1|X_2,\ X_3,\ \ldots,X_n\}$ есть **условное среднее значение величины x_1 при $x_2=X_2$, $x_3=X_3,\ \ldots,\ x_n=X_n$** (см. также п. 18.4-5).

(b) Регрессия величины x_i на остальные $n-1$ величин часто аппроксимируется линейной функцией — *линейной регрессией*

$$g_i^{(1)}=\xi_i+\sum_{k\neq i}\beta_{ik}(x_k-\xi_k),\qquad \beta_{ik}=-\frac{\Lambda_{ik}}{\Lambda_{ii}},\qquad(18.4\text{-}35)$$

где $[\Lambda_{ik}] = [\lambda_{ik}]^{-1}$ есть матрица, обратная матрице моментов. **Коэффициенты регрессии** β_{ik} определяются единственным образом, если распределение — собственное (п. 18.4-8). **Сводный коэффициент корреляции**

$$\rho\left(x_i,\ g_i^{(1)}\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_{ii}\Lambda_{ii}}} \tag{18.4-36}$$

является мерой корреляции между x_i и остальными $n-1$ величинами.

(с) Случайная величина $h_i^{(1)} = x_i - g_i^{(1)}$ (разность между x_i и ее «линейной оценкой» $g_i^{(1)}$ при $\Lambda_{ii} \neq 0$) называется **остатком** x_i относительно остальных $n-1$ величин. Заметим, что

$$\operatorname{cov}\left\{h_i^{(1)},\ x_k\right\} = 0 \ (i \neq k),\ \mathsf{D}\, h_i^{(1)} = \frac{1}{\Lambda_{ii}} \ (\textit{остаточная дисперсия}). \tag{18.4-37}$$

(d) Коэффициент корреляции величин x_1 и x_2 по отношению к величинам $x_3, \ldots, x_n$:

$$\rho_{12\,|\,34\ldots n} = \rho\left(h^{(1)}_{1\,|\,34\ldots n},\ h^{(1)}_{2\,|\,34\ldots n}\right) = -\frac{\Lambda_{12}}{\sqrt{\Lambda_{11}\Lambda_{22}}} \tag{18.4-38}$$

измеряет корреляцию между x_1 и x_2 после устранения *линейных* изменений, вызванных влиянием величин $x_3, x_4, \ldots, x_n$. В частности, при $n=3$;

$$\rho_{12\,|\,3} = \frac{\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{(1-\rho_{13}^2)(1-\rho_{23}^2)}}.$$

18.4-10. Характеристические функции (см. также п. 18.3-8). Совместное распределение вероятностей n-мерной случайной величины $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ однозначно определяет **характеристическую функцию**

$$\chi_{\mathbf{x}}(\mathbf{q}) \equiv \chi_{\mathbf{x}}(q_1, q_2, \ldots, q_n) \equiv \mathsf{M}\ \exp\left(i\sum_{k=1}^{n} q_k x_k\right) \equiv$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\sum_{k=1}^{n} q_k x_k\right) d\Phi_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{18.4-39}$$

Для непрерывного распределения имеет место формула обращения

$$\varphi_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\sum_{k=1}^{n} q_k x_k\right)\chi_{\mathbf{x}}(q_1, q_2, \ldots, q_n)\, dq_1 dq_2 \ldots dq_n. \tag{18.4-40}$$

Характеристическая функция, соответствующая m-мерному маргинальному распределению m из n величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, находится путем подстановки в формулу (39) значений $q_k = 0$ для всех тех x_k, которые не входят в m-мерное распределение; так, например, $\chi_{12}(q_1, q_2) = \chi_{\mathbf{x}}(q_1, q_2, 0, \ldots, 0)$.

Моменты и семиинварианты многомерных распределений могут быть получены как коэффициенты разложений в степенные ряды функций $\chi_{\mathbf{x}}$ и $\ln \chi_{\mathbf{x}}$ подобно тому, как это сделано в п. 18.3-10.

18.4-11. Независимость случайных величин (см. также п. 18.2-3).

(а) Случайные величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются **(взаимно) независимыми**, если независимы в совокупности события $\{x_1 \in S_1\}$, $\{x_2 \in S_2\}$, … …, $\{x_n \in S_n\}$ для любого набора множеств $S_1, S_2, \ldots, S_n$ действительных чисел. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \Phi_1(x_1)\,\Phi_2(x_2)\ldots\Phi_n(x_n) \tag{18.4-41}$$

или в случаях дискретных и непрерывных случайных величин соответственно, чтобы

$$\left.\begin{aligned} p(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\equiv p_1(x_1)\,p_2(x_2)\ldots p_n(x_n), \\ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\equiv \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\ldots \varphi_n(x_n). \end{aligned}\right\} \qquad (18.4\text{-}42)$$

Распределение системы независимых случайных величин вполне определяется их индивидуальными распределениями. Независимые случайные величины **не коррелированы**, т. е. $\rho_{ik}=0$ при всех $i \neq k$ (п. 18.4-8, с), но обратное утверждение не всегда справедливо.

(b) Независимость многомерных случайных величин $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ определяется формулами вида (41) или (42), в которые вместо $x_1, x_2, \ldots$ надо подставить $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$

Пример. Многомерные случайные величины (x_1, x_2) и (x_3, x_4, x_5) независимы тогда и только тогда, когда

$$\Phi_{12345}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \equiv \Phi_{12}(x_1, x_2)\,\Phi_{345}(x_3, x_4, x_5). \qquad (18.4\text{-}43)$$

Заметим, что формула (43) влечет за собой независимость x_2 и x_5, x_1 и (x_3, x_4), (x_1, x_2) и (x_3, x_5) и т. д.

(c) Если в распределении дискретной или непрерывной n-мерной случайной величины $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ m-мерная величина $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ независима от $(n-m)$-мерной величины $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, то

$$\left.\begin{aligned} &p_{12\ldots m\,|\,(m+1)\ldots n}(x_1, x_2, \ldots, x_m \,|\, x_{m+1}, \ldots, x_n) \equiv \\ &\qquad\qquad \equiv p_{12\ldots m}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ &\text{или} \\ &\varphi_{12\ldots m\,|\,(m+1)\ldots n}(x_1, x_2, \ldots, x_m \,|\, x_{m+1}, \ldots, x_n) \equiv \\ &\qquad\qquad \equiv \varphi_{12\ldots m}(x_1, x_2, \ldots, x_m). \end{aligned}\right\} \qquad (18.4\text{-}44)$$

(d) *Случайные величины x_1 и x_2 независимы тогда и только тогда, когда характеристическая функция двумерной случайной величины (x_1, x_2) равна произведению индивидуальных характеристических функций координат x_1 и x_2* (п. 18.4-10), т. е.

$$\chi_{12}(q_1, q_2) \equiv \chi_1(q_1)\,\chi_2(q_2). \qquad (18.4\text{-}45)$$

Аналогичная теорема верна для многомерных случайных величин.

(e) *Если случайные величины $x_1, x_2, \ldots$ независимы, то независимы и случайные величины $y_1(x_1), y_2(x_2), \ldots$* Аналогичная теорема верна и для многомерных случайных величин.

18.4-12. Энтропия распределения вероятностей.

(a) **Энтропия** распределения вероятностей для одномерной случайной величины x с дискретным или непрерывным распределением определяется соответственно формулами

$$H(x) = \left\{\begin{aligned} &\mathbf{M}\log_2 \frac{1}{p(x)} = -\sum_x p(x)\log_2 p(x), \\ &\mathbf{M}\log_2 \frac{1}{\varphi(x)} = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\log_2 \varphi(x)\,dx. \end{aligned}\right\} \qquad (18.4.46)$$

$H(x)$ есть мера *априорной неопределенности* измерения величины x. В случае дискретного распределения вероятностей $H(x) \geqslant 0$, причем $H(x)=0$ тогда и только тогда, когда x имеет вырожденное (причинное) распределение (табл. 18.8-1). *Непрерывное распределение, имеющее наибольшую энтропию при данной дисперсии σ^2, является нормальным распределением* (п. 18.8-3) *с* $H(x) = \log_2 \sqrt{2\pi e\sigma^2}$.

(b) Для дискретного или непрерывного распределения вероятностей двумерной случайной величины (x_1, x_2) **энтропия** определяется соответственно следующими формулами:

$$H(x_1, x_2) = \left\{\begin{aligned} &-\mathbf{M}\log_2 p(x_1, x_2), \\ &-\mathbf{M}\log_2 \varphi(x_1, x_2). \end{aligned}\right. \qquad (18.4\text{-}47)$$

Условная энтропия $H_{x_2}(x_1)$ определяется соответственно как

$$H_{x_2}(x_1) = \begin{cases} -\mathbf{M} \log_2 p_{1|2}(x_1|x_2), \\ -\mathbf{M} \log_2 \varphi_{1|2}(x_1|x_2) \end{cases} \tag{18.4-48}$$

(это *не* условные математические ожидания). Переставляя индексы 1 и 2, получим условную энтропию $H_{x_1}(x_2)$. Имеют место соотношения

$$H(x_1, x_2) = H(x_1) + H_{x_1}(x_2) = H(x_2) + H_{x_2}(x_1) \leqslant H(x_1) + H(x_2). \tag{18.4-49}$$

Равенство в правой части достигается тогда и только тогда, когда величины x_1 и x_2 независимы (п. 18.4-11).

Неотрицательная величина

$$J(x_1, x_2) = H(x_1) + H(x_2) - H(x_1, x_2) = H(x_1) - H_{x_2}(x_1) = H(x_2) - H_{x_1}(x_2) \tag{18.4-50}$$

может служить мерой зависимости между x_1 и x_2.

Функционалы (46)—(48) и (50) играют важную роль в статистической механике и теории информации.

18.5. ФУНКЦИИ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

18.5-1. Вводные замечания. Ниже даются соотношения, позволяющие рассчитывать распределения вероятностей функций от случайных величин.

18.5-2. Функции (или преобразования) одномерной случайной величины.

(a) *Распределение вероятностей функции $y = y(x)$ вполне определяется распределением вероятностей случайной величины x* (см. также п. 18.2-8).

(b) *Пусть случайные величины x и y связаны взаимно однозначным соотношением $y = y(x)$, $x = x(y)$. Тогда:*

1. *Если $y(x)$ — возрастающая функция, то*

$$\left.\begin{aligned} \Phi_y(Y) &= \Phi_x[x(Y)], \quad \Phi_x(X) = \Phi_y[y(X)], \\ y_P &= y(x_P), \quad x_P = x(y_P) \quad (0 < P < 1). \end{aligned}\right\} \tag{18.5-1}$$

Заметим, что соотношение $y_{1/2} = y(x_{1/2})$, связывающее *медианы* $x_{1/2}$ и $y_{1/2}$, справедливо как для возрастающей, так и для убывающей функции $y(x)$.

2. *Если x и y — непрерывные случайные величины, то*

$$\varphi_y(Y)\,|dy| = \varphi_x[x(Y)]\,|dx| \quad \text{или} \quad \varphi_y(Y) = \varphi_x[x(Y)] \left|\frac{dx}{dy}\right|_{y=Y} \tag{18.5-2}$$

для всех значений Y величины y, при которых производная dx/dy существует и непрерывна.

Замечание. Если функция $x(y)$ многозначна, то

$$\varphi_y(Y) = \varphi_1(Y) + \varphi_2(Y) + \ldots,$$

где $\varphi_1(Y)$, $\varphi_2(Y)$, ... — плотности распределения, получаемые из формулы (2) для соответствующих однозначных ветвей $x_1(y)$, $x_2(y)$, ... функции $x(y)$.

Пример. Если $y = x^2$, то $x_1 = +\sqrt{y}$, $x_2 = -\sqrt{y}$ и

$$\varphi(Y) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad Y < 0, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{Y}}\varphi_x(\sqrt{Y}) + \dfrac{1}{2\sqrt{Y}}\varphi_x(-\sqrt{Y}) \quad \text{при} \quad Y > 0. \end{cases} \tag{18.5-3}$$

(с) Для сложной функции $f[y(x)]$ согласно п. 18.3-6 имеем

$$\mathsf{M}\, f(y) = \mathsf{M}\, f[y(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f[y(x)]\, d\Phi_x(x). \qquad (18.5\text{-}4)$$

Заметим, что ни существование однозначной обратной функции $x(y)$, ни дифференцируемость $y(x)$ не предполагаются. В частности, для $f(y) \equiv e^{sy}$ получаем производящую функцию моментов $M_y(s) = \mathsf{M}e^{sy}$, а для $f(y) \equiv e^{iqy}$ — характеристическую функцию $\chi_y(q) = \mathsf{M}e^{iqy}$ (п. 18.3-8).

Пример. Пусть $y = \sin(x + a)$, где $a = \text{const}$, а случайная величина x распределена равномерно в $(0, 2\pi)$. Тогда

$$\chi_y(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iq\, y(x)}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{iq\, y(x)}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} e^{iqy} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}},$$

откуда, согласно формуле (18.3-21),

$$\varphi_y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}} & \text{при } |y| < 1, \\ 0 & \text{при } |y| > 1 \end{cases}$$ (см. также п. 18.11-1, b).

(д) С помощью теоремы о свертке (п. 8.3-3) для двустороннего преобразования Лапласа (п. 8.6-2) формулу (4) можно записать в виде

$$\mathsf{M}\, f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} M_x(s)\, ds \int_{-\infty}^{\infty} f[y(x)]\, e^{-sx}\, dx, \qquad (18.5\text{-}5)$$

где внешнее интегрирование проводится по такой вертикальной прямой, чтобы интеграл абсолютно сходился. Этот комплексный интеграл иногда легче вычислить, чем интеграл (4).

(е) Заметим, что вообще $\mathsf{M}\, y(x) \neq y(\mathsf{M}x)$ (см. также п. 18.5-3).

18.5-3. Линейные преобразования одномерной случайной величины.

(а) *Если x — непрерывная случайная величина и $y = ax + b$, то*

$$\varphi_y(Y) = \frac{1}{|a|} \varphi_x\left(\frac{Y - b}{a}\right). \qquad (18.5\text{-}6)$$

(b) *Если рассматриваемые ниже средние существуют, то*

$$\mathsf{M}(ax + b) = a\, \mathsf{M}x + b, \qquad \mathsf{D}(ax + b) = a^2\, \mathsf{D}x, \qquad (18.5\text{-}7)$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathsf{M}(ax + b)^r = a^r \alpha_r + \binom{r}{1} a^{r-1} b \alpha_{r-1} + \ldots + b^r, \\ &\chi_{ax+b}(q) = e^{ibq} \chi_x(aq), \quad M_{ax+b}(s) = e^{bs} M_x(as), \quad \gamma_{ax}(s) = \gamma_x(s^a). \end{aligned}\right\} \qquad (18.5\text{-}8)$$

Семиинварианты $\varkappa_i$ для x (п. 18.3-9) связаны с семиинвариантами $\varkappa_i^*$ для $y = ax + b$ соотношениями

$$\varkappa_1^* = a\varkappa_1 + b, \quad \varkappa_r^* = a^r \varkappa_r \qquad (r > 1).$$

(с) Особый интерес представляет линейное *преобразование к стандартному виду* (*нормирование*):

$$x' = \frac{x - \xi}{\sigma} \quad \text{с} \quad \mathsf{M}\, x' = 0, \qquad \mathsf{D}x' = 1. \qquad (18.5\text{-}9)$$

x' называется **стандартизованной (нормированной)** случайной величиной.

(d) Если функцию $y = y(x)$ на большей части спектра величины x можно представить приближенно линейной функцией (линеаризация), то

$$y \approx y(\xi) + y'(\xi)(x - \xi), \quad \mathsf{M}\, y(x) \approx y(\xi), \quad \mathsf{D}\, y(x) = [y'(\xi)]^2\, \mathsf{D}x. \qquad (18.5\text{-}10)$$

18.5-4. Функции (или преобразования) многомерных случайных величин.
(a) *Если случайные величины*

$$y_1 = y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y_2 = y_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots \tag{18.5-11}$$

представляют функции n случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *то распределение вероятностей каждой случайной величины* y_i *однозначно определяется распределением вероятностей системы величин* $x_1, x_2, \ldots, x_n$; *то же верно для каждого совместного или условного распределения любого конечного числа случайных величин* y_i

Например, функция распределения величины y_i и функция распределения системы величин y_i и y_k определяются соответственно формулами

$$\Phi_{y_i}(Y_i) \equiv \int\int\ldots\int_{y_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant Y_i} d\Phi_{\mathrm{x}}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{18.5-12}$$

$$\Phi_{y_i y_k}(Y_i, Y_k) \equiv \int\int\ldots\int_{\substack{y_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant Y_i, \\ y_k(x_1, \ldots, x_n) \leqslant Y_k}} d\Phi_{\mathrm{x}}(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{18.5-13}$$

(b) *Если* $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $\mathbf{y} \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — *непрерывные n-мерные случайные величины, связанные взаимно однозначным невырожденным преобразованием* (11), *то их плотности распределения* $\varphi_{\mathrm{x}}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $\varphi_{\mathrm{y}}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ *связаны соотношением*

$$\varphi_{\mathrm{y}}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)\,|dy_1\,dy_2\ldots dy_n| = \varphi_{\mathrm{x}}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\,|dx_1\,dx_2\ldots dx_n|$$

или

$$\varphi_{\mathrm{y}}(Y_1, \ldots, Y_n) = \varphi_{\mathrm{x}}(X_1, \ldots, X_n)\left|\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}\right|, \tag{18.5-14}$$

где $X_i = x_i(Y_1, \ldots, Y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *для всех* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, *для которых якобиан существует и непрерывен.*

Если функция x (y) многозначна, то $\varphi_{\mathrm{y}}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ может быть вычислена способом, аналогичным указанному в п. 18.5-2, b.

(c) Для функции $f(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, где $y_i = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, m)$,

$$\mathrm{M}f(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f\,d\Phi_{\mathrm{x}}(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{18.5-15}$$

Как и в п. 18.5-2, c, здесь не предполагается дифференцируемость функций $y_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Для $f \equiv \exp(s_1 y_1 + s_2 y_2 + \ldots + s_m y_m)$ получаем совместную производящую функцию моментов величин $y_1, y_2, \ldots, y_m$, а для $f \equiv \exp(iq_1 y_1 + iq_2 y_2 + \ldots + iq_m y_m)$ — совместную характеристическую функцию. Преобразование, подобное формуле (5), применяется в некоторых задачах для случайных процессов (п. 18.12-5).

(d) Для любых двух случайных величин x_1 и x_2

$$\mathrm{M}x_1x_2 = \mathrm{M}x_1\mathrm{M}x_2 + \operatorname{cov}(x_1, x_2), \tag{18.5-16}$$

если эти средние существуют. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *взаимно независимы*, то

$$\mathrm{M}x_1x_2\ldots x_n = \mathrm{M}x_1\mathrm{M}x_2\ldots\mathrm{M}x_n$$

при условии существования этих средних.

(e) Если $y = x_1x_2$ и $\varphi_{x_1}(x_1) = 0$ при $x_1 < 0$, то (п. 18.5-4, b)

$$\varphi_{x_1, y}(x_1, y) \equiv \varphi_{x_1, x_2}\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right)\left|\frac{1}{x_1}\right|$$

и

$$\varphi_y(y)=\int_0^\infty \varphi_{x_1,\,y}(x_1,\,y)\,dx_1=\int_0^\infty \varphi_{x_1,\,x_2}\left(x_1,\,\frac{y}{x_1}\right)\left|\frac{1}{x_1}\right|dx_1. \qquad (18.5\text{-}17)$$

Подобным образом можно рассматривать и другие подходящие функции $y=y(x_1,\,x_2)$.

18.5-5. **Линейные преобразования** (см. также пп. 14.5-1 и 14.6-1). Для каждого невырожденного линейного преобразования

$$\left.\begin{array}{l} y_i=\eta_i+\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}(x_k-\xi_k) \qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n) \\ (\text{в матричной форме } y=\eta+A(x-\xi)) \end{array}\right\} \qquad (18.5\text{-}18)$$

распределения n-мерных случайных величин $(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)$ и $(y_1,\,y_2,\,\ldots,\,y_n)$ имеют одинаковый ранг (п. 18.4-8, с), причем

$$\mathsf{M}y_i=\eta_i \qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n) \qquad (\text{в матричной форме } \mathsf{M}y=\eta), \qquad (18.5\text{-}19)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda'_{ik}=\mathsf{M}(y_i-\eta_i)(y_k-\eta_k)=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{h=1}^{n}\lambda_{jh}a_{ij}a_{kh} \\ (i,\,k=1,\,2,\,\ldots,\,n) \quad (\text{в матричной форме } \Lambda'=A\Lambda A'), \end{array}\right\} \qquad (18.5\text{-}20)$$

если рассматриваемые средние существуют. Здесь $\Lambda=[\lambda_{ik}]$ и $\Lambda'=[\lambda'_{ik}]$ — матрицы моментов (п. 18.4-8, с) для $(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)$ и $(y_1,\,y_2,\,\ldots,\,y_n)$ соответственно.

Методы п. 13.5-5 позволяют найти:

1) такое ортогональное преобразование вида (18), чтобы матрица новых моментов λ'_{ik} (а значит, и новая корреляционная матрица) была *диагональной* (*приведение к некоррелированным случайным величинам* y_i);

2) такое преобразование вида (18), чтобы $\eta_1=\eta_2=\ldots=\eta_k=0$ и $\lambda'_{ik}=\delta_{ik}$ (*приведение к некоррелированным стандартизованным случайным величинам* y_i).

18.5-6. Математическое ожидание и дисперсия суммы случайных величин.

(а) Для любых двух (не обязательно независимых) случайных величин $x_1,\,x_2$

$$\mathsf{M}(x_1\pm x_2)=\mathsf{M}x_1\pm \mathsf{M}x_2=\xi_1\pm\xi_2, \qquad (18.5\text{-}21)$$

$$\mathsf{D}(x_1\pm x_2)=\mathsf{D}x_1+\mathsf{D}x_2\pm 2\operatorname{cov}\{x_1,\,x_2\}=\sigma_1^2+\sigma_2^2\pm 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

(*закон сложения дисперсий*),

если рассматриваемые средние существуют.

(b) Более общие формулы:

$$\left.\begin{array}{l} \mathsf{M}\left(a_0+\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i\right)=a_0+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\xi_i, \\ \mathsf{D}\left(a_0+\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_ia_k\rho_{ik}\sigma_i\sigma_k. \end{array}\right\} \qquad (18.5\text{-}22)$$

(с) Если функцию $y=y(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)$ на большей части спектра n-мерной величины $(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)$ можно приближенно представить линейной функцией, то

$$y\approx y(\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_n)+\sum_{k=1}^{n}\left.\frac{\partial y}{\partial x_k}\right|_{x_1=\xi_1,\,\ldots,\,x_n=\xi_n}(x_k-\xi_k)$$

и средние $\mathsf{M}y$ и $\mathsf{D}y$ можно приближенно вычислять с помощью формул (19) и (20).

18.5-7. Суммы независимых случайных величин (примеры см. п. 18.8-9).

(a) *Если x_1 и x_2 — независимые случайные величины, то*

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_{x_1+x_2}(X)=\Phi_1(X)*\Phi_2(X)\equiv\\
&\qquad\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_2(X-x_1)\,d\Phi_1(x_1)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_1(X-x_2)\,d\Phi_2(x_2),\\
&\chi_{x_1+x_2}(q)=\chi_1(q)\,\chi_2(q),\\
&p_{x_1+x_2}(X)=p_1(X)*p_2(X)\equiv\sum_{x_1}p_2(X-x_1)\,p_1(x_1)\equiv\\
&\qquad\equiv\sum_{x_2}p_1(X-x_2)\,p_2(x_2)\quad(x_1,\ x_2\ \text{дискретны}),\\
&\varphi_{x_1+x_2}(X)=\varphi_1(X)*\varphi_2(X)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(X-x_1)\,\varphi_1(x_1)\,dx_1\equiv\\
&\qquad\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(X-x_2)\,\varphi_2(x_2)\,dx_2\quad(x_1,\ x_2\ \text{непрерывны}),
\end{aligned}\right\}\qquad(18.5\text{-}23)$$

где индексы 1 и 2 относятся соответственно к распределениям x_1 и x_2.

(b) В более общем случае, если $x=x_1+x_2+\ldots+x_n$ есть сумма фиксированного числа n взаимно независимых случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то

$$\Phi_x(X)=\Phi_1(X)*\Phi_2(x)*\ldots*\Phi_n(X),\qquad \chi_x(q)=\chi_1(q)\,\chi_2(q)\ldots\chi_n(q),\qquad(18.5\text{-}24)$$

и если существуют рассматриваемые выражения, то

$$p_x(X)=p_1(X)*p_2(X)*\ldots*p_n(X),\ \varphi_x(X)=\varphi_1(X)*\varphi_2(X)*\ldots*\varphi_n(X),\qquad(18.5\text{-}25)$$

$$M_x(s)=M_1(s)\,M_2(s)\ldots M_n(s),\qquad \gamma_x(s)=\gamma_1(s)\,\gamma_2(s)\ldots\gamma_n(s);\qquad(18.5\text{-}26)$$

$$\mathsf{M}x=\xi=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{M}x_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\qquad \mathsf{D}x=\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{D}x_i=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2;\qquad(18.5\text{-}27)$$

$$\mathsf{M}(x-\xi)^3=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{M}(x_i-\xi_i)^3;\qquad(18.5\text{-}28)$$

$$\varkappa_r=\sum_{i=1}^{n}\varkappa_r^{(i)},\qquad(18.5\text{-}29)$$

где $\varkappa_r^{(i)}$ — семиинвариант r-го порядка величины x_i.

Формулы (24) и (26) позволяют вычислять моменты высших порядков с помощью соотношений, приведенных в п. 18.3-10.

Распределение суммы $x=x_1+x_2+\ldots+x_n$ взаимно независимых случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с математическими ожиданиями $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$ даже для небольших n иногда можно удовлетворительно аппроксимировать нормальным распределением (п. 18.8-3) с поправочным членом.

Пусть $\xi=\mathsf{M}x=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$, $\sigma^2=\mathsf{D}x=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2=\mu_2$, а μ_3, μ_4 — центральные моменты третьего и четвертого порядков суммы x. Тогда плотность $\varphi_x(x)$ можно аппроксимировать рядом Грама — Шарлье (п. 19.3-3), если $\varphi_x=0$ при $|x|>a$ для некоторого $a>0$. В этом случае формулы (18.8-6) и (19.3-3) дают

$$\varphi_x(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x'^2}{2}}\left[1+\frac{1}{3!}\gamma_1\left(x'^3-3x'\right)+\frac{1}{4!}\gamma_2\left(x'^4-6x'^2+3\right)+\ldots\right],$$

где $x' = \frac{x-\xi}{\sigma}$, $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ и $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ — коэффициенты асимметрии и эксцесса для x (табл. 18.3-1). Нормальное приближение можно считать удовлетворительным тогда, когда каждая величина x_i распределена симметрично относительно ξ_i, так что $\gamma_1 = 0$ (см. также п. 18.6-5, центральная предельная теорема).

(с) Распределение суммы $\mathbf{z} \equiv (z_1, z_2, \ldots) = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ двух независимых *многомерных* случайных величин $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots)$ и $\mathbf{y} \equiv (y_1, y_2, \ldots)$ описывается формулами

$$\Phi_{\mathbf{z}}(Z_1, Z_2, \ldots) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\mathbf{y}}(Z_1 - x_1, Z_2 - x_2, \ldots)\, d\Phi_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, \ldots), \tag{18.5-30}$$

$$\chi_{\mathbf{z}}(q_1, q_2, \ldots) = \chi_{\mathbf{x}}(q_1, q_2, \ldots)\, \chi_{\mathbf{y}}(q_1, q_2, \ldots). \tag{18.5-31}$$

18.5-8. **Распределение суммы случайного количества случайных величин.** Пусть x_1, x_2, ... — независимые случайные величины с одним и тем же распределением вероятностей, и пусть k — дискретная случайная величина со спектральными значениями 0, 1, 2, ..., причем величина k независима от x_1, x_2, ... Если производящие функции $\gamma_{x_1}(s)$ и $\gamma_k(s)$ существуют, то распределение суммы $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ дается производящей функцией

$$\gamma_x(s) = \gamma_k[\gamma_{x_1}(s)]. \tag{18.5-32}$$

18.6. СХОДИМОСТЬ ПО ВЕРОЯТНОСТИ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

18.6-1. Последовательность распределений вероятностей. Сходимость по вероятности. Последовательность случайных величин y_1, y_2, ... **сходится по вероятности** к случайной величине y, если вероятность того, что y_n отличается от y на любое конечное число стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$y_n \xrightarrow{\text{вер}} y \text{ при } n \to \infty, \text{ если } \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{|y - y_n| > \varepsilon\} = 0 \text{ для любого } \varepsilon > 0. \tag{18.6-1}$$

m-мерная случайная величина $\mathbf{y}_n$ сходится по вероятности к m-мерной случайной величине $\mathbf{y}$, если каждая координата величины $\mathbf{y}_n$ сходится по вероятности к соответствующей координате величины $\mathbf{y}$.

Если случайные величины y_{n1}, y_{n2}, ..., y_{nm} сходятся по вероятности соответственно к постоянным a_1, a_2, ..., a_m при $n \to \infty$, то любая рациональная функция $g(y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nm})$ сходится по вероятности к $g(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, если только $g(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ конечно.

18.6-2. Пределы функций распределения, характеристических и производящих функций. Теоремы непрерывности.

(a) *y_n сходится по вероятности к y при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда последовательность функций распределения $\Phi_{y_n}(Y)$ сходится к пределу $\Phi_y(Y)$ во всех точках Y, где $\Phi_y(Y)$ непрерывна (сходимость в основном).*

(b) *y_n сходится по вероятности к y при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда последовательность характеристических функций $\chi_{y_n}(q)$ при любом q сходится к предельной функции $\chi(q)$, непрерывной при $q = 0$; в этом случае $\chi_y(q) = \chi(q) = \lim_{n\to\infty} \chi_{y_n}(q)$ (теорема непрерывности для характеристических функций).*

(c) *Последовательность дискретных случайных величин y_1, y_2, ... сходится по вероятности к дискретной случайной величине y при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} p_{y_n}(Y) = p_y(Y). \tag{18.6-2}$$

Если все случайные величины y_1, y_2, ... имеют целые неотрицательные спектральные значения 0, 1, 2, ... и обладают производящими функциями $\gamma_{y_1}(s)$, $\gamma_{y_2}(s)$, ... то формула (2) справедлива тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} \gamma_{y_n}(s) = \gamma_y(s)$ при $0 \leqslant s < 1$ (теорема непрерывности для производящих функций).

Заметим, что последовательность дискретных случайных величин может сходиться по вероятности к случайной величине, которая *не* будет дискретной (см. например, табл. 18.8-3).

(d) Аналогичные теоремы применимы, если $y(n)$ сходится как функция *непрерывного* параметра n.

(e) Аналогичные теоремы применимы к многомерным случайным величинам.

18.6-3. Сходимость в среднем (см. также п. 15.2-2). Последовательность случайных величин $y_1, y_2, \dots$, имеющих конечные начальные моменты $\mathsf{M}y_i^2$ (и, следовательно, конечные математические ожидания и дисперсии (п. 18.3-7)), **сходится в среднем (квадратичном)** к случайной величине y ($\mathsf{M}y^2 < \infty$), если

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}(y_n - y)^2 = 0. \tag{18.6-3}$$

Отсюда следует, что и $\mathsf{M}(y_n - y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Сходимость в среднем влечет за собой сходимость по вероятности. Обратное, вообще говоря, неверно; более того, из сходимости $y_n \xrightarrow{\text{вер}} y$ не следует даже, что $\mathsf{M}y$ и $\mathsf{D}y$ существуют.

18.6-4. Асимптотически нормальные распределения вероятностей (примеры см. в табл. 18.8-3 и п. 19.5-3). Случайная величина y_n с функцией распределения $\Phi_{y_n}(Y)$ распределена *асимптотически нормально*, если существует последовательность пар действительных чисел η_n, σ_n^2 таких, что случайные величины $(y_n - \eta_n)/\sigma_n$ сходятся по вероятности к стандартизованной нормальной величине (п. 18.8-3). Это имеет место тогда и только тогда, когда для всех a и $b > a$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\eta_n + a\sigma_n < y_n < \eta_n + b\sigma_n\} = \Phi_u(b) - \Phi_u(a), \tag{18.6-4}$$

где $\Phi_u(x)$ — нормальная функция распределения.

Формула (4) позволяет аппроксимировать распределение вероятностей величины y_n для достаточно больших n нормальным распределением с центром η_n и дисперсией σ_n^2.

Заметим, что из формулы (4) *не* следует ни то, что η_n и σ_n^2 являются математическим ожиданием и дисперсией величины y_n, ни то, что последовательность y_n сходится по вероятности, ни то, что пределы $\mathsf{M}y_n$ и η_n или $\mathsf{D}y_n$ и σ_n^2 совпадают. На самом деле эти пределы могут даже не существовать.

18.6-5. Предельные теоремы.

(a) *Пусть μ_n — число появлений события E в n независимых испытаниях и $\mathsf{P}\{E\} = \vartheta$ — вероятность появления события E в каждом из испытаний. Тогда*

1) *последовательность относительных частот $h_n = \mu_n/n$ появления события E за n независимых повторных испытаний при $n \to \infty$ сходится в среднем и, следовательно, по вероятности к $\mathsf{P}\{E\} = \vartheta$ (теорема Бернулли);*

2) h_n имеет асимптотически нормальное распределение с центром $\eta_n = \vartheta$ и дисперсией $\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\vartheta(1-\vartheta)$ (см. также табл. 18.8-3).

Заметим, что

$$\left.\begin{aligned} &p(\mu_n) = \binom{n}{\mu_n}\vartheta^{\mu_n}(1-\vartheta)^{n-\mu_n} \quad (\mu_n = 0, 1, 2, \dots, n), \\ &\mathsf{M}\frac{\mu_n}{n} = \vartheta, \quad \mathsf{D}\frac{\mu_n}{n} = \frac{1}{n}\vartheta(1-\vartheta). \end{aligned}\right\} \tag{18.6-5}$$

(b) *Пусть $x_1, x_2, \dots$ — последовательность взаимно независимых случайных величин, имеющих одно и то же распределение вероятностей с конечным математическим ожиданием ξ. Тогда при $n \to \infty$ имеем:*

1) *случайная величина* $\bar{x}_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ сходится по вероятности *к* ξ (*теорема Хинчина, закон больших чисел*);

2) *случайная величина* $\bar{x}_n$ *имеет асимптотически нормальное распределение вероятностей с центром* $\eta_n = \xi$ *и дисперсией* $\sigma_n^2 = \sigma^2/n$ *при условии, что существует общая дисперсия* σ^2 *величин* $x_1, x_2, \ldots$ (*теорема Линдеберга — Леви, центральная предельная теорема*).

(с) *Пусть* $x_1, x_2, \ldots$ — *последовательность взаимно независимых случайных величин, имеющих конечные математические ожидания* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *и дисперсии* $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$ *Тогда при* $n \to \infty$:

1) *из* $\sigma_n^2 \to 0$ *следует, что* $x_n - \xi_n \xrightarrow{\text{вер}} 0$;

2) *из* $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = 0$ *следует*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i) \xrightarrow{\text{вер}} 0$$

(*закон больших чисел, теорема Чебышева*);

3) *случайная величина* $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ *имеет асимптотически нормальное распределение с центром* $\eta_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ *и дисперсией* $\tilde{\sigma}_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2$ *при условии, что для любого положительного числа* ε

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathsf{D} \sum\limits_{i=1}^{n} z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2} = 1, \text{ где } z_i = \begin{cases} x_i, & \text{если } (x_i - \xi_i)^2 \leqslant \varepsilon \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2, \\ 0, & \text{если } (x_i - \xi_i)^2 > \varepsilon \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \end{cases} \tag{18.6-6}$$

(*центральная предельная теорема, условия Линдеберга*).

∗ *Условия Линдеберга удовлетворяются, в частности, если существует такое положительное число* a, *что при* $n \to \infty$

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}_n^{2+a}} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M} \, | x_i - \xi_i |^{2+a} \to 0,$$

где $\tilde{\sigma}_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2$ (*условия Ляпунова*). ∗

18.7. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ

18.7-1. Вводные замечания. Многие задачи теории вероятностей сводятся к нахождению распределения случайной величины x (или системы случайных величин) по данному распределению других случайных величин $x_1, x_2, \ldots$ Как правило, простые события, отмечаемые значениями величины x, оказываются сложными событиями по отношению к значениям величин $x_1, x_2, \ldots$ *Первый шаг в решении любой такой задачи должен состоять в четком определении множества элементарных событий, отмеченного каждой случайной величиной.* Тогда вероятности сложных событий могут быть вычислены методами

пп. 18.2-2—18.2-6 и 18.5-1—18.7-3. Формулы (18.3-3), (18.3-6), (18.4-7) или (18.4-27) могут применяться для контроля вычислений.

18.7-2. Задачи с дискретным распределением вероятностей: подсчет событий и комбинаторный анализ. Следующие соотношения (каждое в отдельности или в сочетании с соотношениями пп. 18.2-2—18.2-6) помогают вычислять вероятности сложных событий по данному множеству элементарных событий.

(a) Если множество элементарных событий *конечно* (состоит из N «случаев») и все элементарные события *равновероятны*, то вероятность сложного события («успеха»), определяемого как объединение N_1 элементарных событий («благоприятствующих» случаев), можно вычислить по формуле

$$\text{вероятность успеха} = \frac{\text{число благоприятствующих случаев}}{\text{общее число всех случаев}} = \frac{N_1}{N}. \qquad (18.7\text{-}1)$$

(b) Если множество элементарных событий счетно (конечно или бесконечно) и событие E состоит в объединении N_1 элементарных событий с вероятностями p_1 и N_2 элементарных событий с вероятностями $p_2, \ldots$, то

$$\mathrm{P}\{E\} = N_1 p_1 + N_2 p_2 + \ldots, \qquad (18.7\text{-}2)$$

причем $N_1 + N_2 + \ldots$ не обязано быть конечным.

(c) Во многих задачах рассматриваемые элементарные события представляют собой различные возможные расположения данного множества или множеств элементов, так что числа $N_1, N_2, \ldots$ в приведенных выше соотношениях являются количествами *перестановок, сочетаний* и т. п. *Наиболее важные определения и формулы для них приведены в таблицах* 18.7-1—18.7-3. Свойства факториалов и биномиальных коэффициентов приведены в п. 1.2-4 и табл. 21.5-1. Для приближенных вычислений применяется формула Стирлинга (п. 21.4-2). Дополнительный материал содержится в книге [18.10].

Таблица 18.7-1

Перестановки и разбиения

1	Число различных перестановок из n различных объектов	$n!$
2	а) Число различимых последовательностей из N объектов, содержащих $n \leqslant N$ неразличимых объектов типа 1 и $N-n$ неразличимых объектов типа 2, *или* b) Число различимых разбиений последовательности из N различных объектов на два класса из $n \leqslant N$ и $N-n$ объектов соответственно	$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!\,n!}$ **(биномиальные коэффициенты, п. 21.5-1)**
3	а) Число различимых последовательностей из $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_r$ объектов, содержащих N_1 неразличимых объектов типа 1, N_2 неразличимых объектов типа 2, ... и N_r неразличимых объектов типа r, *или* b) Число различимых разбиений последовательности $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_r$ различных объектов на r классов из $N_1, N_2, \ldots, N_r$ объектов соответственно	$\frac{N!}{N_1!\,N_2!\ldots N_r!}$ **(мультиномиальные коэффициенты)**

Таблица 18.7-2

Сочетания и выборки

Каждая формула справедлива для $N < n$, $N = n$ и $N > n$

1	Число различимых неупорядоченных сочетаний из N объектов различного типа по n в каждом:	
	a) объект каждого типа может встречаться не более одного раза в любом сочетании (*сочетания без повторений*)	$\binom{N}{n}$
	b) объект каждого типа может встречаться 0, 1, 2, ... или n раз в любом сочетании (*сочетания с повторениями*)	$\binom{N+n-1}{n} = \binom{N+n-1}{N-1}$
	c) объект каждого типа должен встречаться по крайней мере один раз в каждом сочетании	$\binom{n-1}{N-1}$
2	Число различимых выборок (размещений, упорядоченных рядов) объема n из совокупности N различного типа объектов:	
	a) объект каждого типа может встречаться не более одного раза в любой выборке (*выборки без возвращения, размещения без повторений*)	$N(N-1)\ldots(N-n+1) = \binom{N}{n} n!$
	b) объект каждого типа может встречаться 0, 1, 2, ... или n раз в каждой выборке (*выборки с возвращением, размещения с повторением*)	N^n

Пример. Дано множество $N = 3$ различного типа элементов a, b, c. Для $n = 2$ существуют 3 *сочетания без повторения* (ab, ac, bc), 6 *сочетаний с повторениями* (aa, ab, ac, bb, bc, cc), 6 *различимых выборок без возвращения* (ab, ac, ba, bc, ca, cb), 9 *различимых выборок с возвращением* (aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc).

Таблица 18.7-3

Размещения в ячейках или расположения

Каждая формула справедлива для $N < n$, $N = n$ и $N > n$

1	Число различимых размещений из n неразличимых объектов в N различных ячейках (положениях):	
	a) нет ячейки, которая содержит более одного объекта	$\binom{N}{n}$
	b) каждая ячейка может содержать 0, 1, 2, ... или n объектов	$\binom{N+n-1}{n} = \binom{N+n-1}{N-1}$
	c) каждая ячейка должна содержать хотя бы один объект	$\binom{n-1}{N-1}$
2	Число различимых размещений из n различных объектов в N различных ячейках:	
	a) нет ячейки, которая содержит более одного объекта	$N(N-1)\ldots(N-n+1) = \binom{N}{n} n!$
	b) каждая ячейка может содержать 0, 1, 2, ... или n объектов	N^n

18.7-3. ⋆ Применение производящих функций. Теорема Пойа.

(a) Сочетания *из n различных объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ по k без повторений* могут быть получены как коэффициенты α_k производящей функции

$$F(s)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k s^k=(1+A_1 s)(1+A_2 s)\ldots(1+A_n s).$$

Число таких сочетаний равно коэффициенту $a_k=\binom{n}{k}$ перечисляющей производящей функции (**энумератора**)

$$F_*(s)=\sum_{k=0}^{n}a_k s^k=(1+s)^n.$$

Более общая модель описывает сочетания с повторениями. Если какой-либо объект A_j может повторяться $0, r_1, r_2, \ldots$ или r_q раз, то в выражении для $F(s)$ множитель $1+A_j s$ следует заменить на $1+A_j^{r_1}s^{r_1}+\ldots+A_j^{r_q}s^{r_q}$. Соответственно, в выражении для $F_*(s)$ один множитель $1+s$ заменяется на $1+s^{r_1}+\ldots+s^{r_q}$.

Если повторяются и другие объекты, то подобным же образом заменяются другие множители.

Если каждый из объектов может повторяться любое число раз, то

$$F_*(s)=(1+s+s^2+\ldots)^n=\left(\frac{1}{1-s}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}s^k.$$

Если при этом каждый из n объектов должен встретиться хоть один раз, то

$$F_*(s)=(s+s^2+\ldots)^n=\left(\frac{s}{1-s}\right)^n=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k-1}{k-n}s^k.$$

(b) *Число размещений* из n различных объектов по k без повторений равно коэффициенту b_k перечисляющей производящей функции

$$G_*(s)=\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k!}s^k=(1+s)^n;\quad b_k=k!\binom{n}{k}.$$

Если один из объектов может повторяться $0, r_1, r_2, \ldots$ или r_q раз, то

$$G_*(s)=\left(1+\frac{s^{r_1}}{r_1!}+\ldots+\frac{s^{r_q}}{r_q!}\right)(1+s)^{n-1}.$$

Если допустимо любое число повторений каждого объекта, то

$$G_*(s)=\left(1+s+\frac{s^2}{2!}+\ldots\right)^n=e^{ns}.$$

Если при этом каждый из n объектов должен встретиться хоть один раз, то

$$G_*(s)=\left(s+\frac{s^2}{2!}+\ldots\right)^n=(e^s-1)^n.$$

(c) Теорема Пойа о подсчете. Пусть конечное множество D состоит из n элементов (точек) p и с каждой точкой p сопоставлен определенный элемент (объект) f из другого конечного множества R; при этом с несколькими

разными точками p может быть сопоставлен один и тот же объект f. Это отображение D в R можно представить в виде конфигурации (схемы) (рис. 18.7-1).

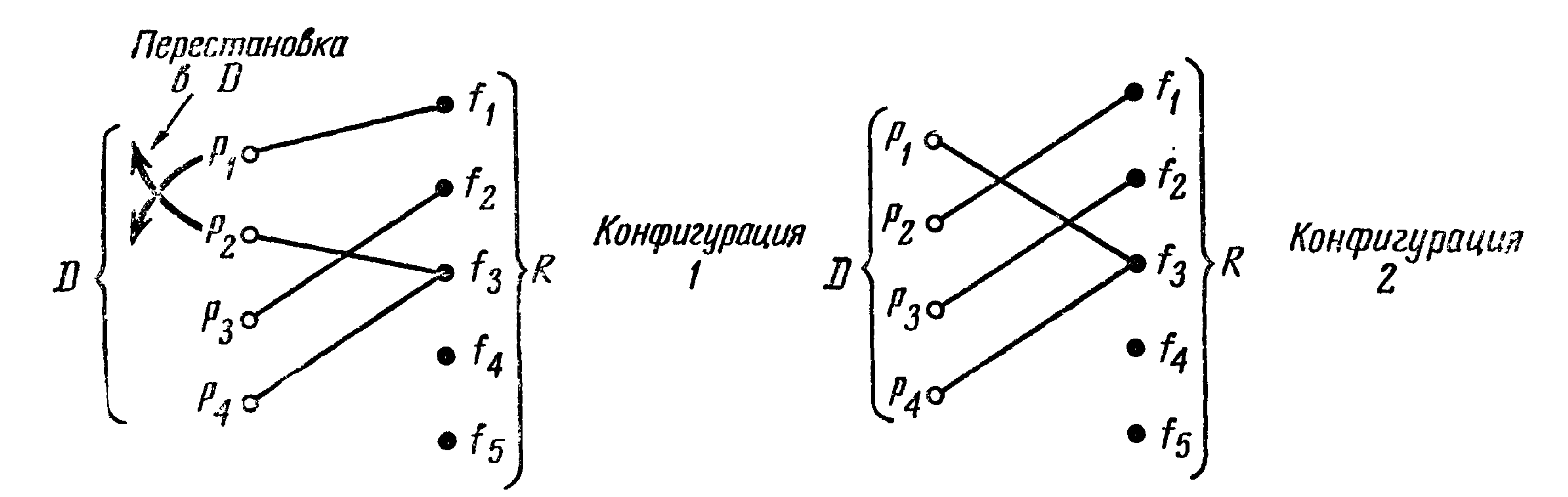


Рис. 18.7-1. Два примера *конфигураций*. Конфигурация 2 получена из конфигурации 1 перестановкой точек p_1 и p_2. Две такие конфигурации могут быть эквивалентными при соответствующем соглашении о симметрии точек множества D и неразличимости двух (или более) символов в R (для примера f_1 и f_3).

Пусть G — группа подстановок (перестановок) элементов множества D (п. 12.2-8). Две конфигурации C_1 и C_2 называются *эквивалентными по отношению к группе* G, если некоторая перестановка в G переводит C_1 в C_2; эквивалентные конфигурации обязательно содержат одни и те же объекты.

Каждая перестановка P из G разбивает точки p на определенные подмножества (*циклы*) так, что в каждом подмножестве перестановка будет циклической (п. 12.2-8). Обозначим через b_k число таких циклов длины k для некоторой перестановки $(b_1+2b_2+\ldots+nb_n=n)$. Тогда *циклический индекс* Z_G группы G определяется как многочлен

$$Z_G(s_1, s_2, \ldots, s_n)=\frac{1}{g}\sum_{P\in G} g_{b_1 b_2 \ldots b_n} s_1^{b_1} s_2^{b_2} \ldots s_n^{b_n},$$

где g — общее число перестановок в G (т. е. порядок группы G), $g_{b_1 b_2 \ldots b_n}$ — число перестановок, содержащих b_1 циклов длины 1, b_2 циклов длины 2, ..., b_n циклов длины n (сумма берется по всем перестановкам P из G).

Сопоставим далее с каждым объектом f из R неотрицательное целое число w (*вес объекта*) и обозначим через a_w число различных объектов f веса w. *Весом конфигурации* назовем сумму весов входящих в нее объектов. Обозначим через A_w число неэквивалентных конфигураций веса w.

Теорема Пойа. *Производящие функции*

$$a(s)=\sum_{w=0}^{\infty} a_w s^w \quad \text{и} \quad A(s)=\sum_{w=0}^{\infty} A_w s^w$$

связаны соотношением

$$A(s)=Z_G[a(s), a(s^2), \ldots, a(s^n)].$$

В частности, общее число конфигураций $A(1)=\sum_{w=0}^{\infty} A_w$ связано с общим числом объектов $a(1)=\sum_{w=0}^{\infty} a_w$ соотношением

$$A(1)=Z_G[a(1), a(1), \ldots, a(1)].$$

Теорема может быть обобщена на случай, когда объекты f и конфигурации характеризуются двумя или более весами [18.10].

18.7-4. Задачи с дискретным распределением вероятностей: успехи и неудачи в составляющих испытаниях. Часто рассматриваются такие составляющие испытания, которые допускают только два возможных исхода («успех» и «неудача»). Вероятности различных сложных событий при этом могут быть подсчитаны методами пп. 18.2-2—18.2-6 через вероятности ϑ_1, ϑ_2, ... успехов в первом, втором, ... составляющих испытаниях.

Для применения методов пп. 18.5-6 — 18.5-8 следует связать с k-м составляющим испытанием дискретную случайную величину x_k со спектральными значениями 1 и 0, соответствующими событиям «успех» и «неудача»; для этой величины имеем:

$$p_{x_k}(1) = \vartheta_k, \quad p_{x_k}(0) = 1 - \vartheta_k, \tag{18.7-3}$$

$$\mathsf{M}x_k = \vartheta_k, \quad \mathsf{D}x_k = \vartheta_k(1 - \vartheta_k), \tag{18.7-4}$$

$$\chi_{x_k}(q) = (1 - \vartheta_k) + \vartheta_k e^{iq}, \quad M_{x_k}^{(s)} = (1 - \vartheta_k) + \vartheta_k e^s, \quad \gamma_{x_k}(s) = (1 - \vartheta_k) + \vartheta_k s. \tag{18.7-5}$$

Успехи в двух или более *независимых* испытаниях будут по определению независимыми событиями (п. 18.2-4). Повторные независимые испытания, каждое из которых имеет лишь два возможных исхода, называются **испытаниями по схеме Бернулли** ($\vartheta_1 = \vartheta_2 = \ldots = \vartheta$). Вероятность появления точно $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ успехов в n испытаниях по схеме Бернулли дается **биномиальным распределением** (табл. 18.8-3).

18.8. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

18.8-1. Дискретные одномерные распределения вероятностей. Таблицы 18.8-1—18.8-7 описывают некоторые дискретные одномерные распределения, представляющие интерес в связи с выборочными обследованиями, теорией

Таблица 18.8-1

Вырожденное (причинное) распределение
(см. также табл. 18.8-11)

(a) $p(x) = \delta_\xi^x = \begin{cases} 1 \text{ при } x = \xi, \\ 0 \text{ при } x \neq \xi \end{cases}$ $\quad (x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \ \xi \text{ — целое}).$

(b) $\mathsf{M}x = \xi, \quad \mathsf{D}x = 0, \quad \gamma_x(s) = s^\xi$

Таблица 18.8-2

Гипергеометрическое распределение

(a) $p(x) = \dfrac{\dbinom{N_1}{x}\dbinom{N - N_1}{n - x}}{\dbinom{N}{n}}$ $\quad (x = 0, 1, 2, \ldots, n; \ N \geqslant n \geqslant 0; \ N \geqslant N_1 = \vartheta N \geqslant 0).$

(b) $\mathsf{M}x = \dfrac{nN_1}{N} = n\vartheta; \quad \mathsf{D}x = \dfrac{nN_1(N - N_1)}{N^2}\left(1 - \dfrac{n-1}{N-1}\right) = n\vartheta(1 - \vartheta)\left(1 - \dfrac{n-1}{N-1}\right).$

(c) **Типичное толкование.** $p(x)$ есть вероятность того, что случайная *бесповторная* выборка объема n (п. 19.5-5) содержит точно x элементов типа 1, если эта выборка производится из генеральной совокупности N элементов, среди которых $N_1 = \vartheta N$ элементов принадлежат типу 1.

(d) **Приближения.** Если $N \to \infty$, в то время как n и $\vartheta = N_1/N$ остаются фиксированными, то гипергеометрическое распределение стремится к *биномиальному распределению* (табл. 18.8-3; бесповторные выборки мало отличаются от повторных выборок, если отношение n/N мало). Аппроксимация биномиальным распределением применима, если $n/N < 0{,}1$.

Таблица 18.8-3

Биномиальное распределение

(рис. 18.8-1; см. также п. 18-7-3)

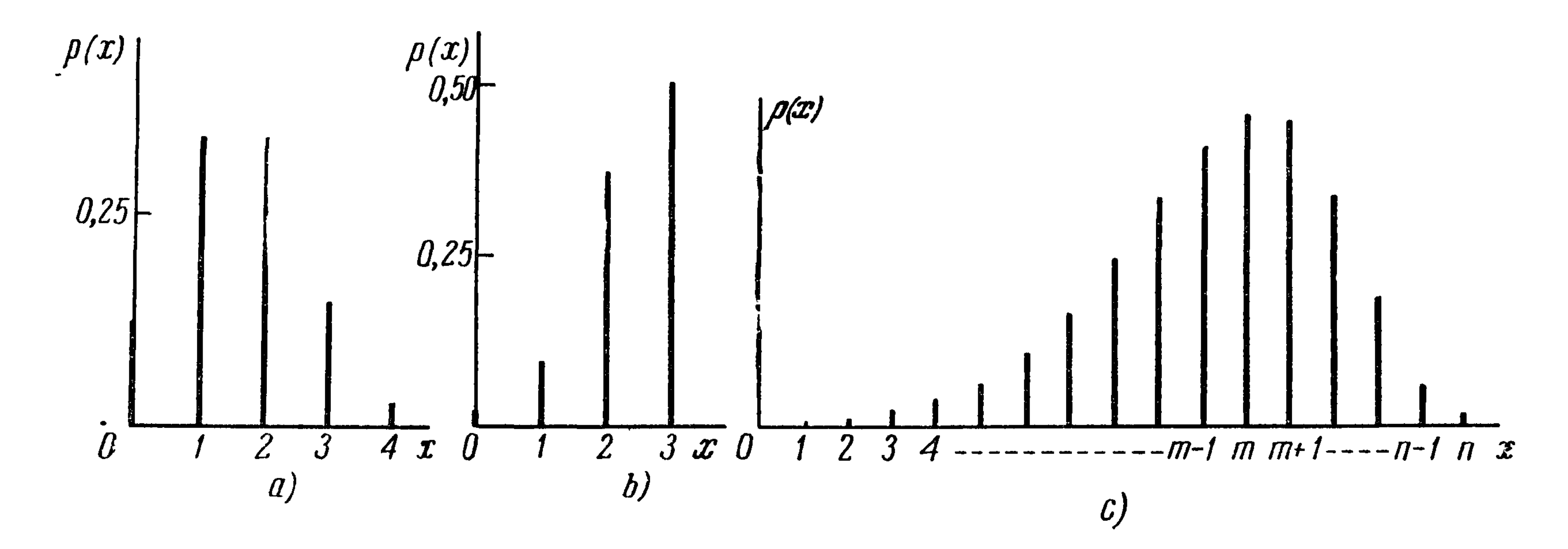


Рис. 18.8-1. Биномиальное распределение:
a) $n = 4$, $\vartheta = 0{,}4$; *b*) $n = 3$, $\vartheta = 0{,}8$; *c*) $n = 16$, $\vartheta = 0{,}7$; m — мода.

(a) $p(x) = \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x} \qquad (x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ 0 < \vartheta < 1).$

Вероятность $p(x)$ *имеет наибольшее значение, когда* x *равен целой части числа* $(n+1)\vartheta$ (если это число целое, то $p[(n+1)\vartheta] = p[(n+1)\vartheta - 1]$). *При* $\vartheta > \frac{n}{n+1}$ *последовательность* $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, ... *монотонно возрастает, при* $\vartheta < \frac{1}{n+1}$ *она монотонно убывает, в остальных случаях биномиальное распределение одномодально* (рис. 18.8-1). Заметим также, что

$$\Phi_x(x) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} \vartheta^i (1-\vartheta)^{n-i} = 1 - J_\vartheta\left(\frac{m_1}{2}, \frac{m_2}{2}\right) = 1 - \Phi_{v^2}(m_1, m_2)\left(\frac{m_2}{m_1} \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\right)$$

с $m_1 = 2(x+1)$, $m_2 = 2(n-x)$ (см. пп. 19.5-3 и 21.4-5).

(b) $\mathrm{M}x = n\vartheta$, $\mathrm{D}x = n\vartheta(1-\vartheta)$, $\gamma_x(s) = (\vartheta s + 1 - \vartheta)^n$,

$\alpha_2 = n\vartheta + n(n-1)\vartheta^2$, $\alpha_3 = n(n-1)(n-2)\vartheta^3 + 3n(n-1)\vartheta^2 + n\vartheta$,

$\mu_3 = n\vartheta(1-\vartheta)(1-2\vartheta)$, $\mu_4 = n\vartheta(1-\vartheta)[1 + 3(n-2)\vartheta(1-\vartheta)]$,

$$\gamma_1 = \frac{1-2\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}}, \qquad \gamma_2 = \frac{1-6\vartheta(1-\vartheta)}{n\vartheta(1-\vartheta)}.$$

(c) **Типичное толкование.** $p(x)$ есть:

1) вероятность того, что *повторная* случайная выборка объема n (п. 19.5-5) содержит точно x элементов типа 1, если генеральная совокупность объема N содержит ϑN элементов типа 1;

2) вероятность появления события точно x раз в n независимых испытаниях по схеме Бернулли (п. 18.7-3) при условии, что вероятность события в каждом испытании равна ϑ.

Таблица 18.8-3 (*продолжение*)

(d) Приближения. Биномиальное распределение при $n \to \infty$ является асимптотически нормальным с центром $n\vartheta = \xi$ и дисперсией $n\vartheta(1-\vartheta) = \sigma^2$ (*предельная теорема Муавра — Лапласа*, частный случай центральной предельной теоремы, п. 18.6-5). При $0 < \vartheta < 1$

$$p(x) \approx \varphi_u\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right) \approx \Phi_u\left(\frac{x+\frac{1}{2}-\xi}{\sigma}\right) - \Phi_u\left(\frac{x-\frac{1}{2}-\xi}{\sigma}\right),$$

когда

$$\frac{(x-\xi)^3}{\sigma^4} \to 0;$$

$$\text{P}\{X_1 \leqslant x \leqslant X_2\} \approx \Phi_u\left(\frac{X_2+\frac{1}{2}-\xi}{\sigma}\right) - \Phi_u\left(\frac{X_1-\frac{1}{2}-\xi}{\sigma}\right),$$

когда

$$\frac{(X_1-\xi)^3}{\sigma^4} \to 0, \quad \frac{(X_2-\xi)^3}{\sigma^4} \to 0;$$

$$\text{P}\left\{a \leqslant \frac{x-\xi}{\sigma} \leqslant b\right\} \to \Phi_u(b) - \Phi_u(a),$$

когда $n \to \infty$ при фиксированных a, b.

Приближения, основанные на этих соотношениях, применимы при

$$\sigma^2 = n\vartheta(1-\vartheta) \geqslant 9.$$

Об исследовании ошибок приближения см. [18.8]. Аппроксимацию биномиального распределения распределением Пуассона см. в табл. 18.8-4.

игр и т. п. В первую очередь табулированы производящие функции $\gamma_x(s)$, так как по ним легко найти характеристические функции и производящие функции моментов по формулам

$$\chi_x(q) = \gamma_x(e^{iq}); \qquad M_x(s) = \gamma_x(e^s)$$

(см. также п. 18.3-8). Моменты, не приведенные в таблице, можно вычислить методами п. 18.3-10.

18.8-2. Дискретные многомерные распределения вероятностей (см. также п. 18.4-2).

(a) **Полиномиальное распределение** описывается формулой

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{N!}{x_1!\, x_2! \ldots x_n!} \vartheta_1^{x_1} \vartheta_2^{x_2} \ldots \vartheta_n^{x_n} \tag{18.8-1}$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n = 0, 1, 2, \ldots; \ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = N),$$

где $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ — положительные числа, сумма которых

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n = 1.$$

Если испытание имеет n попарно несовместных исходов $E_1, E_2, \ldots, E_n$ с вероятностями $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$, где $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n = 1$, то выражение (1) дает вероятность того, что события $E_1, E_2, \ldots, E_n$ произойдут соответственно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ раз за N повторных независимых испытаний (см. также п. 18.7-3).

В классической статистической механике $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — числа замещений n независимых состояний с априорными вероятностями $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ соответственно.

(b) **Многомерное распределение Пуассона** описывается формулой

$$\left.\begin{aligned} p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{-(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)} \frac{\xi_1^{x_1} \xi_2^{x_2} \ldots \xi_n^{x_n}}{x_1!\, x_2! \ldots x_n!} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n = 0, 1, 2, \ldots; \ \xi_k > 0, \ k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{18.8-2}$$

Таблица 18.8-4

Распределение Пуассона

(рис. 18.8-2)

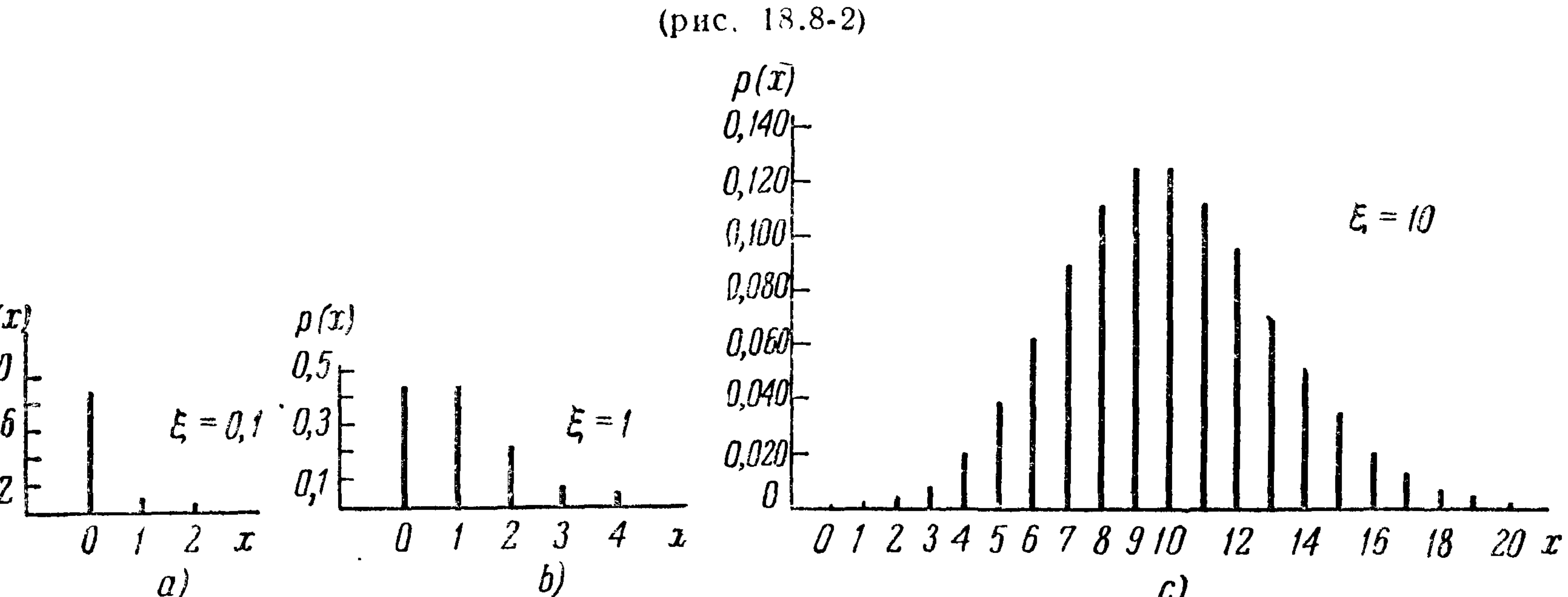


Рис. 18.8-2. Распределение Пуассона.

(a) $p(x) = e^{-\xi}\dfrac{\xi^x}{x!}$ $(x = 0, 1, 2, \ldots; \xi > 0)$,

(b) $\mathsf{M}x = \mathsf{D}x = \xi$, $\gamma_x(s) = e^{s\xi - \xi}$,

$\alpha_2 = \xi(\xi + 1)$, $\alpha_3 = \xi(\xi^2 + 3\xi + 1)$,

$\alpha_4 = \xi(\xi^3 + 6\xi^2 + 7\xi + 1)$,

$\mu_3 = \xi$, $\mu_4 = 3\xi^2 + \xi$,

$\gamma_1 = \xi^{-1/2}$, $\gamma_2 = \xi^{-1}$.

(c) Распределение Пуассона аппроксимирует гипергеометрическое распределение (табл. 18.8-2) и биномиальное распределение (табл. 18.8-3), когда $\vartheta N \to \infty$, $n \to \infty$, $\vartheta \to 0$ при условии, что ϑn имеет конечный предел ξ (*закон малых чисел*). Это приближение применяется при $\vartheta < 0{,}1$. Наиболее важные приложения распределения Пуассона, связанные со случайными процессами, см. п. 18.9-3.

Таблица 18.8-5

Геометрическое распределение

(a) $p(x) = \vartheta(1 - \vartheta)^x$ $(x = 0, 1, 2, \ldots; 0 < \vartheta < 1)$,

(b) $\mathsf{M}x = \dfrac{1 - \vartheta}{\vartheta}$, $\mathsf{D}x = \dfrac{1 - \vartheta}{\vartheta^2}$, $\gamma_x(s) = \dfrac{\vartheta}{1 - (1 - \vartheta)s}$.

(c) **Типичное толкование.** $p(x)$ есть вероятность появления события («успеха») *в первый раз после точно* x испытаний по схеме Бернулли при вероятности успеха ϑ. $\Phi(x) = 1 - (1 - \vartheta)^{x+1}$ $(x = 0, 1, 2, \ldots)$ есть вероятность того, что первый успех появится *самое большее после* x испытаний (см. также табл. 18.8-6).

Таблица 18.8-6

Распределение Паскаля

(a) $p(x) = \dbinom{m + x - 1}{x}\vartheta^m(1 - \vartheta)^x$ $(x = 0, 1, 2, \ldots; m = 1, 2, \ldots; 0 < \vartheta < 1)$.

(b) $\mathsf{M}x = m\dfrac{1 - \vartheta}{\vartheta}$, $\mathsf{D}x = m\dfrac{1 - \vartheta}{\vartheta^2}$, $\gamma_x(s) = \left(\dfrac{\vartheta}{1 - (1 - \vartheta)s}\right)^m$.

(c) **Типичное толкование.** $p(x)$ есть вероятность появления события («успеха») *в* m*-й раз после точно* $m + x - 1$ испытаний по схеме Бернулли при вероятности успеха ϑ. $\Phi(x)$ есть вероятность того, что m-й успех наступит *самое большее после* $m + x - 1$ испытаний. При $m = 1$ распределение Паскаля сводится к геометрическому распределению (табл. 18.8-5).

Таблица 18.8-7

Распределение Пойа

(a) $p(x) = \left(\frac{\xi}{1+\beta\xi}\right)^x \frac{1\,(1+\beta)\,\ldots\,[1+(x-1)\,\beta]}{x!}\,p(0) \qquad (x = 1,\ 2,\ \ldots),$

$$p(0) = (1+\beta\xi)^{-\frac{1}{\beta}} \qquad (\xi > 0,\ \beta > 0).$$

(b) $\mathrm{M}x = \xi, \qquad \mathrm{D}x = \xi\,(1+\beta\xi), \qquad \gamma_x(s) = (1+\beta\xi-\beta\xi s)^{-\frac{1}{\beta}}.$

(c) Распределение Пойа сводится к распределению Пуассона (табл. 18.8-4) при $\beta = 0$ и к геометрическому распределению (табл. 18.8-5) при $\beta = 1$. О толковании на языке случайных процессов (процесс размножения) см. [18.8].

18.8-3. Непрерывные распределения вероятностей: нормальное распределение (Гаусса). Непрерывная случайная величина x **распределена нормально с математическим ожиданием (центром)** ξ **и дисперсией** σ^2 **(или нормальна с параметрами** ξ, σ^2**)**, если

$$\left.\begin{aligned} \varphi(X) &\equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\xi}{\sigma}\right)^2} \equiv \frac{1}{\sigma}\,\varphi_u\left(\frac{X-\xi}{\sigma}\right),\\ \Phi(X) &\equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{X} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)^2}dx = \\ &= \Phi_u\left(\frac{X-\xi}{\sigma}\right) \equiv \frac{1}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{X-\xi}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (18.8\text{-}3)$$

Распределение **стандартизованной нормальной величины (нормального отклонения)** $u = \frac{x-\xi}{\sigma}$ (см. также п. 18.5-3,c и п. 18.8-4) дается формулами (рис. 18.8-3):

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_u(U) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}U^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}U^2\right)\\ &\quad (\textit{плотность нормального распределения};\ \text{см. табл. 18.8-8}),\\ &\Phi_u(U) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{U} e^{-\frac{1}{2}u^2}du \equiv \frac{1}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{U}{\sqrt{2}}\right)\right]\\ &\quad (\textit{нормальная функция распределения};\ \text{см. табл. 18.8-9}),\\ &\qquad \mathrm{M}\,u = 0,\ \mathrm{D}\,u = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (18.8\text{-}4)$$

$\operatorname{erf} z$ — **функция ошибок** (см. также п. 21.3-2 и табл. 18.8-10):

$$\operatorname{erf} z \equiv -\operatorname{erf}(-z) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-\zeta^2}d\zeta = 2\,\Phi_u(z\sqrt{2}) - 1. \qquad (18.8\text{-}5)$$

$\varphi_u(X)$ имеет точки перегиба при $X = \xi \pm \sigma$. Заметим, что

$$\varphi_u^{(k)}(U) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k H_k\left(\frac{U}{\sqrt{2}}\right)\varphi_u(U), \qquad (18.8\text{-}6)$$

где $H_k(z)$ — многочлен Эрмита степени k (п. 21.7-1).

Каждое нормальное распределение симметрично относительно центра ξ; ξ есть медиана и единственная мода. Коэффициенты асимметрии и эксцесса равны нулю;

$$\mu_{2k} = 1 \cdot 3 \ldots (2k-1)\, \sigma^{2k}, \qquad \mu_{2k-1} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{18.8-7}$$

$$\varkappa_1 = \xi, \; \varkappa_2 = \sigma^2, \; \varkappa_3 = \varkappa_4 = \ldots = 0, \tag{18.8-8}$$

$$\chi_x(q) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} q^2 + i\xi q\right). \tag{18.8-9}$$

Моменты α_r относительно начала можно вычислить способом, указанным в п. 18.3-10.

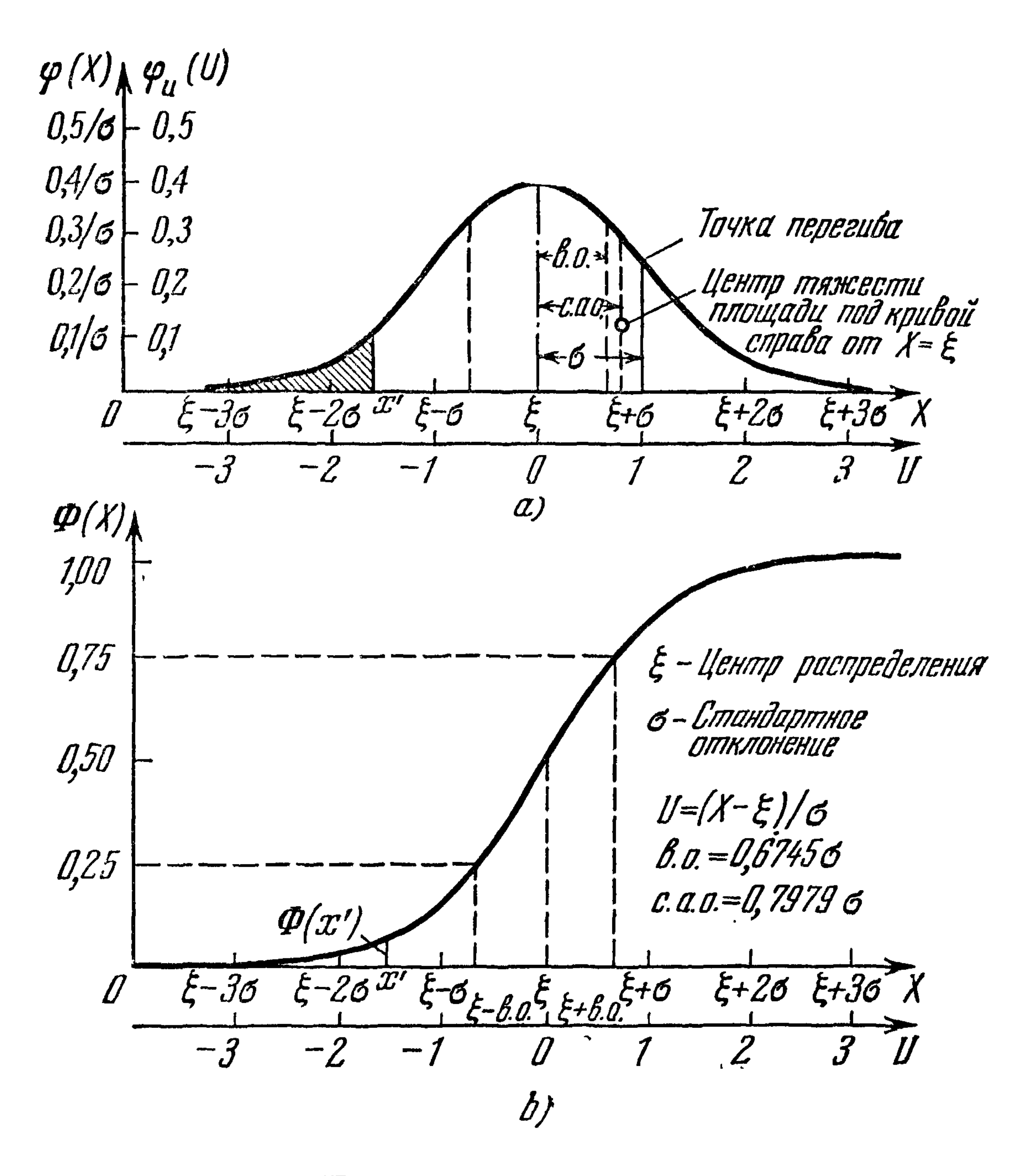


Рис. 18.8-3. *a*) Плотность нормального распределения

$$\varphi(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\xi}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma} \varphi_u(U), \quad U = \frac{X-\xi}{\sigma}.$$

b) Нормальная функция распределения

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{X} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)^2} dx = \Phi_u(U), \quad U = \frac{X-\xi}{\sigma}.$$

18.8-4. Нормальные случайные величины: распределение отклонений от центра. **(a)** Для любой нормальной случайной величины x с центром ξ и дисперсией σ^2

$$P\{a < x < b\} = \Phi_u\left(\frac{b-\xi}{\sigma}\right) - \Phi_u\left(\frac{a-\xi}{\sigma}\right) \tag{18.8-10}$$

Таблица 18.8-8

Плотность нормального распределения (стандартизованного)

$$\varphi_u(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-U^2/2}$$

U	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29658	29430	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457

и при $Y \geqslant 0$:

$$\mathrm{P}\{|x-\xi| < Y\sigma\} = \mathrm{P}\{\xi - Y\sigma < x < \xi + Y\sigma\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-Y}^{Y} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2\Phi_u(Y) - 1 = \operatorname{erf}\left(\frac{Y}{\sqrt{2}}\right) = \Phi_{|u|}(Y), \quad (18.8\text{-}11)$$

$$\mathrm{P}\{|x-\xi| > Y\sigma\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{Y}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2[1 - \Phi_u(Y)] =$$

$$= 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{Y}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \Phi_{|u|}(Y). \quad (18.8\text{-}12)$$

(b) Квантили

$$|u|_P = u_{\frac{1+P}{2}} = |u|_{1-\alpha} = u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad (18.8\text{-}13)$$

определяемые формулой

$$\mathrm{P}\{|x-\xi| \leqslant |u|_P\,\sigma\} = P = 1 - \alpha, \quad (18.8\text{-}14)$$

Таблица 18.8-9

Интеграл вероятностей

$$\Phi(U)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^U e^{-t^2/2}\,dt=\frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{U}{\sqrt{2}}\right)=\Phi_u(U)-\frac{1}{2}$$

U	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865									
3,5	4997674									
4,0	4999683									
4,5	4999966									
5,0	4999997133									

часто принимаются в качестве *доверительных границ нормального отклонения u* или в качестве *α-значений нормального отклонения* (см. также п. 19.6-4). Заметим, что

$$|u|_{0,95}=u_{0,975}\approx 1,96,\quad |u|_{0,99}=u_{0,995}\approx 2,58,\quad |u|_{0,999}=u_{0,9995}\approx 3,29. \qquad (18.8\text{-}15)$$

(с) Для нормального распределения применяются следующие характеристики рассеяния (см. также табл. 18.3-1):

среднее абсолютное отклонение (с. а. о.)

$$\mathrm{M}\,|x-\xi|=\sigma\,\mathrm{M}\,|u|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma\approx 0,798\,\sigma,$$

вероятное отклонение (в. о., медиана величины $|x-\xi|$)

$$|u|_{1/2}\,\sigma=-u_{1/4}\,\sigma=u_{3/4}\,\sigma\approx 0,674\,\sigma,$$

Таблица 18.8-10

Функция ошибок

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\, dt$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,0000	0011	0023	0034	0045	0056	0068	0079	0090	0102
1	0113	0124	0135	0147	0158	0169	0181	0192	0203	0214
2	0226	0237	0248	0260	0271	0282	0293	0305	0316	0327
3	0338	0350	0361	0372	0384	0395	0406	0417	0429	0440
4	0451	0462	0474	0485	0496	0507	0519	0530	0541	0553
5	0564	0575	0586	0598	0609	0620	0631	0643	0654	0665
6	0676	0688	0699	0710	0721	0732	0744	0755	0766	0777
7	0789	0800	0811	0822	0834	0845	0856	0867	0878	0890
8	0901	0912	0923	0934	0946	0957	0968	0979	0990	1002
9	1013	1024	1035	1046	1058	1069	1080	1091	1102	1113
10	1125	1136	1147	1158	1169	1180	1192	1203	1214	1225
1	1236	1247	1259	1270	1281	1292	1303	1314	1325	1336
2	1348	1359	1370	1381	1392	1403	1414	1425	1436	1448
3	1459	1470	1481	1492	1503	1514	1525	1536	1547	1558
4	1569	1581	1592	1603	1614	1625	1636	1647	1658	1669
5	1680	1691	1702	1713	1724	1735	1746	1757	1768	1779
6	1790	1801	1812	1823	1834	1845	1856	1867	1878	1889
7	1900	1911	1922	1933	1944	1955	1966	1977	1988	1998
8	2009	2020	2031	2042	2053	2064	2075	2086	2097	2108
9	2118	2129	2140	2151	2162	2173	2184	2194	2205	2216
20	2227	2238	2249	2260	2270	2281	2292	2303	2314	2324
1	2335	2346	2357	2368	2378	2389	2400	2411	2421	2432
2	2443	2454	2464	2475	2486	2497	2507	2518	2529	2540
3	2550	2561	2572	2582	2593	2604	2614	2625	2636	2646
4	2657	2668	2678	2689	2700	2710	2721	2731	2742	2753
5	2763	2774	2784	2795	2806	2816	2827	2837	2848	2858
6	2869	2880	2890	2901	2911	2922	2932	2943	2953	2964
7	2974	2985	2995	3006	3016	3027	3037	3047	3058	3068
8	3079	3089	3100	3110	3120	3131	3141	3152	3162	3172
9	3183	3193	3204	3214	3224	3235	3245	3255	3266	3276
30	3286	3297	3307	3317	3327	3338	3348	3358	3369	3379
1	3389	3399	3410	3420	3430	3440	3450	3461	3471	3481
2	3491	3501	3512	3522	3532	3542	3552	3562	3573	3583
3	3593	3603	3613	3623	3633	3643	3653	3663	3674	3684
4	3694	3704	3714	3724	3734	3744	3754	3764	3774	3784
5	3794	3804	3814	3824	3834	3844	3854	3864	3873	3883
6	3893	3903	3913	3923	3933	3943	3953	3963	3972	3982
7	3992	4002	4012	4022	4031	4041	4051	4061	4071	4080
8	4090	4100	4110	4119	4129	4139	4149	4158	4168	4178
9	4187	4197	4207	4216	4226	4236	4245	4255	4265	4274
40	4284	4294	4303	4313	4322	4332	4341	4351	4361	4370
1	4380	4389	4399	4408	4418	4427	4437	4446	4456	4465
2	4475	4484	4494	4503	4512	4522	4531	4541	4550	4559
3	4569	4578	4588	4597	4606	4616	4625	4634	4644	4653
4	4662	4672	4681	4690	4699	4709	4718	4727	4736	4746
5	4755	4764	4773	4782	4792	4801	4810	4819	4828	4837
6	4847	4856	4865	4874	4883	4892	4901	4910	4919	4928
7	4937	4946	4956	4965	4974	4983	4992	5001	5010	5019
8	5027	5036	5045	5054	5063	5072	5081	5090	5099	5108
9	5117	5126	5134	5143	5152	5161	5170	5179	5187	5196
50	5205	5214	5223	5231	5240	5249	5258	5266	5275	5284

Таблица 18.8-11

Непрерывные одномерные распределения вероятностей

	Распределение	Плотность распределения $\varphi(x)$	Функция распределения $\Phi(x)$	Центр $\mathrm{M}(x)$	Дисперсия $\mathrm{D}(x)$	Характеристическая функция $\chi_x(q)$	Примечания
1	**Вырожденное (причинное) распределение**	$\delta(x-\xi)=\begin{cases}0 & (x\neq\xi),\\ \infty & (x=\xi)\end{cases}$ (см. п. 21.9-2)	$U_+(x-\xi)$ (см. п. 21.9-1)	ξ	0	$e^{i\xi q}$	x равен ξ почти всегда. Вырожденное распределение аппроксимирует распределение равномерное, Коши или Лапласа при $\alpha\to 0$ или $\beta\to 0$
2	**Равномерное (прямоугольное) распределение**	$\begin{cases}\dfrac{1}{2\alpha} & (\mid x-\xi\mid<\alpha),\\ 0 & (\mid x-\xi\mid>\alpha)\end{cases}$	$\begin{cases}0 & (x\leqslant\xi-\alpha),\\ \dfrac{1}{2\alpha}(x-\xi+\alpha) & (\xi-\alpha\leqslant x\leqslant\xi+\alpha),\\ 1 & (x\geqslant\xi+\alpha)\end{cases}$	ξ	$\dfrac{\alpha^2}{3}$	$\dfrac{\sin\alpha q}{\alpha q}e^{i\xi q}$	Величина x равномерно распределена на интервале $(\xi-\alpha,\ \xi+\alpha)$
3	**Распределение Коши**	$\dfrac{1}{\pi\alpha}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-\xi}{\alpha}\right)^2}$	$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x-\xi}{\alpha}$	$\mathrm{M}x$ и $\mathrm{D}x$ не существуют, главное значение по Коши (п. 4.6-2, с) среднего $\mathrm{M}x$ равно ξ		$e^{i\xi q-\alpha\mid q\mid}$	Это есть распределение величины $x=\xi+\alpha\operatorname{tg}y$, если величина y распределена равномерно в интервале $(-\pi/2,\ \pi/2)$. Распределение симметрично относительно $x=\xi$

Таблица 18.8-11 (*продолжение*)

	Распределение	Плотность распределения $\varphi(x)$	Функция распределения $\Phi(x)$	Центр $M(x)$	Дисперсия $D(x)$	Характеристическая функция $\chi_x(q)$	Примечания
4	**Распределение Лапласа**	$\frac{1}{2\beta} e^{-\frac{\lvert x-\xi \rvert}{\beta}}$	$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{\lvert x-\xi \rvert}{\beta}} & (x \leqslant \xi), \\ 1-\frac{1}{2} e^{-\frac{\lvert x-\xi \rvert}{\beta}} & (x > \xi) \end{cases}$	ξ	$2\beta^2$	$\frac{e^{i\xi q}}{1+\beta^2 q^2}$	При $\xi = 0$ характеристическая функция пропорциональна плотности распределения Коши с $\alpha = \frac{1}{\beta}$
5	**Бэта-распределение**	$\begin{cases} 0 & (x \leqslant 0,\ x \geqslant 1), \\ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \\ (0 < x < 1), & (\alpha > 0,\ \beta > 0) \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & (x \leqslant 0), \\ \frac{B_x(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} & (0 \leqslant x \leqslant 1), \\ 1 & (x \geqslant 1) \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$F(\alpha, \alpha+\beta; iq)$ (п. 9.3-10)	$B_x(\alpha, \beta)$ — неполная бэта-функция (п. 21.4-5). Единственная мода $\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$ при $\alpha > 1,\ \beta > 1$. $\alpha_r = \frac{\Gamma(\alpha+r)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+r)}$
6	**Гамма-распределение**	$\begin{cases} 0 & (x \leqslant 0), \\ \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & (x > 0) \\ (\alpha > 0,\ \beta > 0) \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & (x \leqslant 0), \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma_{\beta x}(\alpha) & (x \geqslant 0) \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\left(1-\frac{iq}{\beta}\right)^{-\alpha}$	$\Gamma_x(\alpha)$ — неполная гамма-функция (п. 21.4-5)

половина полуширины $\sqrt{2\ln 2}\,\sigma \approx 1{,}177\,\sigma$,
нижний и верхний *квартили* $x_{1/4} = \xi + u_{1/4}\sigma = \xi - |u|_{1/2}\sigma$, $x_{3/4} = \xi + u_{3/4} = \xi + |u|_{1/2}\sigma$,
мера точности $h = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2}}$.

18.8-5. Различные непрерывные одномерные распределения вероятностей. Табл. 18.8-11 описывает некоторые непрерывные одномерные распределения.

18.8-6. Двумерные нормальные распределения.

(a) Двумерное нормальное распределение задается плотностью распределения

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho_{12}^2\right)}\left(u_1^2 - 2\rho_{12}u_1u_2 + u_2^2\right)\right\}, \quad (18.8\text{-}16)$$

где

$$u_1 = \frac{x_1 - \xi_1}{\sigma_1}, \qquad u_2 = \frac{x_2 - \xi_2}{\sigma_2} \qquad (\sigma_1 > 0,\ \sigma_2 > 0,\ |\rho_{12}| \leqslant 1).$$

Распределения координат x_1 и x_2 являются нормальными с центрами ξ_1, ξ_2 и дисперсиями σ_1^2, σ_2^2 соответственно; ρ_{12} — коэффициент корреляции между x_1 и x_2. Пять параметров ξ_1, ξ_2, σ_1^2, σ_2^2, ρ_{12} вполне определяют распределение. *Условные распределения x_1 и x_2* тоже нормальны с

$$\mathrm{M}\{x_1 \mid x_2\} = \xi_1 + \rho_{12}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \xi_2); \quad \mathrm{D}\{x_1 \mid x_2\} = \sigma_1^2(1 - \rho_{12}^2), \quad (18.8\text{-}17)$$

$$\mathrm{M}\{x_2 \mid x_1\} = \xi_2 + \rho_{12}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \xi_1); \quad \mathrm{D}\{x_2 \mid x_1\} = \sigma_2^2(1 - \rho_{12}^2), \quad (18.8\text{-}18)$$

так что кривые средней квадратической регрессии совпадают с прямыми регрессии (п. 18.4-6). *x_1 и x_2 независимы тогда и только тогда, когда они не коррелированы* ($\rho_{12} = 0$, см. также п. 18.4-11). Заметим, что

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P}\{x_1 \geqslant \xi_1;\ x_2 \geqslant \xi_2\} = \mathrm{P}\{x_1 \leqslant \xi_1;\ x_2 \leqslant \xi_2\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin\rho_{12}, \\ \mathrm{P}\{x_1 \geqslant \xi_1;\ x_2 \leqslant \xi_2\} = \mathrm{P}\{x_1 \leqslant \xi_1;\ x_2 \geqslant \xi_2\} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}\arcsin\rho_{12}. \end{aligned}\right\} \quad (18.8\text{-}19)$$

(b) Каждое двумерное нормальное распределение (16) может быть описано стандартизованными нормальными величинами u_1, u_2 с коэффициентом корреляции ρ_{12} или независимыми стандартизованными нормальными величинами u_1', u_2' (п. 18.5-5), а именно:
$\varphi(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 =$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)}(u_1^2 - 2\rho_{12}u_1u_2 + u_2^2)\right] du_1 du_2 =$$
$$= \varphi_u(u_1)\,\varphi_u(u_2')\,du_1\,du_2' = \varphi_u(u_1')\,\varphi_u(u_2)\,du_1'\,du_2, \quad (18.8\text{-}20)$$

где

$$u_1 = \frac{x_1 - \xi_1}{\sigma_1}, \quad u_2 = \frac{x_2 - \xi_2}{\sigma_2}, \quad u_1' = \frac{u_1 - \rho_{12}u_2}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}, \quad u_2' = \frac{u_2 - \rho_{12}u_1}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}. \quad (18.8\text{-}21)$$

(c) Распределение (16) можно представить графически с помощью **эллипсов равной вероятности** $\varphi(x_1, x_2) = \mathrm{const}$ или

$$\frac{1}{1-\rho_{12}^2}\left[\left(\frac{x_1 - \xi_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho_{12}\frac{x_1 - \xi_1}{\sigma_1}\frac{x_2 - \xi_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2 - \xi_2}{\sigma_2}\right)^2\right] = \lambda^2 = \mathrm{const}. \quad (18.8\text{-}22)$$

Вероятность того, что точка (x_1, x_2) лежит внутри эллипса (22), равна

$$P = \Phi_{\chi^2(2)}(\lambda^2),$$

что означает $\lambda^2 = \chi_P^2(2)$ (табл. 19.5-1). Две прямые регрессии, определенные уравнениями (17) и (18), делят пополам все хорды эллипса равных вероятностей, идущие в направлениях осей x_1 и x_2 соответственно (см. также п. 2.4-6).

18.8-7. Круговое нормальное распределение. Формула (16) определяет **круговое нормальное распределение** с центром (ξ_1, ξ_2) и дисперсией σ^2, если $\rho_{12} = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. При этом эллипсы равных вероятностей сводятся к окружностям, соответствующим квантилям **радиального отклонения (радиальной ошибки)**

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}.$$

Распределение r дается формулами (см. также табл. 19.5-1)

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_r(r) = \frac{2r}{\sigma^2}\varphi_{\chi^2(2)}\left(\frac{r^2}{\sigma^2}\right) = \frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \qquad (r \geqslant 0),\\ &\Phi_r(R) = \mathrm{P}\{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 \leqslant R^2\} = \int_0^R \varphi_r(r)\,dr = \Phi_{\chi^2(2)}\left(\frac{R^2}{\sigma^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (18.8\text{-}23)$$

Отметим формулы

$$r_{1/2} = \sqrt{\chi^2_{1/2}(2)}\,\sigma \approx 1{,}1774\sigma \qquad (18.8\text{-}24)$$

(круговая вероятная ошибка),

$$\mathrm{M}r = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma \approx 1{,}2533\sigma \qquad (18.8\text{-}25)$$

(средняя радиальная ошибка).

18.8-8. n-мерные нормальные распределения. Распределение n-мерной случайной величины $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **n-мерным нормальным распределением**, если оно является непрерывным с плотностью распределения

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det[\lambda_{jk}]}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Lambda_{jk}(x_j - \xi_j)(x_k - \xi_k)\right], \qquad (18.8\text{-}26)$$

где

$$\lambda_{jk} = \lambda_{kj} \quad \text{и} \quad [\Lambda_{jk}] = [\lambda_{jk}]^{-1}.$$

Нормальное распределение вполне определяется своим центром $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *и матрицей моментов* $[\lambda_{jk}] = [\Lambda_{jk}]^{-1}$ *или дисперсиями и коэффициентами корреляции* (п.18.4-8). Характеристическая функция равна

$$\chi_x(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \exp\left[i\sum_{j=1}^{n}\xi_j q_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{jk}q_j q_k\right]. \qquad (18.8\text{-}27)$$

Каждое m-мерное маргинальное или условное распределение, получаемое из нормального распределения, является нормальным. Все гиперповерхности средней квадратической регрессии совпадают с соответствующими гиперплоскостями регрессии (п. 18.4-9).

n случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, имеющих нормальное n-мерное распределение, взаимно независимы тогда и только тогда, когда они не коррелированы (см. также п. 18.4-11). Каждое n-мерное нормальное распределение может быть описано как распределение системы n взаимно независимых стандартизованных нормальных величин, связанных с исходными величинами линейным преобразованием (п. 18.5-5).

18.8-9. Теоремы сложения для специальных распределений (см. также п. 18.5-7 и табл. 19.5-1).

(a) *Биномиальное распределение* (табл. 18.8-3), *распределение Пуассона* (табл. 18.8-4) и *распределение Коши* (табл. 18.8-8) устойчивы («самовоспроизводятся») при сложении независимых величин. *Если случайная величина x является суммой*

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$$

m взаимно независимых случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_m$, *то*

$$\text{из } p_i(x_i)=\binom{n_i}{x_i}\vartheta^{x_i}(1-\vartheta)^{n_i-x_i} \text{ следует } p_x(x)=\binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}$$

$$(n=n_1+n_2+\ldots+n_m), \qquad (18.8\text{-}28)$$

$$\text{из } p_i(x_i)=e^{\xi_i}\frac{\xi_i^{x_i}}{(x_i)!} \text{ следует } p_x(x)=e^{\xi}\frac{\xi^x}{x!}\ (\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_m), \qquad (18.8\text{-}29)$$

$$\text{из } \varphi_i(x_i)=\frac{1}{\pi\alpha}\frac{1}{1+\left(\frac{x_i-\xi_i}{\alpha}\right)^2} \text{ следует } \varphi_x(x)=\frac{1}{\pi\alpha}\frac{1}{1+\left(\frac{x-\xi}{\alpha}\right)^2}$$

$$(\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_m). \qquad (18.8\text{-}30)$$

(b) *Сумма* $x=x_1+x_2+\ldots+x_n$ *взаимно независимых случайных величин* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *имеет нормальное распределение тогда и только тогда, когда все они нормально распределены.* В этом случае

$$\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n; \qquad \sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2. \qquad (18.8\text{-}31)$$

Если случайные величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (не обязательно независимые) имеют нормальные распределения, то величина $x=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$ имеет нормальное распределение с центром и дисперсией, определяемыми формулами (18.5-22).

18.9. ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

18.9-1. Случайные процессы. Случайный процесс есть случайная функция $x(t)$ от независимой переменной t. Каждое испытание дает определенную функцию $X(t)$, которая называется *реализацией* процесса или выборочной функцией. Случайный процесс можно рассматривать либо как совокупность реализаций процесса $X(t)$, либо как совокупность случайных величин, зависящих от параметра t. При этом должны быть заданы распределения вероятностей систем случайных величин $x_1=x(t_1)$, $x_2=x(t_2)$, ... (**выборочных значений**) для любого конечного множества значений $t_1, t_2, \ldots$ (выборочных моментов). Случайный процесс **дискретен** или **непрерывен**, если дискретно или непрерывно распределение величин $x(t_1)$, $x(t_2)$, ... для каждого конечного множества $t_1, t_2, \ldots$ Процесс называется **случайной последовательностью (процессом с дискретным временем)**, если независимая переменная может принимать только счетное множество значений.

Более общо случайный процесс может описываться многомерной случайной величиной $\mathbf{x}(t)\equiv[x(t), y(t), \ldots]$.

В большинстве приложений независимой переменной t служит *время*, а величина $x(t)$ или $\mathbf{x}(t)$ означает *состояние* физической системы.

Примеры: результаты последовательных наблюдений, состояния динамической системы в статистической механике Гиббса или квантовой механике, сообщения и шумы в системах связи, временные ряды в экономике.

18.9-2. Описание случайных процессов.

(a) Для описания случайного процесса надо задать распределение величины $x(t_1)$ и совместные распределения систем величин $[x(t_1), x(t_2)]$, $[x(t_1), x(t_2), x(t_3)]$, ... для каждого конечного множества значений $t_1, t_2, t_3, \ldots$ (**первое, второе, ... конечномерные распределения вероятностей** случайного процесса). Эти распределения описываются **функциями распределения** соответственно **первого, второго, ... порядков** (см. также п. 18.4-7):

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{(1)}(X_1, t_1)\equiv \mathrm{P}\{x(t_1)<X_1\},\\ &\Phi_{(2)}(X_1, t_1; X_2, t_2)\equiv \mathrm{P}\{x(t_1)<X_1;\ x(t_2)<X_2\},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (18.9\text{-}1a)$$

Дискретные и непрерывные случайные процессы описываются соответственно вероятностями или плотностями распределения:

$$\left.\begin{array}{l} p_{(1)}(X_1,\ t_1)\equiv \mathrm{P}\,\{x(t_1)=X_1\}, \\ p_{(2)}(X_1,\ t_1;\ X_2,\ t_2)\equiv \mathrm{P}\,\{x(t_1)=X_1;\ \ x(t_2)=X_2\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{(1)}(X_1,\ t_1)=\dfrac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial X_1},\quad \varphi_{(2)}(X_1,\ t_1;\ X_2,\ t_2)=\dfrac{\partial^2\Phi_{(2)}}{\partial X_1\partial X_2},\ \dots \end{array}\right\} \qquad (18.9\text{-}1b)$$

Замечание. Последовательность функций распределения (1*a*) описывает случайный процесс с возрастающей подробностью, так как каждая функция распределения $\Phi_{(n)}$ вполне определяет все предыдущие функции распределения $\Phi_{(m)}$ $(m<n)$ (п. 18.4-7). Это же справедливо и для каждой из последовательностей (1*b*). *Каждая из функций* (1) *симметрична относительно перестановки пар* $X_i,\ t_i$ *и* $X_k,\ t_k$.

(b) *Условные распределения вероятностей* для случайного процесса получаются из функций (1*b*) так же, как в п. 18.4-7, например

$$p(X_1,\ t_1;\ \dots;\ X_m,\ t_m\mid X_{m+1},\ t_{m+1};\ \dots;\ X_n,\ t_n)=$$
$$=\frac{p_{(n)}(X_1,\ t_1;\ \dots;\ X_n,\ t_n)}{p_{(n-m)}(X_{m+1},\ t_{m+1};\ \dots;\ X_n,\ t_n)},\qquad (18.9\text{-}2a)$$

$$\varphi(X_1,\ t_1;\ \dots;\ X_m,\ t_m\mid X_{m+1},\ t_{m+1};\ \dots;\ X_n,\ t_n)=$$
$$=\frac{\varphi_{(n)}(X_1,\ t_1;\ \dots;\ X_n,\ t_n)}{\varphi_{(n-m)}(X_{m+1},\ t_{m+1};\ \dots;\ X_n,\ t_n)}.\qquad (18.9\text{-}2b)$$

Замечание. Функции (2), вообще говоря, уже не будут симметричными относительно перестановки пар $X_i,\ t_i$ и $X_k,\ t_k$, отделенных вертикальной чертой.

(c) *Многомерный случайный процесс*, порождаемый, например, парой функций $x(t)$, $y(t)$, определяется подобным же образом с помощью совместных распределений выборочных значений $x(t_i)$, $y(t_k)$. В частности,

$$\Phi_2(X_1,\ t_1;\ Y_2,\ t_2)=\mathrm{P}\{\,x(t_1)<X_1,\quad y(t_2)<Y_2\}.\qquad (18.9\text{-}3)$$

18.9-3. Средние по множеству наблюдений. Корреляционные функции.

(a) Общие определения. Для функции $f[x(t_1),\ \dots,\ x(t_n)]$ от n выборочных значений $x(t_1),\ \dots,\ x(t_n)$ (*статистик*, см. п. 19.1-1) формула

$$\mathrm{M}f\equiv\mathrm{M}\,f[x(t_1),\ \dots,\ x(t_n)]=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} f(X_1,\ \dots,\ X_n)\,d\Phi_{(n)}(X_1,\ t_1;\ \dots;\ X_n,\ t_n)\qquad (18.9\text{-}4)$$

определяет **среднее по множеству наблюдений** (предполагается, что стоящий справа интеграл сходится абсолютно). В формуле (4) интегрирование производится по $X_1,\ \dots,\ X_n$; $\mathrm{M}f$ есть *функция* от $t_1,\ \dots,\ t_n$.

Аналогично для многомерного процесса, описываемого функциями $x(t)$, $y(t)$,

$$\mathrm{M}\,f[x(t_1),\ y(t_2);\ x(t_3),\ y(t_4);\ \dots]=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} f(X_1,\ Y_2;\ X_3,\ Y_4;\ \dots)\,d\Phi(X_1,\ t_1;\ Y_2,\ t_2;\ X_3,\ t_3;\ Y_4,\ t_4;\ \dots).\ (18.9\text{-}5)$$

(b) Корреляционные функции. Особый интерес представляют средние $\mathrm{M}\,x(t)=\xi(t)$, $\mathrm{M}\,x^2(t)$ и **корреляционные функции**:

автокорреляционная функция

$$\mathrm{R}_{xx}(t_1,\ t_2)=\mathrm{M}\,[x(t_1)\,x(t_2)]\qquad (18.9\text{-}6a)$$

и **взаимная корреляционная функция**

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \mathrm{M}[x(t_1)\, y(t_2)]. \tag{18.9-6b}$$

Они выражают важнейшие свойства случайного процесса и часто представляют все, что известно о данном процессе; заметим, что

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{M}x^2(t) = R_{xx}(t, t),\\ &\mathrm{D}x(t) = R_{xx}(t, t) - [\xi(t)]^2,\\ &\mathrm{cov}\,[x(t_1), y(t_2)] = R_{xy}(t_1, t_2) - \xi(t_1)\,\eta(t_2), \end{aligned}\right\} \tag{18.9-7}$$

где $\eta(t_2) = \mathrm{M}y(t_2)$. Формулы (18.9-6) и (18.9-7) относятся только к *действительным* случайным процессам.

*Замечание. Во многих руководствах введенные функции R_{xx} и R_{xy} называют *ковариационными*. Автокорреляционная функция вводится соотношением $K_{xx}(t_1, t_2) = \mathrm{M}[\mathring{x}(t_1)\mathring{x}(t_2)]$, где $\mathring{x}(t) = x(t) - \xi(t)$ — *центрированная* случайная функция. Легко проверить, что

$$K_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_1, t_2) - \xi(t_1)\,\xi(t_2).$$

Аналогично, взаимная корреляционная функция определяется как

$$K_{xy}(t_1, t_2) = \mathrm{M}[\mathring{x}(t_1)\mathring{y}(t_2)].$$

При таком определении корреляционных функций

$$\mathrm{D}x(t) = K_{xx}(t, t) \text{ и } \mathrm{cov}\,[x(t_1), y(t_2)] = K_{xy}(t_1, t_2)\ *.$$

Если $x(t)$ и $y(t)$ являются *комплексными* случайными процессами (фактически двумерными случайными процессами), то корреляционные функции определяются соотношениями

$$\left.\begin{aligned} R_{xx}(t_1, t_2) &= \mathrm{M}\,[\overline{x(t_1)}\, x(t_2)] = \overline{R_{xx}(t_2, t_1)},\\ R_{xy}(t_1, t_2) &= \mathrm{M}\,[\overline{x(t_1)}\, y(t_2)] = \overline{R_{yx}(t_2, t_1)}, \end{aligned}\right\} \tag{18.9-8}$$

которые содержат соотношения (6) как частный случай.

Заметим, что и для действительных и для комплексных x и y

$$R_{xx}(t, t) = \mathrm{M}\,|x(t)|^2, \tag{18.9-9}$$

$$|R_{xy}(t_1, t_2)|^2 \leqslant \mathrm{M}\,|x(t_1)|^2\, \mathrm{M}\,|y(t_2)|^2, \tag{18.9-10}$$

причем из существования математических ожиданий в правой части вытекает существование корреляционных функций в левой части.

(c) Характеристические функции. n-мерная **характеристическая функция**, соответствующая функции распределения n-го порядка для случайного процесса, есть (см. также п. 18.4-10)

$$\chi_{(n)}(q_1, t_1; q_2, t_2; \ldots, q_n, t_n) = \mathrm{M}\exp\left[i\sum_{k=1}^{n} q_k x(t_k)\right]. \tag{18.9-11}$$

Аналогично определяется **совместная характеристическая функция** для $x(t)$, $y(t)$, ... Дифференцирование характеристических функций позволяет находить моменты $\mathrm{M}x(t_1)$, $\mathrm{M}x^2(t_1)$, $R_{xx}(t_1, t_2)$, ..., так же как в пп. 18.3-10 и 18.4-10.

18.9-4.* Интегрирование и дифференцирование случайных функций.

(a) Пусть $x(t)$ — случайная функция, а $f(t)$ — заданная не случайная функция. Интеграл

$$y = \int_a^b f(t)\, x(t)\, dt \tag{18.9-12}$$

есть *случайная величина*, значения которой суть $\int\limits_a^b f(t)\,X(t)\,dt$, где $X(t)$ — какая-либо реализация $x(t)$ (предполагается, что интегралы существуют для всех реализаций $X(t)$). Справедлива формула

$$\mathsf{M}y \equiv \mathsf{M}\int\limits_a^b f(t)\,x(t)\,dt = \int\limits_a^b f(t)\,\mathsf{M}x(t)\,dt. \qquad (18.9\text{-}13)$$

Далеко идущим обобщением является определение интеграла (12) как предела в среднем (п. 18.6-3) соответствующих интегральных сумм (**стохастический интеграл**). *Интеграл существует в среднем тогда и только тогда, когда существует*

$$\int\limits_a^b \overline{f(t_1)}\,dt_1 \int\limits_a^b f(t_2)\,\mathrm{R}_{xx}(t_1,\ t_2)\,dt_2 = \mathsf{M}\,|\,y\,|^2. \qquad (18.9\text{-}14)$$

Несобственный интеграл ($a = -\infty$ и/или $b = \infty$) определяется обычным образом, как предел собственных интегралов.

(b) Пусть случайная функция $x(t)$ такова, что все ее реализации $X(t)$ — дифференцируемые функции. Тогда **производная случайной функции**

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \qquad (18.9\text{-}15)$$

будет представлять собой *случайную функцию*, возможные реализации которой суть производные соответствующих реализаций $X(t)$.

Математическое ожидание и корреляционные функции для производной определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{M}\dot{x}(t) &= \frac{d\mathsf{M}x(t)}{dt} = \dot{\xi}(t), \\ \mathrm{R}_{\dot{x}\dot{x}}(t_1,\ t_2) &= \frac{\partial^2 \mathrm{R}_{xx}(t_1,\ t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2}, \\ \mathrm{R}_{\dot{x}x}(t_1,\ t_2) &= \frac{\partial \mathrm{R}_{xx}(t_1,\ t_2)}{\partial t_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (18.9\text{-}16a)$$

Если существуют производные от $X(t)$ высших порядков, то формулы (16a) обобщаются следующим образом (p и q — целые числа, порядок производной):

$$\mathsf{M}x^{(p)}(t) = \xi^{(p)}(t), \qquad \mathrm{R}_{x^{(p)}x^{(q)}}(t_1,\ t_2) = \frac{\partial^{p+q}\mathrm{R}_{xx}(t_1,\ t_2)}{\partial t_1^p\,\partial t_2^q}. \qquad (18.9\text{-}16b)$$

Случайный процесс $x(t)$ непрерывен в среднем в смысле п. 18.6-3, если

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathsf{M}\,|\,x(t+\Delta t) - x(t)\,|^2 = 0.$$

Это имеет место тогда и только тогда, когда $\mathrm{R}_{xx}(t_1,\ t_2)$ непрерывна при $t_1 = t_2 = t$.

Случайный процесс $\dot{x}(t)$ называется **производной в среднем** от случайного процесса $x(t)$, если

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathsf{M}\left|\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} - \dot{x}(t)\right|^2 = 0.$$

Для существования производной в среднем от случайного процесса $x(t)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала производная $\dfrac{\partial^2 \mathrm{R}_{xx}(t_1,\ t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2}$ при $t_1 = t_2 = t$.

Если производная в среднем существует при всех t, то для нее справедливы формулы (16).

Можно также определить интеграл и производную в смысле сходимости по вероятности (п. 18.6-1).

Важные соотношения этого пункта применяются, в частности, для вывода соотношений между входными и выходными сигналами в п. 18.12-2.

18.9-5. Процессы, определяемые случайными параметрами. Иногда случайный процесс можно представить как неслучайную функцию $x = x(t;\ \eta_1, \eta_2, \ldots)$ от t и случайных параметров $\eta_1, \eta_2, \ldots$ *При этом случайный процесс вполне определяется совместным распределением параметров* $\eta_1, \eta_2, \ldots$ и

$$\mathsf{M} f[x(t_1), \ldots, x(t_n)] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f[x(t_1;\ \eta_1, \eta_2, \ldots), \ldots, x(t_n;\ \eta_1, \eta_2, \ldots)]\, d\Phi_{\eta_1\eta_2 \ldots}(\eta_1, \eta_2, \ldots). \tag{18.9-17}$$

В частности, каждое распределение вероятностей для такого случайного процесса однозначно определяется его характеристической функцией (п. 18.4-10)

$$\chi_{(n)}(q_1, t_1; \ldots; q_n, t_n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i \sum_{k=1}^{n} q_k x(t_k;\ \eta_1, \eta_2, \ldots)\right] d\Phi_{\eta_1\eta_2 \ldots}(\eta_1, \eta_2, \ldots). \tag{18.9-18}$$

18.9-6. Разложение по ортонормированной системе. Если действительный или комплексный случайный процесс $x(t)$ с конечным математическим ожиданием $\mathsf{M}\, x(t)$ и непрерывной корреляционной функцией $R_{xx}(t_1, t_2)$ задан на замкнутом интервале $[a, b]$, то существует полная ортонормированная система функций $\{u_k(t)\}$ (п. 15.2-4) такая, что

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(t), \qquad c_k = \int_a^b \overline{u_k(t)}\, x(t)\, dt \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{18.9-19}$$

где интегралы и ряд сходятся в среднем в смысле п. 18.6-3 (см. также п. 18.9-4, а).

Таким образом, случайный процесс представляется множеством случайных коэффициентов $\{c_k\}$; первые n коэффициентов могут дать подходящее приближенное представление. В частности, *существует такая полная ортонормированная система* $u_k(t) \equiv \psi_k(t)$, *что все величины* c_k *будут некоррелированными стандартизованными случайными величинами*, т. е.

$$\mathsf{M} c_k = 0, \qquad \mathsf{M}\, \bar{c}_i c_k = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots) \tag{18.9-20}$$

(*теорема Карунена—Лоэва*). А именно, упомянутые функции $\psi_k(t)$ будут собственными функциями интегрального уравнения

$$\lambda \int_a^b R_{xx}(t_1, t_2)\, \psi(t_2)\, dt_2 = \psi(t_1) \tag{18.9-21}$$

(см. также п. 15.3-3). Соответствующие собственные значения λ_k неотрицательны и могут иметь кратность не более конечного порядка (по теореме Мерсера, п. 15.3-4), причем

$$\mathsf{M} \int_a^b |x(t)|^2\, dt = \int_a^b R_{xx}(t, t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}. \tag{18.9-22}$$

Теорема Карунена—Лоэва обобщает теорему п. 18.5-5.

П р и м е р ы. Периодический случайный процесс (п. 18.11-1), шум с ограниченной полосой частот (п. 18.11-2, b). Несмотря на то, что явное аналитическое решение интегрального уравнения (21) редко возможно, эта теорема применяется в теории обнаружения сигналов.

18.10. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПЛОТНОСТИ

18.10-1. Стационарные случайные процессы. Случайный процесс $x(t)$ называется **стационарным**, если все его конечномерные распределения вероятностей инвариантны относительно сдвига по параметру t:

$$\Phi_{(n)}(X_1, t_1+t_0; X_2, t_2+t_0; \ldots; X_n, t_n+t_0) \equiv$$
$$\equiv \Phi_{(n)}(X_1, t_1; X_2, t_2; \ldots; X_n, t_n) \qquad (-\infty < t_0 < \infty;\ n=1, 2, \ldots), \quad (18.10\text{-}1)$$

т. е. если распределение вероятностей n-го порядка зависит только от $n-1$ *разностей*

$$\tau_1 = t_2 - t_1, \quad \tau_2 = t_3 - t_1, \ldots, \quad \tau_{n-1} = t_n - t_1 \qquad (18.10\text{-}2)$$

выборочных моментов t_k. Аналогично, два или более случайных процессов $x(t)$, $y(t)$, ... называются **совместно стационарными**, если все их совместные распределения вероятностей инвариантны относительно сдвига по параметру t.

Для стационарных и совместно стационарных случайных процессов каждое среднее по множеству наблюдений (п. 18.9-3) зависит только от $n-1$ разности (2); например,

$$\mathrm{M} f[x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)] = \mathrm{M} f[x(0), x(\tau_1), \ldots, x(\tau_{n-1})] \qquad (18.10\text{-}3)$$

для всех t_i (см. также п. 18.10-2).

18.10-2. Корреляционные функции по множеству наблюдений (см. также п. 18.9-3).

(а) Для действительного или комплексного *стационарного процесса* $x(t)$ [и совместно стационарных процессов $x(t)$, $y(t)$] *средние значения*

$$\mathrm{M}x(t) = \mathrm{M}x(0) = \mathrm{M}x = \xi; \qquad \mathrm{M}\,|x(t)|^2 = \mathrm{M}\,|x(0)|^2 = \mathrm{M}\,|x|^2;$$
$$\mathrm{M}y(t) = \eta, \qquad \mathrm{M}\,|y(t)|^2 = \mathrm{M}\,|y|^2$$

постоянны, а корреляционные функции зависят только от запаздывания $\tau = t_2 - t_1$. В этом случае *)

$$\left.\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \mathrm{M}\left[\overline{x(t)}\,x(t+\tau)\right] = \overline{R_{xx}(-\tau)}, \\ R_{xy}(\tau) &= \mathrm{M}\left[\overline{x(t)}\,y(t+\tau)\right] = \overline{R_{yx}(-\tau)}, \end{aligned}\right\} \qquad (18.10\text{-}4)$$

$$|R_{xx}(\tau)| \leqslant R_{xx}(0) = \mathrm{M}\,|x|^2, \qquad (18.10\text{-}5)$$

$$|R_{xy}(\tau)|^2 \leqslant R_{xx}(0)\,R_{yy}(0) = \mathrm{M}\,|x|^2\,\mathrm{M}\,|y|^2. \qquad (18.10\text{-}6)$$

В последних формулах *из существования математических ожиданий справа вытекает существование корреляционных функций слева. Если корреляционная функция* $R_{xx}(\tau)$ непрерывна при $\tau=0$, то она непрерывна при всех τ.

Матрица $[R_{xx}(t_i - t_k)]$ является эрмитовой и положительно полуопределенной (п. 13.5-3) для любого конечного множества значений $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Случайные процессы называются **стационарными** (**или совместно стационарными**) **в широком смысле**, *если для них средние* $\mathrm{M}x(t)$, $\mathrm{M}y(t)$ *постоянны и корреляционные функции зависят только от* τ, *как в формулах* (4).

(b) **Нормированные корреляционные функции** определяются формулами

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{R_{xx}(\tau) - |\xi|^2}{\mathrm{M}\,|x|^2 - |\xi|^2}; \qquad \rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau) - \bar{\xi}\eta}{\sqrt{\mathrm{M}\,|x|^2 - |\xi|^2}\,\sqrt{\mathrm{M}\,|y|^2 - |\eta|^2}}. \qquad (18.10\text{-}7)$$

При этом $|\rho_{xx}(\tau)| \leqslant 1$, $|\rho_{xy}(\tau)| \leqslant 1$.

*) См. замечание к п. 18.9-3, b.

(с) Для *действительных* стационарных процессов $x(t)$ и $y(t)$ корреляционные функции действительны и

$$R_{xx}(\tau) \equiv R_{xx}(-\tau), \quad R_{xy}(\tau) \equiv R_{yx}(-\tau). \tag{18.10-8}$$

Нормированные корреляционные функции $\rho_{xx}(\tau)$ и $\rho_{xy}(\tau)$ являются *действительными коэффициентами корреляции* (п. 18.4-4).

18.10-3. Спектральная плотность по множеству наблюдений. Для стационарного случайного процесса $x(t)$ и совместно стационарных случайных процессов $x(t)$, $y(t)$ **спектральная плотность** $\Phi_{xx}(\omega)$ **и взаимная спектральная плотность** $\Phi_{xy}(\omega)$ по множеству наблюдений (по множеству реализаций) определяются с помощью *соотношений Хинчина—Винера*

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{xx}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \overline{\Phi_{xx}(\omega)}, \\ \Phi_{xy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \overline{\Phi_{yx}(\omega)}. \end{aligned}\right\} \tag{18.10-9}$$

Спектральная плотность $\Phi_{xx}(\omega)$ *всегда действительна*, даже для комплексного процесса $x(t)$; но взаимная спектральная плотность $\Phi_{xy}(\omega)$ может быть комплексной даже при действительных $x(t)$ и $y(t)$.

При соответствующих условиях сходимости имеют место формулы обращения

$$\left.\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega = \overline{R_{xx}(-\tau)}, \\ R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau}\, d\omega = \overline{R_{yx}(-\tau)}. \end{aligned}\right\} \tag{18.10-10}$$

Преобразования Фурье (9) вводятся обычно для упрощения соотношений между корреляционными функциями входного и выходного сигналов в линейной стационарной системе (п.18.12-3). Существование преобразований (9) требует, кроме существования $\mathsf{M}\,|x|^2$ и $\mathsf{M}\,|y|^2$ (п. 18.9-3), еще и достаточно быстрого стремления к нулю величин $R_{xx}(\tau)$ и $R_{xy}(\tau)$ при $\tau \to \infty$. В случае периодического процесса для возможности применения спектральных плотностей приходится вводить члены с дельта-функциями (п. 18.10-9).

18.10-4. Корреляционные функции и спектры действительных процессов. Если $x(t)$ и $y(t)$ *действительны*, то действительны и корреляционные функции $R_{xx}(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$; в этом случае (см. также формулы (8))

$$\Phi_{xx}(\omega) = 2\int_0^{\infty} R_{xx}(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau = \Phi_{xx}(-\omega), \tag{18.10-11}$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \Phi_{xx}(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega = R_{xx}(-\tau), \tag{18.10-12}$$

$$\Phi_{xy}(\omega) = \Phi_{yx}(-\omega) = \overline{\Phi_{xy}(-\omega)}. \tag{18.10-13}$$

18.10-5. Спектральное разложение средней «мощности» действительных процессов. Для *действительного процесса* $x(t)$ подстановка $\tau = 0$ в соотношение (12) дает

$$\mathsf{M}\,|x|^2 = R_{xx}(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \Phi_{xx}(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(\omega)\, d\omega. \tag{18.10-14}$$

Это можно толковать как *спектральное разложение* средней «мощности» $\mathrm{M}\,|x|^2$ по частотам ω в $(0, \infty)$ или $(-\infty, \infty)$. Второй интеграл дает разложение по всем положительным и отрицательным частотам со спектральной плотностью $\Phi_{xx}(\omega)$ (размерность $\Phi_{xx}(\omega)$ есть (единицы $x)^2$/*герц*), первый интеграл — по неотрицательным («действительным») частотам с «односторонней» спектральной плотностью $2\Phi_{xx}(\omega)$.

Взаимная спектральная плотность $\Phi_{xy}(\omega)$, вообще говоря, комплексная, не может быть истолкована так просто. Для *действительных процессов* $x(t)$, $y(t)$ подстановка $\tau=0$ в соотношение (10) дает

$$\mathrm{M}xy = \mathrm{R}_{xy}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(\omega)\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \operatorname{Re}\Phi_{xy}(\omega)\,d\omega. \tag{18.10-15}$$

Величину $\operatorname{Re}\Phi_{xy}(\omega)$ иногда называют **взаимной спектральной плотностью мощности**. Мнимая часть $\operatorname{Im}\Phi_{xy}(\omega)$ не дает вклада в среднюю мощность (15).

18.10-6. Другие виды спектральной плотности по множеству наблюдений. В литературе спектральная плотность записывается еще в следующих видах:

$$\mathrm{S}_{xx}(\nu) = \Phi_{xx}(2\pi\nu) \quad \text{с} \quad \mathrm{M}\,|x|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{S}_{xx}(\mathrm{S})\,d\nu, \tag{18.10-16}$$

где $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, размерность $\mathrm{S}_{xx}(\nu)$ есть (единицы $x)^2$/*герц*,

$$g_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\Phi_{xx}(\omega) \quad \text{с} \quad \mathrm{M}\,|x|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} g_{xx}(\omega)\,d\omega, \tag{18.10-17}$$

размерность $g_{xx}(\omega)$ есть (единицы $x)^2$/радиан в секунду.

Для односторонней плотности применяются обозначения

$$\Gamma_{xx}(\nu) = 2\mathrm{S}_{xx}(\nu) = 2\Phi_{xx}(2\pi\nu) \qquad (\nu \geqslant 0), \tag{18.10-18}$$

$$G_{xx}(\omega) = 2g_{xx}(\omega) = \frac{1}{\pi}\Phi_{xx}(\omega) \qquad (\omega \geqslant 0). \tag{18.10-19}$$

Аналогично записываются также и взаимные спектральные плотности. Большое количество различных обозначений требует внимания при работе с литературой.

18.10-7. Средние по времени и эргодические процессы.

(а) Средние по времени. Для любого процесса $x(t)$ **среднее по времени (по параметру t)** от функции $f[x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)]$ определяется так:

$$\langle f[x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)]\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f[x(t_1+t), x(t_2+t), \ldots, x(t_n+t)]\,dt, \tag{18.10-20}$$

если этот предел существует*). *Если $x(t)$ описывает случайный процесс, то $\langle f\rangle$ есть случайная величина для каждого данного множества значений $t_1, t_2, \ldots$* $\ldots, t_n$. Заметим, что

$$\mathrm{M}\langle f\rangle = \mathrm{M}f, \tag{18.10-21}$$

если соответствующие интегралы существуют.

---

*) Вместо обозначения $\langle f\rangle$, так же как и вместо $\mathrm{M}f$, иногда применяют $\bar{f}$; но последнее обозначение лучше сохранить для *эмпирического среднего*

$$\bar{f} = \frac{1}{n}\left({}^1f + {}^2f + \ldots + {}^nf\right),$$

где ^{k} есть значение f для k-й выборки $x(t) = {}^kx(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ (см. также п. 19.8-4).

(b) Эргодические процессы. Стационарный случайный процесс $x(t)$ обладает **эргодическим** свойством, если *для любой функции* $f[x(t_1), \ldots, x(t_n)]$ *с вероятностью* 1 *среднее по времени* (20) *совпадает со средним по множеству наблюдений* (18.9-4), т. е.

$$\mathsf{P}\{\langle f\rangle = \mathsf{M}f\} = 1 \qquad (18.10\text{-}22)$$

(при условии, что эти средние существуют). При этом каждая реализация $x(t)$ определяет случайный процесс однозначно с вероятностью 1, например, через характеристическую функцию (18.9-11), вычисляемую по $x(t)$ с помощью формулы (21). *Каждое среднее по времени* t, *например*, $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$ *или* $R_{xx}(\tau)$ (п. 18.10-8) описывает с вероятностью 1 общее свойство всего множества реализаций $x(t)$.

Стационарный процесс эргодичен, если вероятность любого его стационарного подмножества равна 0 или 1.

Два или более совместно стационарных случайных процессов называются **совместно эргодическими**, если эргодическое свойство имеет место для любых выборочных средних.

18.10-8. Корреляционные функции и спектральные плотности по времени. Для действительных или комплексных функций $x(t)$, $y(t)$ (которые могут и не быть реализациями случайного процесса) с конечными средними квадратами по времени

$$\left.\begin{aligned} \langle |x(0)|^2\rangle &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt, \\ \langle |y(0)|^2\rangle &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|y(t)|^2\,dt \end{aligned}\right\} \qquad (18.10\text{-}23)$$

существуют корреляционные функции по времени:

автокорреляционная функция

$$R_{xx}(\tau) = \langle \overline{x(0)}\,x(\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\overline{x(t)}\,x(t+\tau)\,dt \qquad (18.10\text{-}24)$$

и *взаимная корреляционная функция*

$$R_{xy}(\tau) = \langle \overline{x(0)}\,y(\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\overline{x(t)}\,y(t+\tau)\,dt \qquad (18.10\text{-}25)$$

(обращаем внимание на разницу в обозначениях корреляционных функций по множеству наблюдений (R) и по времени (R)).

Эти корреляционные функции удовлетворяют соотношениям, которые получаются из соотношений п. 18.10-2, *если каждое среднее по множеству наблюдений (математическое ожидание) заменить соответствующим средним по времени.*

Спектральная плотность $\Psi_{xx}(\omega)$ **и взаимная спектральная плотность** $\Psi_{xy}(\omega)$ для средних по времени вводятся с помощью соотношений Хинчина — Винера

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{xx}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau = \overline{\Psi_{xx}(\omega)}, \\ \Psi_{xy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau = \overline{\Psi_{yx}(\omega)}. \end{aligned}\right\} \qquad (18.10\text{-}26)$$

Если эти спектральные плотности существуют (без формального допуска членов с дельта-функциями), то они удовлетворяют соотношениям, аналогичным тем, которые приведены в пп. 18.10-3—18.10-5.

Другие виды спектральных плотностей вводятся так же, как в п. 18.10-6.

Если $x(t)$, $y(t)$ — реализация совместно стационарного процесса, то корреляционные функции (24), (25) и спектральные плотности (26) являются случайными величинами, математические ожидания которых равны соответствующим средним характеристикам по множеству наблюдений. Если $x(t)$, $y(t)$ совместно эргодичны, то с вероятностью 1 их корреляционные функции (24), (25) и спектральные плотности (26) совпадают с соответствующими средними характеристиками по множеству наблюдений.

Спектральные плотности можно ввести также с помощью формального соотношения

$$\Psi_{xy}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \overline{a_T(\omega)}\, b_T(\omega), \qquad (18.10\text{-}27a)$$

где $a_T(\omega)$ и $b_T(\omega)$ — преобразования Фурье от «усеченных» функций $x_T(t)$ и $y_T(t)$, равных соответственно $x(t)$, $y(t)$ при $|t| < T$ и равных 0 при $|t| > T$:

$$a_T(\omega) = \int_{-T}^{T} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt; \quad b_T(\omega) = \int_{-T}^{T} y(t)\, e^{-i\omega t}\, dt. \qquad (18.10\text{-}27b)$$

Соответствующую спектральную плотность по множеству наблюдений можно при этом определить как математическое ожидание: $\Phi_{xy}(\omega) = M\Psi_{xy}(\omega)$; тогда соотношения Хинчина — Винера (26) будут следовать из теоремы Бореля о свертке (табл. 4.11-2). Однако формулы (27) имеют смысл только, если спектральные плотности не содержат членов с дельта-функциями (п. 18.10-9 и 18.11-5; см. также п. 18.10-10).

18.10-9. Функции с периодическими компонентами (см. также п. 18.11-1). Так же как и другие средние по времени, корреляционные функции и спектральные плотности по времени представляют особый интерес, когда они с вероятностью 1 совпадают с соответствующими характеристиками по множеству наблюдений (в случае эргодических процессов, п. 18.10-7, *b*, это верно для *всех* средних по времени). Если это имеет место, то *простые интегралы* (24), (25) *обычно легче вычислить, чем двойные интегралы* (4). Таким образом, эргодическое свойство позволяет истолковать, например, $\Phi_{xx}(\omega)$ как «частотный спектр» одной «типичной» реализации $x(t)$, так как $\Phi_{xx}(\omega) \equiv \Psi_{xx}(\omega)$ с вероятностью 1.

Корреляционные функции и спектральные плотности по времени легко вычислить для функций $x(t)$, $y(t)$, представимых в виде сумм периодических слагаемых. В частности, для

$$x(t) = a\cos(\omega_1 t + \varphi), \quad y(t) = \alpha\cos(\omega_2 t + \psi) \qquad (18.10\text{-}28a)$$

имеем

$$R_{xx}(\tau) = \frac{a^2}{2}\cos\omega_1\tau; \quad R_{xy}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}a\alpha\cos(\omega_1\tau + \psi - \varphi) & \text{при } \omega_2 = \omega_1, \\ 0 & \omega_2 \neq \text{при } \omega_1. \end{cases} \qquad (18.10\text{-}28b)$$

Более общо, пусть $x(t)$ — действительная функция с ограниченной вариацией в каждом конечном интервале (п. 4.4-8), имеющая конечный средний квадрат (среднюю мощность) $\langle |x(0)|^2\rangle$. Тогда функция $x(t)$ может быть представлена почти всюду (п. 4.6-14, *b*) как сумма ее среднего значения $\langle x(0)\rangle = c_0$, некоторого ряда периодических слагаемых и апериодической компоненты $p(t)$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t} + p(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k\cos\omega_k t + b_k\sin\omega_k t) + p(t) =$$
$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(\omega_k t + \varphi_k) + p(t), \qquad (18.10\text{-}29a)$$

где

$$\omega_0 = 0, \ \omega_k = -\omega_{-k} > 0,$$
$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2}A_k e^{i\varphi_k} = \bar{c}_{-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$
$$A_k^2 = a_k^2 + b_k^2 = 4|c_k|^2.$$

При этом

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,e^{-i\omega t}\,dt=\begin{cases} c_0 & \text{при } \omega=0,\\ c_k=\bar c_{-k} & \text{при } \omega=\omega_k \ (k=\pm 1, \pm 2, \ldots),\\ 0 & \text{для остальных значений } \omega;\end{cases}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\cos\omega t\,dt=\begin{cases} c_0 & \text{при } \omega=0,\\ \frac{1}{2}a_k & \text{при } \omega=\omega_k \ (k=1, 2, \ldots),\\ 0 & \text{для остальных значений } \omega;\end{cases}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\sin\omega t\,dt=\begin{cases} \frac{1}{2}b_k & \text{при } \omega=\omega_k \ (k=1, 2, \ldots),\\ 0 & \text{для остальных значений } \omega;\end{cases} \qquad (18.10\text{-}29b)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} p(t)\,e^{-i\omega t}\,dt=0. \qquad (18.10\text{-}29c)$$

Пусть, далее, функция $y(t)$ удовлетворяет тем же условиям, что и $x(t)$, так что

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k e^{i\omega_k t}+q(t)=$$
$$=\gamma_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos\omega_k t+\beta_k\sin\omega_k t)+q(t)=$$
$$=\gamma_0+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cos(\omega_k t+\psi_k)+q(t); \qquad (18.10\text{-}30)$$

круговые частоты $\omega_1, \omega_2, \ldots$ можно считать общими для обеих функций $x(t)$ и $y(t)$. Тогда справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned} R_{xx}(\tau)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 e^{i\omega_k\tau}+R_{pp}(\tau)=\\ &=c_0^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}A_k^2\cos\omega_k\tau+R_{pp}(\tau),\\ \Psi_{xx}(\omega)&=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2\delta(\omega-\omega_k)+\Psi_{pp}(\omega)=\\ &=2\pi c_0^2\delta(\omega)+\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}A_k^2[\delta(\omega-\omega_k)+\delta(\omega+\omega_k)]+\Psi_{pp}(\omega),\end{aligned}\right\} \qquad (18.10\text{-}31)$$

$$\left.\begin{aligned} R_{xy}(\tau)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\bar c_k\gamma_k e^{i\omega_k\tau}+R_{pq}(\tau)=\\ &=c_0\gamma_0+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}[(a_k\alpha_k+b_k\beta_k)\cos\omega_k\tau+(a_k\beta_k-b_k\alpha_k)\sin\omega_k\tau]+R_{pq}(\tau)=\\ &=c_0\gamma_0+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}A_kB_k\cos(\omega_k\tau+\psi_k-\varphi_k)+R_{pq}(\tau),\\ \Psi_{xy}(\omega)&=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\bar c_k\gamma_k\delta(\omega-\omega_k)+\Psi_{pq}(\omega).\end{aligned}\right\} \qquad (18.10\text{-}32)$$

Взаимная корреляционная функция $R_{xy}(\tau)$ измеряет связь между $x(t)$ и $y(t)$ или «сериальную корреляцию» между значениями функций $x(t)$ и $y(t+\tau)$, разделенными *запаздыванием* τ. Функции $x(t)$ и $y(t)$ называются **некоррелированными**, если $R_{xy}(\tau) \equiv 0$.

Замечание. Функции $x(t)$, $y(t)$ принадлежат гильбертовому пространству со скалярным произведением $(u, v) = \langle \overline{u(0)}\, v(0) \rangle$ (п. 14.2-6). Отметим соотношения ортогональности

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-i\omega t} e^{i\Omega t}\, dt = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega = \Omega, \\ 0 & \text{при } \omega \neq \Omega; \end{cases} \tag{18.10-33}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \cos(\omega t + \alpha)\cos(\Omega t + \beta)\, dt = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) & \text{при } \omega = \Omega, \\ 0 & \text{при } \omega \neq \Omega. \end{cases} \tag{18.10-34}$$

18.10-10. Обобщенные преобразования Фурье и спектральные функции.

(a) Чтобы избежать затруднений с членами, содержащими дельта-функции в преобразованиях Фурье и спектральных плотностях периодических функций, можно ввести **обобщенное преобразование Фурье** $X_{\text{int}}(i\omega)$ от $x(t)$ по формуле

$$X_{\text{int}}(i\omega) - X_{\text{int}}(i\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \frac{e^{-i\omega t} - e^{-i\omega_0 t}}{-2\pi i t}\, dt. \tag{18.10-35}$$

Формула обращения здесь записывается с помощью интеграла Стилтьеса (п. 4.6-17):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, dX_{\text{int}}(i\omega). \tag{18.10-36}$$

Если существует обычное преобразование Фурье $X_F(i\omega)$, то

$$\left.\begin{aligned} X_{\text{int}}(i\omega) - X_{\text{int}}(i\omega_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0}^{\omega} X_F(i\omega)\, d\omega; \\ X_F(i\omega) &= 2\pi\, \frac{dX_{\text{int}}(i\omega)}{d\omega}. \end{aligned}\right\} \tag{18.10-37}$$

Если функцию $x(t)$ можно представить рядом $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}$ (например, в случае периодических функций, см. также п. 18.11-1), то обобщенное преобразование $X_{\text{int}}(i\omega)$ будет ступенчатой функцией (п. 21.9-1).

(b) **Обобщенная спектральная функция** $\Phi_{\text{int}}(\omega)$ для стационарного или стационарного в широком смысле случайного процесса $x(t)$ есть обобщенное преобразование Фурье от его корреляционной функции;

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{\text{int}}(\omega) - \Phi_{\text{int}}(\omega_0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\, \frac{e^{-i\omega\tau} - e^{-i\omega_0\tau}}{-2\pi i\tau}\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0}^{\omega} \Phi_{xx}(\omega)\, d\omega, \\ &\text{причем} \\ &R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\, d\Phi_{\text{int}}(\omega). \end{aligned}\right\} \tag{18.10-38}$$

Аналогичные соотношения имеют место для корреляционных и спектральных функций по времени.

(c) Для *действительных* стационарных или стационарных в широком смысле процессов $x(t)$ имеют место следующие обобщения соотношений Хинчина — Винера (9) и (26):

$$\frac{1}{2\varepsilon} \mathrm{M} \,|\, X_{\text{int}}[i(\omega+\varepsilon)] - X_{\text{int}}[i(\omega-\varepsilon)]\,|^2 = \frac{1}{2\varepsilon}[\Phi_{\text{int}}(\omega+\varepsilon) - \Phi_{\text{int}}(\omega-\varepsilon)] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_{\omega-\varepsilon}^{\omega+\varepsilon} \Phi_{xx}(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\,\frac{\sin\varepsilon\tau}{\varepsilon\tau}\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau, \qquad (18.10\text{-}39)$$

$$2\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\, X_{\text{int}}[i(\omega+\varepsilon)] - X_{\text{int}}[i(\omega-\varepsilon)]\,|^2 \cos\omega\tau\,d\omega =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} x(t)\,x(t+\tau)\,dt = R_{xx}(\tau). \qquad (18.10\text{-}40)$$

Отсюда при $\tau = 0$ получаем *теорему Винера о квадратичном отклонении:*

$$2\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\, X_{\text{int}}[i(\omega+\varepsilon)] - X_{\text{int}}[i(\omega-\varepsilon)]\,|^2\,d\omega = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} |\,x(t)\,|^2\,dt. \qquad (18.10\text{-}41)$$

Если существует спектральная плотность по времени $\Psi_{xx}(\omega)$, то соотношение (40) приводит к соотношению Хинчина — Винера (26), причем

$$\Psi_{xx}(\omega) = 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\,|\, X_{\text{int}}[i(\omega+\varepsilon)] - X_{\text{int}}[i(\omega-\varepsilon)]\,|^2. \qquad (18.10\text{-}42)$$

18.11. ТИПЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. ПРИМЕРЫ

18.11-1. Процессы с постоянными и периодическими реализациями.

(a) Постоянная выборочная функция (рис. 18.11-1, *a*). Если каждая выборочная функция (реализация) $x(t)$ тождественно равна постоянному

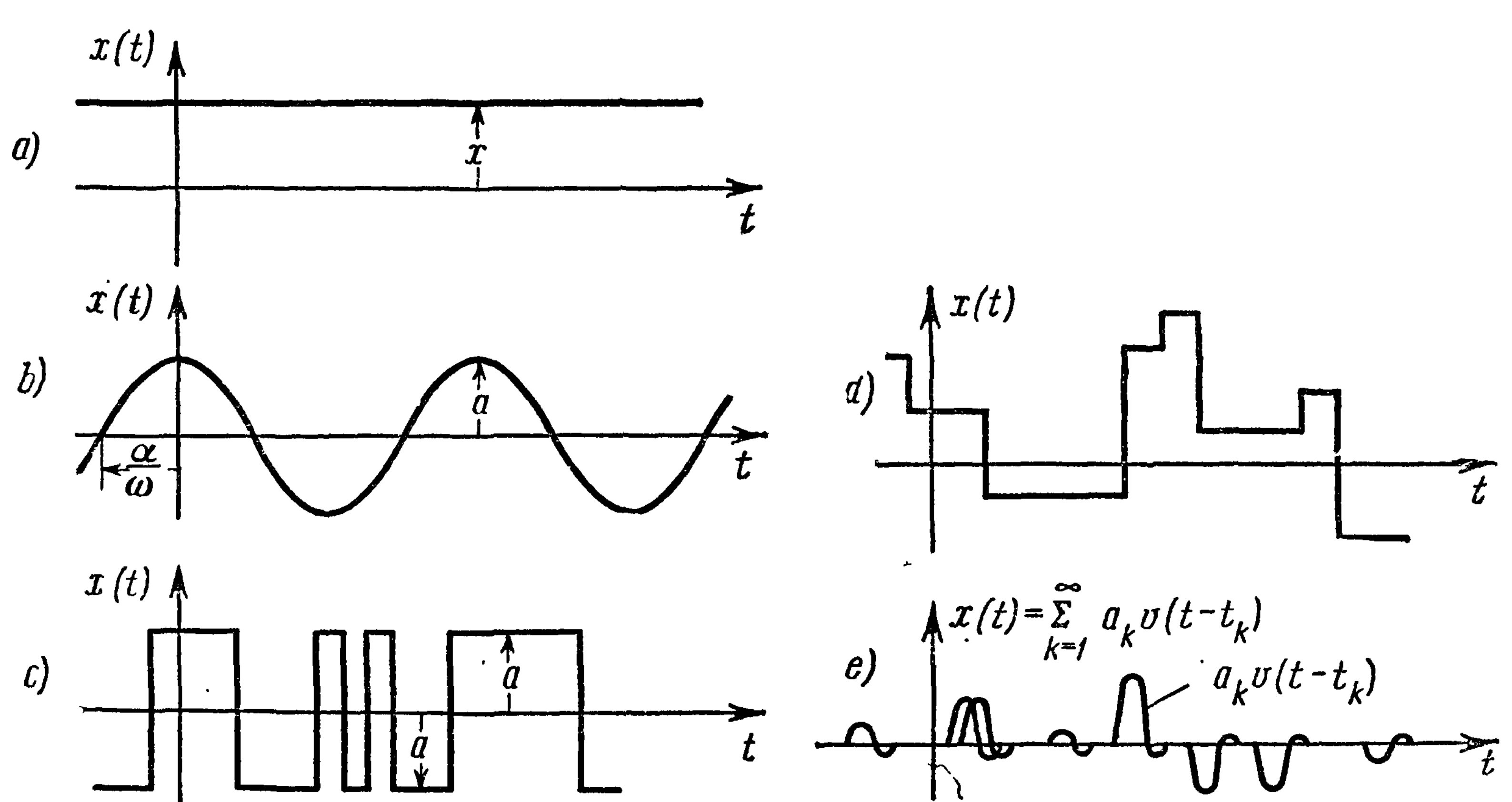


Рис. 18.11-1. Выборочные функции (реализации) для пяти примеров случайных процессов. На рис. 18.11-1,*e* $x(t)$ есть *сумма* показанных отдельных импульсов $a_k v(t - t_k)$.

случайному параметру a с определенным распределением вероятностей, то этим вполне определяется случайный процесс. Такой процесс является

стационарным, но не эргодическим. Если существует $\mathsf{M}\, a^2$, то

$$\mathsf{M}x(t) = \mathsf{M}a, \quad \mathrm{R}_{xx}(\tau) = \mathsf{M}a^2, \tag{18.11-1a}$$

в то время как

$$\langle x(t) \rangle = a, \quad R_{xx}(\tau) = a^2. \tag{18.11-1b}$$

(b) Синусоидальный случайный процесс (рис. 18.11-1, *b*)

$$x(t) = a \sin(\omega t + \alpha). \tag{18.11-2}$$

Если амплитуда a постоянна, а фаза α — случайная величина с равномерным распределением вероятностей в интервале $(0, 2\pi)$, то процесс $x(t)$ стационарен и эргодичен с

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{(1)}[x(t)] = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad (|x| \leqslant a), \\ &\mathsf{M}x(t) = \langle x(t) \rangle = 0, \qquad \mathrm{R}_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega\tau. \end{aligned}\right\} \tag{18.11-3}$$

Если амплитуда a — непрерывная случайная величина с плотностью $\varphi_a(a)$, не зависящая от фазы α, то процесс $x(t)$ стационарен, но, вообще говоря, не эргодичен. При этом

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{(1)}[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|a| > |x|} \frac{\varphi_a(a)\, da}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \\ &\mathsf{M}x(t) = 0, \quad \mathrm{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} \mathsf{M}a^2 \cdot \cos \omega\tau. \end{aligned}\right\} \tag{18.11-4}$$

* (Здесь предполагается, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_a(a)\, da}{|a|}$ сходится.) *

В частности, если амплитуда a имеет *распределение Релея* с плотностью (п. 18.8-7)

$$\varphi_a(a) = \begin{cases} a e^{-\frac{1}{2} a^2} & (a \geqslant 0), \\ 0 & (a < 0), \end{cases} \tag{18.11-5}$$

то случайный процесс $x(t)$ будет гауссовским (п. 18.11-3).

Если фаза α распределена неравномерно на интервале $(0, 2\pi)$, то процесс не будет стационарным даже при постоянной амплитуде a.

(c) Общий периодический процесс (см. также п. 18.10-9). Синусоидальный случайный процесс есть частный случай общего периодического процесса со случайной фазой вида

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k(\omega_0 t + \alpha) + b_k \sin k(\omega_0 t + \alpha)], \tag{18.11-6}$$

где фаза α распределена равномерно в интервале $(0, 2\pi)$ (предполагается, что ряд сходится в среднем в смысле п. 18.6-3). Такой процесс стационарен и эргодичен, причем

$$\left.\begin{aligned} &\mathsf{M}x(t) = \langle x(t) \rangle = c_0, \\ &\mathrm{R}_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) = c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \cos k\omega_0\tau, \\ &\Phi_{xx}(\omega) = \Psi_{xx}(\omega) = \\ &\quad = 2\pi c_0^2 \delta(\omega) + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) [\delta(\omega - k\omega_0) + \delta(\omega + k\omega_0)]. \end{aligned}\right\} \tag{18.11-7}$$

Более общий периодический процесс определяется рядом Фурье

$$x(t)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega_0 t+b_k\sin k\omega_0 t), \tag{18.11-8}$$

в котором все (действительные) коэффициенты c_0, a_k, b_k случайны, а ряд предполагается сходящимся в среднем. Такой процесс будет стационарен в широком смысле при выполнении следующих условий:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{M}a_k=\mathrm{M}b_k=0, \quad \mathrm{M}a_k^2=\mathrm{M}b_k^2,\\ &\mathrm{M}c_0a_i=\mathrm{M}c_0b_k=\mathrm{M}a_ib_k=0,\\ &\mathrm{M}a_ia_k=\mathrm{M}b_ib_k=0 \quad (i\neq k). \end{aligned}\right\} \tag{18.11-9}$$

В этом случае формула (8) дает разложение процесса $x(t)$ по ортогональной системе в смысле п. 18.9-5, причем

$$\mathrm{M}x(t)=\mathrm{M}c_0;\qquad \mathrm{R}_{xx}(\tau)=\mathrm{M}c_0^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{M}\left(a_k^2+b_k^2\right)\cos k\omega_0\tau. \tag{18.11-10}$$

✳ (d) **Белый шум.** Стационарный случайный процесс $x(t)$ с постоянной спектральной плотностью $\Phi_{xx}(\omega)=\Phi_0$ называется белым шумом.

Это название объясняется некоторой аналогией с белым светом: белый свет представляет собой сумму всех спектральных составляющих, имеющих одну и ту же интенсивность, белый шум представляет собой *сумму гармонических колебаний всех частот, имеющих одну и ту же дисперсию амплитуды.*

Корреляционная функция для $x(t)$ равна

$$\mathrm{R}_{xx}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_0e^{i\omega\tau}\,d\omega=\Phi_0\delta(\tau)$$

(см. формулу (21.9-25)). Величина Φ_0 называется *интенсивностью* белого шума. Белый шум представляет чисто случайный процесс (см. п. 18.11-4, b). ✳

Рис. 18.11-2. График функции $\operatorname{sinc} t=\dfrac{\sin\pi t}{\pi t}$.

18.11-2. Процессы с ограниченным спектром. Теорема Котельникова.

(a) Процесс $x(t)$ имеет **ограниченный спектр** или **ограниченную полосу частот,** если его преобразование Фурье $X_F(i\omega)$ (п. 4.11-3) равно нулю при $|\omega|>2\pi B$; число B называется **шириной** спектра процесса $x(t)$ и измеряется в герцах, если t измеряется в секундах.

Теорема В. А. Котельникова. *Каждый процесс $x(t)$ с ограниченным спектром может быть представлен в виде*

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t_k)\frac{\sin 2\pi B(t-t_k)}{2\pi B(t-t_k)},\qquad (t_k=k/(2B),\ k=0,\ \mp 1,\ \pm 2,\ \ldots), \tag{18.11-11}$$

т. е. *процесс $x(t)$ для всех t однозначно определяется своими выборочными значениями $x(t_k)$ в точках t_k, разделенных промежутками* $1/(2B)$.

Функции (рис. 18.11-2)

$$u_k(t)=\sqrt{2B}\operatorname{sinc}2B(t-t_k)=\sqrt{2B}\,\frac{\sin 2\pi B(t-t_k)}{2\pi B(t-t_k)}\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots) \tag{18.11-12}$$

образуют полную ортонормированную систему в пространстве функций $x(t)$ с ограниченным спектром ширины B; отметим «выборочное свойство» функции sinc:

$$x_k = x(t_k) = 2B \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \operatorname{sinc} 2B(t - t_k)\, dt \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad (18.11\text{-}13)$$

(в точках t_k непрерывности функции $x(t)$),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(\lambda - i) \operatorname{sinc}(\lambda - k)\, d\lambda =$$

$$= 2B \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} 2B(t - t_i) \operatorname{sinc} 2B(t - t_k)\, dt = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i = k) \end{cases}$$

$$(i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (18.11\text{-}14)$$

(b) Стационарный или стационарный в широком смысле случайный процесс $x(t)$ имеет ограниченный спектр ширины B тогда и только тогда, когда его спектральная плотность по множеству наблюдений $\Phi_{xx}(\omega)$ равна нулю при $|\omega| > 2\pi B$. В этом случае *разложение* (11) *сходится в среднем* (п. 18.6-3), т. е.

$$\mathrm{M}\left[x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \operatorname{sinc} 2B(t - t_k)\right]^2 = 0 \qquad (18.11\text{-}15)$$

и формула (11) *представляет каждую реализацию* $x(t)$ *через ее выборочные значения* $x_k = x(k/(2B))$ *с вероятностью* 1.

Замечание. В частном случае стационарного процесса с «плоским» ограниченным спектром частот:

$$\Phi_{xx}(\omega) = \begin{cases} \Phi_0 & (|\omega| < 2\pi B), \\ 0 & (|\omega| > 2\pi B); \end{cases} \qquad (18.11\text{-}16)$$

$$\mathrm{R}_{xx}(\tau) = 2\Phi_0 B \frac{\sin 2\pi B\tau}{2\pi B\tau}; \qquad (18.11\text{-}17)$$

выборочные значения $x_k = x(k/(2B))$ центрированы и некоррелированы.

18.11-3. Гауссовские случайные процессы (см. также пп. 18.8-3—18.8-8 и 18.12-6). Случайный процесс называется **гауссовским,** если все его распределения вероятностей **нормальны** для всех $t_1, t_2, \ldots$ *Каждый гауссовский процесс однозначно определяется своим* (*обязательно нормальным*) *распределением вероятностей второго порядка и, следовательно, корреляционной функцией* $\mathrm{R}_{xx}(t_1, t_2) = \mathrm{M}x(t_1)\,x(t_2)$ *вместе с* $\xi(t) = \mathrm{M}x(t)$. В частности, совместное распределение каждого множества выборочных значений $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$, ... , $x_n = x(t_n)$ является нормальным распределением, плотность которого дается формулой (18.8-26) с

$$\xi_j = \mathrm{M}x(t_j), \qquad \lambda_{ik} = \mathrm{R}_{xx}(t_j, t_k) - \xi_j\xi_k \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (18.11\text{-}18)$$

$$[\Lambda_{jk}] = [\lambda_{jk}]^{-1}. \qquad (18.11\text{-}19)$$

Процессы, получаемые при сложении гауссовских процессов или при линейных действиях над ними, являются снова гауссовскими (п. 18.12-2). Коэффициенты разложения гауссовского процесса по ортонормированной системе (п. 18.9-5) являются совместно нормальными случайными величинами.

18.11-4. Марковские процессы и процесс Пуассона.

(a) Случайный процесс порядка n. **Случайный процесс имеет порядок** n, если он вполне определяется своими функциями распределения $\Phi_{(n)}$ порядка n (п. 18.9-2), но не определяется функциями распределения порядка $n-1$.

(b) Чисто случайный процесс. Случайный процесс $x(t)$ называется **чисто случайным,** если случайные величины $x(t_1)$, $x(t_2)$, ... взаимно

независимы для любого конечного множества $t_1, t_2, \ldots$ *Чисто случайный процесс вполне определяется функцией* $\Phi_{(1)}(X_1, t_1)$, $p_{(1)}(X_1\ t_1)$ *или* $\varphi_{(1)}(X_1\ t_1)$.

Примеры: последовательность независимых наблюдений, испытания по схеме Бернулли, случайный выбор в статистике (п. 19.1-2) представляют *чисто случайные последовательности*. Чисто случайный процесс *с непрерывным параметром* предполагает реализации с неограниченным спектром и, строго говоря, не может описывать действительные физические явления.

(c) Марковские процессы. Дискретный или непрерывный случайный процесс $x(t)$ называется (простым) **марковским процессом**, если для любого конечного множества $t_1 < t_2 \ldots < t_{n-1} < t_n$

$$p(X_n, t_n \mid X_1, t_1; \ldots; X_{n-1}, t_{n-1}) = p(X_n, t_n \mid X_{n-1}, t_{n-1}) \quad (18.11\text{-}20a)$$

или

$$\varphi(X_n, t_n \mid X_1, t_1; \ldots; X_{n-1}, t_{n-1}) = \varphi(X_n, t_n \mid X_{n-1}, t_{n-1}) \quad (18.11\text{-}20b)$$

соответственно. Если дано $x(t_{n-1}) = X_{n-1}$, то знание $x(t_{n-2}), x(t_{n-3}), \ldots$ не добавляет никакой новой информации о распределении $x(t_n)$.

Марковский процесс вполне определяется своим распределением вероятностей второго порядка и, следовательно, может быть задан распределениями вероятностей первого порядка и «вероятностей перехода»

$$p(X_2, t_2 \mid x, t) \quad \text{или} \quad \varphi(X_2, t_2 \mid x, t) \quad (t < t_2). \quad (18.11\text{-}21)$$

Марковские случайные последовательности часто называются **цепями Маркова**. Каждый чисто случайный процесс является марковским.

Многие физические процессы могут быть описаны как марковские. *Важный класс задач состоит в отыскании функций* (21) *по заданным их «начальным значениям» при* $t = t_1$. Из определяющего свойства (20) марковского процесса вытекают *уравнения Колмогорова — Смолуховского — Чепмена*

$$p(X_2, t_2 \mid X_1, t_1) = \sum_{x(t)} p(X_2, t_2 \mid x, t)\, p(x, t \mid X_1, t_1) \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2) \quad (18.11\text{-}22a)$$

или

$$\varphi(X_2, t_2 \mid X_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(X_2, t_2 \mid x, t)\, \varphi(x, t \mid X_1, t_1)\, dx \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2). \quad (18.11\text{-}22b)$$

Уравнение (22) есть разностное уравнение первого порядка (п. 20.4-3), которое может быть решено относительно неизвестной функции (21) независимой переменной t, если задана $p(x, t \mid X_1, t_1)$ или $\varphi(x, t \mid X_1, t_1)$. Если $p_{(1)}(X_1, t_1)$ или $\varphi_{(1)}(X_1, t_1)$ известна, то марковский процесс вполне определен при всех $t > t_1$.

(d) Пуассоновский процесс. Во многих задачах со случайным поиском, очередями, радиоактивным распадом и т. п. $x(t)$ есть дискретная случайная величина со спектральными значениями 0, 1, 2, ... (число «успехов», телефонных вызовов, распадов и т. п.). Применяемые модели часто предполагают выполнение марковского свойства (20*a*) и следующих свойств переходных вероятностей:

$$p(X_2, t_2 \mid x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } X_2 < x, \\ 1 - \alpha\Delta t + o(\Delta t) & \text{при } X_2 = x, \\ \alpha\Delta t + o(\Delta t) & \text{при } X_2 = x + 1, \\ o(\Delta t) & \text{при } X_2 > x + 1, \end{cases} \quad (18.11\text{-}23)$$

где $\Delta t = t_2 - t$; $x, X_2 = 0, 1, 2, \ldots$, а через $o(\Delta t)$ обозначены такие члены, что $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \to 0$ при $\Delta t \to 0$ (п. 4.4-3).

Чтобы найти

$$p(X,\ t \mid X_1,\ t_1) = P(K,\ T) \qquad (K = X - X_1 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ T = t - t_1)$$

подставим переходные вероятности (23) в уравнение Колмогорова (22*a*) при $t_2 = t + \Delta t$ и получим разностное уравнение

$$\frac{P(K,\ T+\Delta t) - P(K,\ T)}{\Delta t} = -\alpha P(K,\ T) + \alpha P(K-1,\ T) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad (18.11\text{-}24)$$
$$(K = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $P(-1,\ T) \equiv 0$. При $\Delta t \to 0$ уравнение (24) приводится к дифференциально-разностному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial T} P(K,\ T) = -\alpha P(K,\ T) + \alpha P(K-1,\ T) \qquad (K = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \quad (18.11\text{-}25)$$

Решая уравнение (25) последовательно для $K = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ при начальных условиях

$$P(0,\ 0) = p(X_1,\ t_1 \mid X_1,\ t_1) = 1, \quad P(K,\ 0) = p(X_1 + K,\ t_1 \mid X_1,\ t_1) = 0 \quad (K > 0) \quad (18.11\text{-}26)$$

получаем

$$P(K,\ T) = e^{-\alpha T} \frac{(\alpha T)^K}{K!} \qquad (T \geqslant 0,\ \ K = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \quad (18.11\text{-}27)$$

Таким образом, число K изменений состояния в любом интервале времени длины T имеет распределение Пуассона (табл. 18.8-4); α есть средняя плотность числа событий за единицу времени или **средняя скорость отсчетов** в процессе Пуассона.

Вероятность того, что не произойдет ни одного изменения состояния, равна

$$P(0,\ T) = e^{-\alpha T} \qquad (T \geqslant 0); \quad (18.11\text{-}28)$$

поэтому вероятность того, что состояние изменится *по крайней мере один раз*, равна

$$1 - P(0,\ T) = 1 - e^{-\alpha T} \qquad (T \geqslant 0). \quad (18.11\text{-}29)$$

Интервал времени T_1 между последовательными изменениями состояния есть случайная величина с плотностью распределения

$$\varphi_{T_1}(T_1) = \alpha e^{-\alpha T_1} \qquad (T_1 > 0) \quad (18.11\text{-}30)$$

и математическим ожиданием $1/\alpha$.

Внутри любого конечного интервала времени длины T пуассоновский процесс однозначно определен распределением множества взаимно независимых случайных величин K; $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_K$, где K есть число изменений состояния в течение времени T, а $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_K$ — моменты времени первого, второго, ..., K-го изменения состояния в течение этого интервала времени. При этом

$$\left.\begin{aligned} &p_K(K) = P(K,\ T) = e^{-\alpha T}\frac{(\alpha T)^K}{K!} \qquad (K = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\\ &\varphi_{t_k \mid K}(t_k \mid K) = \frac{1}{T} \qquad (K = 1,\ 2,\ \ldots;\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ K),\\ &\varphi_{t_1 t_2 \ldots t_K \mid K}(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_K \mid K) \frac{1}{T^K} \qquad (K = 1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \quad (18.11\text{-}31)$$

18.11-5. Некоторые случайные процессы, порождаемые процессом Пуассона. (a) Случайная телеграфная волна (рис. 18.11-1, *c*). Функция $x(t)$ принимает только значения $+a$ или $-a$, причем последовательность изменений знака представляет собой процесс Пуассона со средней скоростью

отсчетов α (п. 18.11-4, d). Такой процесс стационарен и эргодичен, если он начинается с $t=-\infty$ и для него

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{M}x(t)=0, \quad \mathrm{R}_{xx}(\tau)=a^2e^{-2\alpha|\tau|},\\ &\Phi_{xx}(\omega)=\frac{4a^2\alpha}{\omega^2+4\alpha^2}. \end{aligned}\right\} \tag{18.11-32}$$

(b) Процесс, порождаемый пуассоновской выборкой (рис. 18.11-1, *d*). Функция $x(t)$ изменяет значение с каждым изменением состояния некоторого процесса Пуассона со средней скоростью отсчетов α; между изменениями состояния функция $x(t)$ постоянна и принимает непрерывно распределенное значение x с математическим ожиданием ξ и дисперсией σ^2. Такой процесс стационарен и эргодичен, если он начинается с $t=-\infty$ и для него

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{M}x(t)=\xi, \quad \mathrm{R}_{xx}(\tau)=\xi^2+\sigma^2e^{-\alpha|\tau|},\\ &\Phi_{xx}(\omega)=2\pi\xi^2\delta(\omega)+\frac{2\sigma^2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}. \end{aligned}\right\} \tag{18.11-33}$$

(c) Дробовой эффект и формулы Кемпбелла (рис. 18.11-1, *e*). Функция $x(t)$ есть сумма большого числа кратковременных импульсов:

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k v(t-t_k), \tag{18.11-34}$$

форма которых дается функцией $v=v(t)$ с

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,e^{-i\omega t}dt=V_F(i\omega), \tag{18.11-35}$$

в то время как амплитуда импульса a_k есть случайная величина с конечной дисперсией, а последовательность случайных моментов t_k представляет процесс Пуассона со средней скоростью отсчетов α. Такой процесс стационарен и эргодичен, если он начинается с $t=-\infty$; он аппроксимируется гауссовским случайным процессом, если импульсы перекрывают друг друга достаточно часто. Для этого процесса

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{M}x(t)=\xi=\alpha\mathrm{M}a_k\cdot\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,dt,\\ &\mathrm{M}x^2(t)=\xi^2+\alpha\mathrm{M}a_k^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)\,dt,\\ &\mathrm{R}_{xx}(\tau)=\xi^2+\alpha\mathrm{M}a_k^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,v(t+\tau)\,dt,\\ &\Phi_{xx}(\omega)=2\pi\xi^2\,\delta(\omega)+\alpha\mathrm{M}a_k^2\cdot|V_F(i\omega)|^2. \end{aligned}\right\} \tag{18.11-36}$$

В частном случае, когда a_k — фиксированные постоянные, формулы (36) известны как *формулы Кемпбелла.*

18.11-6. Случайные процессы, порождаемые периодической выборкой. Состояние некоторого стационарного и эргодического случайного процесса $q(t)$ измеряется периодически и результат фиксируется в течение постоянного промежутка времени Δt. Получаемый случайный процесс $x(t)$ стационарен и эргодичен, если момент начального измерения выбирается случайно и распределен равномерно в интервале $(0, \Delta t)$. Реализация $x(t)$ подобна изображенной на рис. 18.11-1, *d*, но здесь изменения состояния отделяются интервалами, кратными Δt. Если q — случайная величина, принимающая только два

значения $+a$ и $-a$ с вероятностями $1/2$ и $1/2$, то $x(t)$ имеет вид случайной телеграфной волны, как на рис. 18.11-1, c (с той же оговоркой, что и выше).

Если различные измерения величины q независимы, то

$$\left.\begin{aligned} &R_{xx}(\tau)=(Mq)^2=(Mx)^2=\xi^2 \quad \text{при} \quad |\tau|>\Delta t;\\ &R_{xx}(\tau)=M(q^2)\cdot P(t,\ t+\tau - \text{в одном промежутке } \Delta t)+\\ &\quad +(Mq)^2\cdot P(t,\ t+\tau - \text{в разных промежутках } \Delta t)=\\ &\quad =Dx\cdot\left(1-\frac{|\tau|}{\Delta t}\right)+\xi^2 \quad \text{при} \quad |\tau|\leqslant\Delta t \end{aligned}\right\} \qquad (18.11\text{-}37)$$

и, следовательно,

$$\Phi_{xx}(\omega)=Dx\cdot\Delta t\left(\frac{\sin\omega\dfrac{\Delta t}{2}}{\omega\dfrac{\Delta t}{2}}\right)^2+2\pi\xi^2\delta(\omega). \qquad (18.11\text{-}38)$$

На рис. 18.11-3 дано сравнение $R_{xx}(\tau)$ и $\Phi_{xx}(\omega)$ для случайной телеграфной волны и процесса жеребьевки с одинаковыми средними значениями $\xi=0$, дисперсиями $Mx^2=\sigma^2$ и средней скоростью отсчетов $\alpha=\frac{1}{2}\Delta t$.

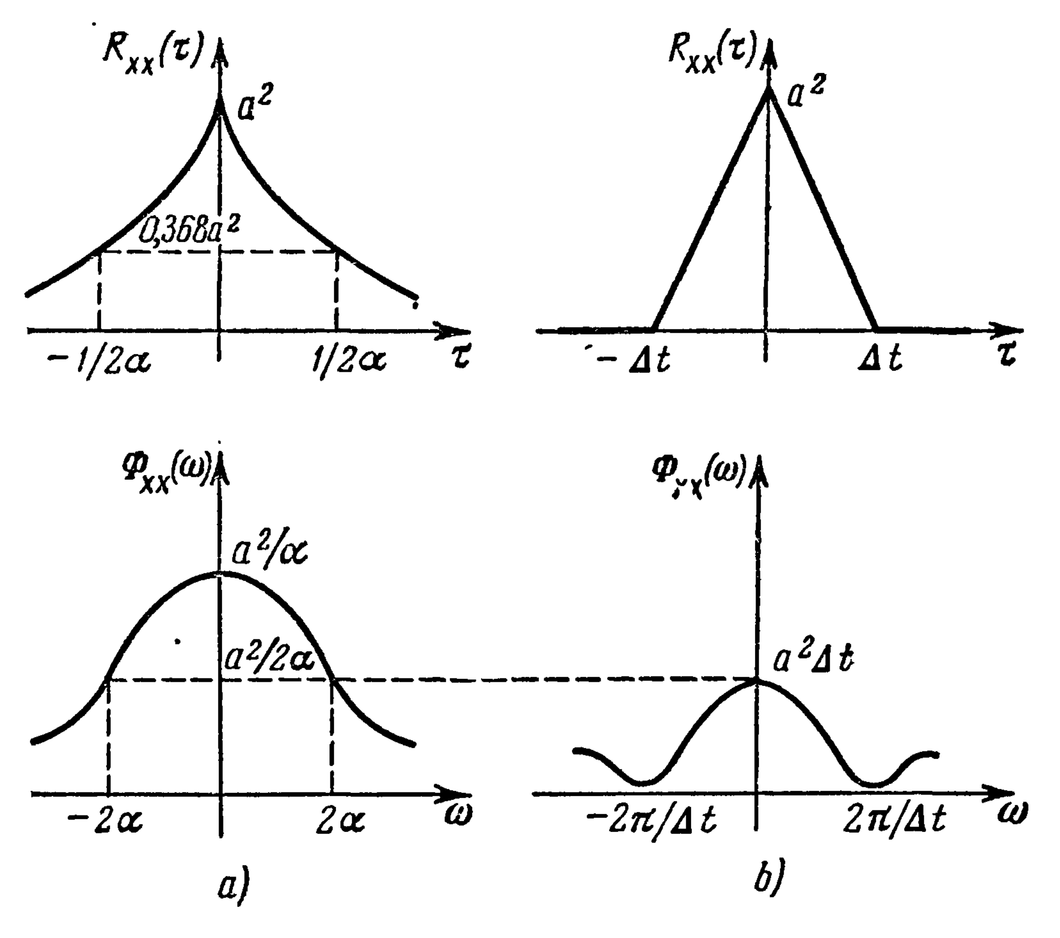


Рис. 18.11-3. Корреляционная функция и спектральная плотность для случайной телеграфной волны (a) и процесса бросания монеты (b) с одинаковыми средними значениями $\xi=0$, дисперсиями $Mx^2=\sigma^2$ и средней скоростью отсчетов $\alpha=\frac{1}{2}\Delta t$ (на шкалах ω в случаях a) и b) приняты разные единицы масштаба).

18.12. ДЕЙСТВИЯ НАД СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

18.12-1. Корреляционные функции и спектры сумм. Пусть $x(t)$, $y(t)$ — случайные процессы. Для их линейной комбинации

$$z(t)=\alpha x(t)+\beta y(t) \qquad (18.12\text{-}1)$$

с действительными или комплексными коэффициентами α, β корреляционные функции $R_{xz}(t_1,\ t_2)$, $R_{zx}(t_1,\ t_2)$, $R_{zz}(t_1,\ t_2)$ даются формулами

$$\left.\begin{aligned} &R_{xz}=\alpha R_{xx}+\beta R_{xy}, \qquad R_{zx}=\bar{\alpha}R_{xx}+\bar{\beta}R_{yx},\\ &R_{zz}=|\alpha|^2R_{xx}+|\beta|^2R_{yy}+\bar{\alpha}\beta R_{xy}+\alpha\bar{\beta}R_{yx}. \end{aligned}\right\} \qquad (18.12\text{-}2)$$

Эти формулы остаются справедливыми и для корреляционных функций $R_{xz}(\tau)$, $R_{zx}(\tau)$, $R_{zz}(\tau)$ в случае стационарных процессов; соответствующие спектральные плотности равны

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{xz}=\alpha\Phi_{xx}+\beta\Phi_{xy}; \quad \Phi_{zx}=\bar{\alpha}\Phi_{xx}+\bar{\beta}\Phi_{yx},\\ &\Phi_{zz}=|\alpha|^2\Phi_{xx}+|\beta|^2\Phi_{yy}+\bar{\alpha}\beta\Phi_{xy}+\alpha\bar{\beta}\Phi_{yx}. \end{aligned}\right\} \tag{18.12-3}$$

18.12-2. Соотношения между входным и выходным сигналами для линейных систем. Рассматривается действительная линейная система с действительными входным сигналом $x(t)$ и выходным сигналом

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} w(t, \lambda)\,x(\lambda)\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty} h(t, \zeta)\,x(t-\zeta)\,d\zeta, \tag{18.12-4}$$

где весовая функция w (функция Грина, п. 9.3-3 и п. 9.4-3) есть реакция системы на единичный импульсный входной сигнал $\delta(t-\lambda)$ и $h(t, \zeta)\equiv\equiv w(t, t-\zeta)$.

В наиболее важных приложениях t есть время и $w(t, \lambda)=0$ при $t<\lambda$, так как физически реализуемые системы не могут реагировать на будущий импульс (см. также п. 9.4-3).

Если $x(t)$ — действительный случайный процесс и если средние квадраты $\mathsf{M}x^2(t)$ и $\mathsf{M}y^2(t)$ конечны, то

$$\mathsf{M}y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} w(t, \lambda)\,\mathsf{M}x(\lambda)\,d\lambda; \tag{18.12-5}$$

$$\left.\begin{aligned} &R_{xy}(t_1, t_2)=R_{yx}(t_2, t_1)=\int_{-\infty}^{\infty} w(t_2, \lambda)\,R_{xx}(t_1, \lambda)\,d\lambda,\\ &R_{yy}(t_1, t_2)=\int_{-\infty}^{\infty} w(t_2, \mu)\,R_{yx}(t_1, \mu)\,d\mu \end{aligned}\right\} \tag{18.12-6}$$

(*обобщенные соотношения Винера — Ли*);

$$\mathsf{M}y^2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} w(t, \mu)\,R_{yx}(t, \mu)\,d\mu. \tag{18.12-7}$$

Если $x(t)$ — гауссовский процесс, то $y(t)$ — тоже гауссовский процесс и он вполне определяется соотношениями (5)—(7).

18.12-3. Стационарный случай.

(a) *Если входной сигнал $x(t)$ стационарен и если линейная система инвариантна во времени, т. е.*

$$\left.\begin{aligned} &w(t, \lambda)=h(t-\lambda), \quad h(t, \zeta)=h(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega)\,e^{i\omega\zeta}\,d\omega,\\ &\text{где}\\ &H(i\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\zeta)\,e^{-i\omega\zeta}\,d\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{18.12-8}$$

то выходной сигнал (реакция системы) $y(t)$ тоже стационарен. Если при этом $x(t)$ эргодичен (п. 18.10-7, b), то и $y(t)$ тоже эргодичен.

Соотношения (4)—(7) для действительных $x(t)$, $y(t)$ сводятся к следующим:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\lambda)\,x(\lambda)\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty} h(\zeta)\,x(t-\zeta)\,d\zeta, \tag{18.12-9}$$

$$\mathsf{M}y=\mathsf{M}x\cdot\int_{-\infty}^{\infty} h(\zeta)\,d\zeta, \tag{18.12-10}$$

$$\left.\begin{aligned} R_{xy}(\tau)=R_{yx}(-\tau)&=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau-\lambda)\,R_{xx}(\lambda)\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty} h(\zeta)\,R_{xx}(\tau-\zeta)\,d\zeta,\\ R_{yy}(\tau)&=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau-\mu)\,R_{yx}(\mu)\,d\mu=\int_{-\infty}^{\infty} h(\zeta)\,R_{yx}(\tau-\zeta)\,d\zeta \end{aligned}\right\} \tag{18.12-11}$$

(соотношения Винера—Ли),

$$\mathsf{M}y^2=\int_{-\infty}^{\infty} h(\zeta)\,R_{xy}(\zeta)\,d\zeta. \tag{18.12-12}$$

Для физически реализуемых систем $h(\zeta)=0$ при $\zeta<0$.

(b) Важные соотношения (11) значительно упрощаются, если их представить через спектральные плотности (п. 18.10-3):

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{xy}(\omega)=H(i\omega)\,\Phi_{xx}(\omega); \qquad \Phi_{yx}(\omega)=\overline{H(i\omega)}\,\Phi_{xx}(\omega),\\ &\Phi_{yy}(\omega)=\overline{H(i\omega)}\,\Phi_{xy}(\omega)=H(i\omega)\,\Phi_{yx}(\omega)=|H(i\omega)|^2\,\Phi_{xx}(\omega). \end{aligned}\right\} \tag{18.12-13}$$

(c) Отметим также следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &R_{yy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{hh}(\lambda)\,R_{xx}(\tau-\lambda)\,d\lambda,\\ &\text{где}\\ &\varphi_{hh}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\mu)\,h(\mu+\lambda)\,d\mu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(i\omega)|^2\,e^{i\omega\lambda}\,d\omega. \end{aligned}\right\} \tag{18.12-14}$$

В частном случае, когда входной сигнал есть стационарный белый шум с $R_{xx}(\tau)=\Phi_0\delta(\tau)$ (п. 18.11-1, d):

$$R_{xy}(\tau)=\Phi_0 h(\tau), \tag{18.12-15}$$

$$R_{yy}(\tau)=\Phi_0\varphi_{hh}(\tau), \tag{18.12-16}$$

$$\mathsf{M}y^2=\Phi_0\varphi_{hh}(0)=\Phi_0\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\zeta)\,d\zeta. \tag{18.12-17}$$

18.12-4. Соотношения для корреляционных функций и спектров по времени. *Соотношения* (2), (4) *и* (10)—(17) *справедливы и для соответствующих средних по времени* (п. 18.10-7—18.10-9), *если они существуют.*

18.12-5. Нелинейные операции. Если $x(t)$ — случайный процесс, то

$$y=y(x)=y[x(t)] \tag{18.12-18}$$

определяет новый случайный процесс; распределения и средние по множеству наблюдений для процесса y находятся методами пп. 18.5-2 и 18.5-4. В частности, корреляционная функция выходного сигнала $y(t)$ для действительного

процесса находится по формуле

$$R_{yy}(t_1,\ t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y(x_1)\,y(x_2)\,\varphi_{x_1x_2}(x_1,\ x_2)\,dx_1\,dx_2, \qquad (18.12\text{-}19)$$

где $x_1=x(t_1)$, $x_2=x(t_2)$.

Иногда удобнее формула

$$\left.\begin{aligned} &R_{yy}(t_1,\ t_2)=-\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{C_1}\int_{C_2} M_{x_1x_2}(s_1,\ s_2)\,Y(s_1)\,Y(s_2)\,ds_1\,ds_2,\\ &\text{где}\\ &Y(s)=\int_{-\infty}^{\infty} y(x)\,e^{-xs}\,dx \quad (\sigma_1<\operatorname{Re} s<\sigma_2), \end{aligned}\right\} \qquad (18.12\text{-}20)$$

контуры интегрирования C_1 и C_2 параллельны мнимой оси и лежат в полосе абсолютной сходимости интеграла.

18.12-6. Нелинейные операции над гауссовскими процессами.

(а) Теорема Прайса. *Если даны две совместно нормальные случайные величины x_1, x_2 с ковариацией λ_{12} и если функция $f(x_1,\ x_2)$ для некоторых действительных $a>0$, $b<2$ допускает оценку*

$$|f(x_1,\ x_2)|<ae^{\left(x_1^b+x_2^b\right)},$$

то

$$\frac{\partial^n}{\partial\lambda_{12}^n}\mathsf{M}f(x_1,\ x_2)=\mathsf{M}\,\frac{\partial^{2n}f(x_1,\ x_2)}{\partial x_1^n\,\partial x_2^n} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (18.12\text{-}21)$$

Эта теорема позволяет находить средние и, в частности, корреляционные функции по формулам вида

$$\mathsf{M}f(x_1,\ x_2)=\int_0^{\lambda_{12}}\mathsf{M}\,\frac{\partial^2 f(x_1,\ x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2}\,d\lambda_{12}+C, \qquad (18.12\text{-}22)$$

где C есть среднее значение $\mathsf{M}f(x_1,\ x_2)$ при $\lambda_{12}=0$, т. е. для некоррелированных x_1, x_2.

Эта теорема приводит также к полезным рекуррентным соотношениям:

$$\mathsf{M}x_1^m x_2^n=mn\int_0^{\lambda_{12}}\mathsf{M}x_1^{m-1}x_2^{n-1}\,d\lambda_{12}+\mathsf{M}x_1^m\cdot\mathsf{M}x_2^n \qquad (n,\ m=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (18.12\text{-}23)$$

В частности,

$$\mathsf{M}x_1^2x_2^2=2\lambda_{12}^2+4\lambda_{12}\mathsf{M}x_1\,\mathsf{M}x_2+\mathsf{M}x_1^2\cdot\mathsf{M}x_2^2. \qquad (18.12\text{-}24)$$

(b) Разложение в ряд. Если стационарный гауссовский процесс $x(t)$ имеет $\mathsf{M}x=0$, $R_{xx}(\tau)=\sigma^2\rho_{xx}(\tau)$ и если для функции $y(x)$ существует $R_{yy}(\tau)$, то

$$\left.\begin{aligned} &\mathsf{M}y=a_0;\quad R_{xy}(\tau)=\frac{a_1}{\sigma}R_{xx}(\tau),\quad R_{yy}(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^2\rho_{xx}^k(\tau),\\ &\text{где}\\ &a_k=\frac{1}{\sqrt{2^k\pi k!}}\int_{-\infty}^{\infty}y\left(\sigma v\sqrt{2}\right)e^{-v^2}H_k(v)\,dv \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \end{aligned}\right\} \qquad (18.12\text{-}25)$$

$H_k(v)$ — многочлены Эрмита (табл. 21.7-1).

ГЛАВА 19

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

19.1. ВВЕДЕНИЕ В СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

19.1-1. Статистики. Математическая статистика занимается как статистическим описанием результатов опытов или наблюдений, так и построением и проверкой подходящих математических моделей, содержащих понятие вероятности. Ее методы расширяют возможности научного предсказания и рационального принятия решения во многих задачах, где существенные параметры не могут быть известны или контролируемы с достаточной точностью.

Статистическое описание и вероятностные модели применяются к физическим процессам, обладающим тем свойством, что *хотя результат отдельного измерения физической величины x не может быть предсказан с достаточной точностью, значение некоторой подходящей функции $y=y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от множества результатов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ повторных измерений может быть предсказано с существенно лучшей точностью*. Такая функция называется **статистикой**, а указанное свойство физического процесса — его *статистической устойчивостью*. Статистическая устойчивость в каждой конкретной ситуации есть эмпирический физический закон, который может быть проверен только опытом.

Часто точность предсказания некоторой статистики возрастает с возрастанием **объема n выборки** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (*физический закон больших чисел*). Наиболее известные статистики — *относительная частота* (п. 19.2-1) и *выборочные средние* (п. 19.2-3).

19.1-2. Классическая вероятностная модель: статистики случайной выборки. Понятие о генеральной совокупности.

(а) В классической модели наблюдаемая физическая величина x рассматривается как одномерная случайная величина с подлежащей определению или оценке плотностью $\varphi(x)$. Каждая выборка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значений x рассматривается как результат *n независимых повторных измерений* (п. 18.2-4). При этом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ представляют собой *взаимно независимые случайные величины с одинаковой плотностью вероятности* $\varphi(x)$. Такая выборка называется **случайной выборкой объема n** и представляет собой n-мерную случайную величину $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Плотность ее распределения называется **функцией правдоподобия:**

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n). \tag{19.1-1}$$

Каждая статистика, определяемая как некоторая функция

$$y=y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

выборочных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, представляет собой случайную величину, распределение которой (**выборочное распределение статистики y**) однозначно определяется функцией правдоподобия, а следовательно, и распределением величины x. Каждое выборочное распределение зависит, как правило, от объема выборки n.

Кроме рассматриваемой модели, могут встречаться и другие: распределение x может быть дискретным (игры, контроль качества), выборка может иметь бесконечный объем, значения x_k могут быть не одинаково распределены и не быть взаимно независимыми, случайная величина x может быть многомерной.

(b) Когда возрастает объем выборки (n), многие выборочные статистики сходятся по вероятности (п. 18.6-1) к соответствующим параметрам теоретического распределения величины x; в частности, относительные частоты сходятся по вероятности (и даже в среднем; п. 18.6-3) к соответствующим вероятностям (п. 19.2-1). Поэтому каждую выборку рассматривают как выборку из теоретически бесконечной **генеральной совокупности**, распределение признака в которой совпадает с теоретическим распределением вероятностей величины x. Последнее называется **распределением генеральной совокупности**, а его параметры — **параметрами генеральной совокупности**. Во многих приложениях теоретическая генеральная совокупность есть идеализация действительной совокупности, из которой получена выборка. О выборочном методе для **конечной совокупности** см. п. 19.5-5.

19.1-3. Связь вероятностной модели с опытом: оценка и проверка.

(a) Оценка параметров. Статистические методы позволяют учесть данные опыта (выборочные значения) для уточнения деталей *вероятностной модели*, например, для оценки плотности вероятностей $\varphi(x)$ случайной величины x. Знание же вероятностной модели позволяет прогнозировать будущие события, что важно для принятия решений. В большинстве приложений относительные частоты (п. 19.2-1) применяются непосредственно только для грубой *качественной* оценки распределения генеральной совокупности. Обычно задаются определенным типом закона распределения генеральной совокупности

$$\varphi=\varphi(x;\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots) \tag{19.1-2}$$

и по данным случайной выборки ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) оценивают лишь неизвестные *параметры* $\eta_1, \eta_2, \ldots$ В пп. 19.3-1—19.3-5 приведено некоторое количество типовых законов распределения для подбора их в соответствии с физическими предпосылками.

Параметры $\eta_1, \eta_2, \ldots$ обычно характеризуют определенное свойство теоретического распределения величины x (например, генеральное среднее, дисперсию, асимметрию, см. табл. 18.3-1). Для оценки значений этих параметров по данным выборки ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) пользуются значениями таких статистик $y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ..., которые характеризуют аналогичные свойства выборки (например, выборочное среднее, выборочную дисперсию, пп. 19.2-3—19.2-6). Выбор «подходящих» статистик не обязательно однозначен; предпочитают оценки $y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые сходятся по вероятности к η при $n \to \infty$ **(состоятельные оценки)**, у которых математическое ожидание равно η **(несмещенные оценки)** или у которых выборочное распределение имеет наименьшую дисперсию **(эффективные оценки)** и/или которые легче вычислить (пп. 19.4-1—19.4-5).

(b) Проверка статистических гипотез. Для проверки статистических гипотез, устанавливающих некоторые свойства теоретического распределения (например, значения параметров $\eta_1, \eta_2, \ldots$), оценивается правдоподобие (1) испытываемой выборки ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) при условии, что для вычисления функции $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ применяется предполагаемая плотность распределения (2). Гипотеза отбрасывается, если испытываемая выборка ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) попадает в область малого правдоподобия, т. е. если найденное из опыта значение статистики $y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ маловероятно при выбранной гипотетической функции правдоподобия. Выбор вероятности, которую следует считать малой **(уровня значимости критерия)**, зависит от условий задачи.

Непараметрические критерии проверяют свойства гипотетического распределения, которые не сводятся к значениям параметров (например, идентичность двух распределений, независимость двух случайных величин, пп. 19.6 8 и 19.7-6); эти критерии удобны тем, что не требуют знания типа распределения (2) генеральной совокупности.

П р и м е ч а н и е. Некорректное применение статистических методов может привести к неверным заключениям. Все (возможно, и не высказанные явно) предположения, относящиеся к теоретическому распределению, должны быть проверены. *Никогда не следует применять одну и ту же выборку для оценки и для проверки.* Заметим, наконец, что статистические критерии не могут доказать ни одной гипотезы: они могут лишь указать на «отсутствие опровержения».

19.2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИСТИК СЛУЧАЙНОЙ ВЫБОРКИ

19.2-1. Относительные частоты.

(а) О п р е д е л е н и е. Пусть событие E состоит в том, что значение случайной величины x принадлежит некоторому множеству S_E (обычно некоторому классовому интервалу, п. 19.2-2, b), и пусть дана случайная выборка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значений величины x. **Частотой события** E в данной случайной выборке называется количество n_E выборочных значений x_k, попадающих в S_E, а **относительной частотой** — отношение n_E к объему выборки n:

$$h\{E\}=\frac{n_E}{n}. \qquad (19.2\text{-}1)$$

(b) Ц е н т р р а с п р е д е л е н и я и д и с п е р с и я. Так как случайная выборка может рассматриваться как результат последовательности n испытаний по схеме Бернулли (п. 18.7-3), то случайная величина n_E имеет биномиальное распределение (табл. 18.8-3), где $\vartheta=\mathsf{P}\{E\}=\int\limits_{S_E} d\Phi(x)$ есть *вероятность* события E и

$$\mathsf{M}\,h\{E\}=\mathsf{P}\{E\}, \qquad \mathsf{D}\,h\{E\}=\frac{\mathsf{P}\{E\}(1-\mathsf{P}\{E\})}{n}. \qquad (19.2\text{-}2)$$

Относительная частота $h\{E\}$ *есть несмещенная состоятельная оценка для соответствующей вероятности* $\mathsf{P}\{E\}$; *при* $n\to\infty$ *эта оценка* $h\{E\}$ *асимптотически нормальна с параметрами* (2) (пп. 18.6-4 и 18.6-5, а).

19.2-2. Распределение выборки. Группированные данные.

(а) Э м п и р и ч е с к а я ф у н к ц и я р а с п р е д е л е н и я. Для данной случайной выборки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **эмпирическая функция распределения**

$$F(X)=h\{x<X\} \qquad (19.2\text{-}3)$$

есть неубывающая ступенчатая функция с $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$. *Она является несмещенной состоятельной оценкой для функции распределения* $\Phi(X)=\mathsf{P}\{x<X\}$ (п. 18.2-9) и определяет **частотное распределение выборки (эмпирическое распределение).**

(b) К л а с с о в ы е и н т е р в а л ы и г р у п п и р о в а н н ы е д а н н ы е. Пусть размах случайной величины x разделен на конечное (или бесконечное) число подходящим образом выбранных классовых интервалов $X_j-\frac{1}{2}\Delta X_j\leqslant x<X_j+\frac{1}{2}\Delta X_j$ $(j=1, 2, \ldots)$, длины которых соответственно равны ΔX_1, $\Delta X_2, \ldots$ (середины интервалов суть $X_1<X_2<\ldots$). Для данной случайной выборки **групповая частота** n_j есть число тех x_k, которые попадают в j-й классовой интервал (описание выборки через **группированные данные**).

Относительные частоты $h_j=n_j/n$ **попадания в** j**-й классовой интервал** должны в сумме давать единицу; они являются несмещенными состоятельными оценками для соответствующих вероятностей

$$p_j=\int\limits_{X_j-\frac{1}{2}\Delta X_j}^{X_j+\frac{1}{2}\Delta X_j} d\Phi(x).$$

Накопленные частоты N_j **и накопленные относительные частоты** F_j определяются формулами

$$N_j = \sum_{i=1}^{j} n_i, \qquad F_j = \sum_{i=1}^{j} h_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{j} n_i = \frac{N_j}{n} = F\left(X_j + \frac{1}{2}\Delta X_i\right). \quad (19.2\text{-}4)$$

Для выборок достаточно большого объема при достаточно малых классовых интервалах все выборочные статистики могут быть вычислены по относительным частотам $h_j = n_j/n$, точно так же как соответствующие параметры генеральной совокупности вычисляются по вероятностям. Применение группированных данных дает экономию в расчетах, если объем выборки n больше, чем 25. Кроме того, статистики $F(X)$, n_j, h_j, N_j и F_j дают различные графические представления выборочного распределения и, следовательно, оцениваемого распределения генеральной совокупности (гистограмма, полигон распределения и т. д).

(c) **Выборочные квантили** X_P определяются формулой (см. также табл. 18.3-1 и п. 19.5-2),

$$h\{x < X_P\} = F\{X_P\} = P \qquad (0 < P < 1). \quad (19.2\text{-}5)$$

Эта формула определяет X_P неоднозначно, она лишь указывает границы выборочных значений x_k; $X_{1/2}$ называется **выборочной медианой**, $X_{1/4}$, $X_{1/2}$ и $X_{3/4}$ — **выборочными квартилями**; аналогично определяются выборочные децили и процентили.

19.2-3. Выборочные средние (см. также пп. 18.3-3, 19.2-5 и 19.5-3).

(a) Выборочное среднее значение величины x. Пусть дана случайная выборка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; **выборочным средним значением** величины x называется

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k. \quad (19.2\text{-}6)$$

Для выборочного распределения, заданного классовыми интервалами с центрами $x = X_1, X_2, \ldots, X_m$ (п. 19.2-2), выборочное среднее $\bar{x}$ аппроксимируется значением

$$\bar{x}_G = \frac{1}{n}(n_1X_1 + n_2X_2 + \ldots + n_mX_m) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} n_jX_j \quad (19.2\text{-}7)$$

(*выборочное среднее при группированных данных*).

$\bar{x}$ есть *характеристика положения* для выборочного распределения. Отметим моменты распределения величины $\bar{x}$:

$$\mathbf{M}\bar{x} = \xi, \qquad \mathbf{D}\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n}, \quad (19.2\text{-}8)$$

$$\mathbf{M}(\bar{x} - \xi)^3 = \frac{\mu_3}{n^2}, \qquad \mathbf{M}(\bar{x} - \xi)^4 = \frac{3(n-1)\sigma^4 + \mu_4}{n^3}, \quad (19.2\text{-}9)$$

если величины справа существуют (μ_3 и μ_4 — центральные моменты теоретического распределения величины x). *Выборочное среднее $\bar{x}$ есть несмещенная состоятельная оценка для генерального среднего $\xi = \mathbf{M}x$. Если σ^2 существует, то $\bar{x}$ имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами* (8) *при* $n \to \infty$ (пп. 18.6-4 и 19.5-2).

(b) Выборочное среднее для $y(x)$. **Выборочное среднее для функции** $y(x)$ случайной величины x есть

$$\bar{y} = \frac{1}{n}[y(x_1) + y(x_2) + \ldots + y(x_n)] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y(x_k) \quad (19.2\text{-}10)$$

или, при группированных данных,

$$\bar{y}_G = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} n_j y(X_j). \quad (19.2\text{-}11)$$

Оценки, основанные на формуле (11), иногда можно улучшить введением поправочного члена (п. 19.2-5).

19.2-4. Выборочные дисперсии и моменты (см. также пп. 18.3-3, 18.3-7, 19.2-5, 19.4-2 и 19.5-2).

(а) Выборочные дисперсии

$$\left.\begin{aligned} s^2 &= \overline{(x-\bar{x})^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2, \\ S^2 &= \frac{n}{n-1}s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2 \end{aligned}\right\} \qquad (19.2\text{-}12)$$

являются *характеристиками рассеяния* выборочного распределения; s называется **выборочным стандартным отклонением.** Отметим формулы

$$\mathsf{M}s^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2; \qquad \mathsf{M}S^2 = \sigma^2, \qquad (19.2\text{-}13)$$

$$\mathsf{D}S^2 = \frac{1}{n}\left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right), \qquad (19.2\text{-}14)$$

если величины справа существуют. S^2 *есть несмещенная состоятельная оценка для генеральной дисперсии* $\sigma^2 = \mathsf{D}x$, и потому она чаще применяется, чем s^2.

(b) Моменты выборки. **Выборочные начальные моменты** a_r **и выборочные центральные моменты** m_r порядка r определяются формулами

$$a_r = \overline{x^r} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^r; \qquad m_r = \overline{(x-\bar{x})^r} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^r. \qquad (19.2\text{-}15)$$

Заметим, что

$$\mathsf{M}a_r = \alpha_r, \qquad \mathsf{D}a_r = \frac{\alpha_{2r} - \alpha_r^2}{n}, \qquad (19.2\text{-}16)$$

$$\mathsf{M}m_r = \mu_r + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\mathsf{D}m_r = \frac{1}{n}\left(\mu_{2r} - 2r\mu_{r-1}\mu_{r+1} - \mu_r^2 + r^2\mu_2\mu_{r-1}^2\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad (19.2\text{-}17)$$

если величины справа существуют, a_r *есть несмещенная состоятельная оценка для соответствующего теоретического начального момента* $\alpha_r = \mathsf{M}x^r$ *генеральной совокупности. Если существует* α_{2r}, *то* a_r *имеет при* $n \to \infty$ *асимптотически нормальное распределение с параметрами* (16). m_r есть состоятельная, но смещенная оценка для теоретического центрального момента $\mu_r = \mathsf{M}(x-\xi)^r$.

Несмещенными и состоятельными оценками для μ_3 и μ_4 будут соответственно

$$\frac{n^2}{(n-1)(n-2)}m_3 \quad \text{и} \quad \frac{n(n^2-2n+3)m_4 - 3n(2n-3)m_2^2}{(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

(c) Характеристики асимметрии и эксцесса (см. также табл. 18.3-1 и п. 19.3-5). Статистики

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}, \qquad g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 \qquad (19.2\text{-}18)$$

характеризуют соответственно асимметрию и эксцесс выборки и являются состоятельными оценками асимметрии и эксцесса генеральной совокупности (см. также п. 19.4-2). Грубо говоря, $g_1 > 0$ указывает на длинный «хвост» в правой части распределения. Некоторые авторы вводят g_1^2 и $g_2 + 3$ вместо g_1 и g_2.

19.2-5. Упрощенное вычисление выборочных средних и дисперсий. Поправка на группировку.

(a) При вычислении удобно выбрать начало отсчета X_0 вблизи центра выборочного распределения и считать по формуле

$$\bar{x} = X_0 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - X_0) \qquad (19.2\text{-}19)$$

или, при группированных данных,

$$\bar{x}_G = X_0 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} n_j (X_j - X_0). \qquad (19.2\text{-}20)$$

(b) Выборочные дисперсии s^2 и S^2 могут быть подсчитаны по формуле

$$s^2 = \frac{n-1}{n} S^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \bar{x}^2 \qquad (19.2\text{-}21)$$

или, при группированных данных,

$$s_G^2 = \frac{n-1}{n} S_G^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} n_j X_j^2 - \bar{x}_G^2. \qquad (19.2\text{-}22)$$

(c) Вычисления при группированных данных особенно упрощаются, если все классовые интервалы имеют одинаковую длину ΔX и если за начало отсчета принята середина одного из классовых интервалов, так что

$$X_j = X_0 + Y_j \Delta X, \qquad (19.2\text{-}23)$$

где Y_j принимает только целые значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Тогда

$$\bar{x}_G = X_0 + \bar{y}_G \Delta X, \quad \bar{y}_G = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} n_j Y_j, \qquad (19.2\text{-}24)$$

$$s_G^2 = \frac{n-1}{n} S_G^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} n_j Y_j^2 - \bar{y}_G^2 \right) (\Delta X)^2. \qquad (19.2\text{-}25)$$

Проверять вычисления можно, выбирая другое начало отсчета, например, $X_0 + \Delta X$.

(d) Поправка Шеппарда на группировку. Пусть все классовые интервалы имеют одинаковую длину ΔX Если для теоретического распределения величины x оба «хвоста» имеют высокий порядок соприкосновения с осью x, то приближение s_G^2 к истинной выборочной дисперсии s^2 можно улучшить путем прибавления *поправки Шеппарда* $-\frac{(\Delta X)^2}{12}$. Для выборочных моментов по группированным данным

$$a_{rG} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} n_j X_j^r, \qquad m_{rG} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} n_j \left(X_j - \bar{x}_G\right)^r \qquad (19.2\text{-}26)$$

можно ввести аналогичные поправки с помощью оценок

$$\left.\begin{aligned} & a_1' = a_{1G}, & & \\ & a_2' = a_{2G} - \frac{1}{12} (\Delta X)^2, & & m_2' = m_{2G} - \frac{1}{12} (\Delta X)^2, \\ & a_3' = a_{3G} - \frac{1}{4} a_{1G} (\Delta X)^2, & & m_3' = m_{3G}, \\ & a_4' = a_{4G} - \frac{1}{2} a_{2G} (\Delta X)^2 + \frac{7}{240} (\Delta X)^4, & & m_4' = m_{4G} - \frac{1}{2} m_{2G} (\Delta X)^2 + \frac{7}{240} (\Delta X)^4. \end{aligned}\right\} \qquad (19.2\text{-}27)$$

Вообще

$$a_r' = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \left(2^{1-k} - 1\right) B_k a_{(r-k)G} (\Delta X)^k \qquad (r = 1, 2, \ldots), \qquad (19.2\text{-}28)$$

где B_k — числа Бернулли (п. 21.5-2).

Приведенные оценки совпадают с оценками по негруппированным данным в том случае, когда $\chi_x(q)=0$ при $|q|\geqslant\frac{2\pi}{\Delta X}-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$. Для нормально распределенной величины x при $\Delta X\leqslant 2\sigma$

$$a_1\approx a_1' \text{ с точностью до } 2{,}3\cdot 10^{-3}\,\Delta X \text{ при } \xi\neq 0,$$

$$a_1\approx a_1'-\frac{(\Delta X)^2}{12} \text{ с точностью до } 3{,}1\cdot 10^{-2}\sigma^2 \text{ при } \xi=0.$$

Примечание. Поправка Шеппарда часто применима в качестве оценки ошибки, возникающей при *округлении выборочных значений* в точных формулах (12) и (15). Например, средняя ошибка округления $\Delta X/2$ в значениях x_k воздействует обычно на s^2 только как $(\Delta X)^2/12$.

19.2-6. Размах выборки (см. также п. 19.5-4). **Размах** w **случайной выборки** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть разность между наибольшим и наименьшим значениями x_k. Размах выборки имеет физический смысл (контроль качества) и служит для грубой, но удобно вычисляемой оценки характеристик генеральной совокупности. Размах выборки, наименьшее и наибольшее выборочные значения дают примеры **порядковых статистик.**

19.3. ТИПОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

19.3-1. Вводные замечания. В качестве теоретического распределения (генеральной совокупности) в статистических моделях могут служить распределения вероятностей, описанные в пп. 18.8-1 — 18.8-9, в частности, нормальное, биномиальное, гипергеометрическое и пуассоновское распределения. Применимость тех или иных частных типов распределения (с подходящими параметрами) может быть установлена как теоретически, так и по графику эмпирического распределения.

Особенно удобно *нормальное распределение*. Каждое нормальное распределение вполне определяется своим первым и вторым моментами. В случае нормального распределения генеральной совокупности точно рассчитаны статистические критерии выборочного распределения (пп. 19.6-4 и 19.6-6). Применимость нормального распределения часто обосновывается *центральной предельной теоремой* (п. 18.6-5); в частности, *ошибки измерения* часто рассматриваются как нормально распределенные суммы большого количества независимых «элементарных» ошибок.

19.3-2. * Класс распределений Кэптейна. Часто оказывается желательным сопоставить с опытными данными такое распределение случайной величины x в интервале (a, b), чтобы некоторая функция $g(x)$ имела нормальное распределение, т. е. чтобы

$$\Phi_x(x)=\Phi_u\left[\frac{g(x)-\mu}{\sigma_g}\right],\quad \varphi_x(x)=\frac{1}{\sigma_g\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{g(x)-\mu}{\sigma_g}\right]^2\right\}\left|\frac{dg}{dx}\right|. \quad (19.3\text{-}1)$$

Функция $g(x)$ должна быть монотонной при $a<x<b$ и изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. После того как функция $g(x)$ выбрана (например, из теоретических соображений), остается оценить только два параметра $\mu=\mathsf{M}g(x)$ и σ_g, что для нормального распределения сделать нетрудно.

Случайная величина x, описываемая распределением (1), может рассматриваться как предел последовательности случайных величин

$$x_{r+1}=x_r+z_{r+1}h(x_r)\qquad (r=0, 1, 2, \ldots),$$

каждая из которых есть результат действия малых независимых импульсов $z_1, z_2, \ldots, z_n$, удовлетворяющих условиям п. 18.6-5, с, причем

$$z_1+z_2+\ldots+z_r=\sum^{r-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{h(x_i)}\approx\int^{x}\frac{dx}{h(x)}=g(x).$$

В частности, если $h(x) = \text{const} = C$, то $g(x) = (x - x_0)/C$ и распределение (1) нормальное. Если $h(x) = x$, т. е. эффект действия импульса пропорционален уже достигнутому значению случайной величины, и $x_0 = 1$, то $g(x) = \ln x$, и мы имеем **логарифмически нормальное распределение**

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqslant 0), \\ \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] & (x > 0) \end{cases} \qquad (19.3\text{-}2)$$

19.3-3. Ряды Грама—Шарлье и Эджворта. Плотность *стандартизованной* случайной величины $x = \dfrac{z - Mz}{\sigma(z)}$ (п. 18.5-5) часто удобно аппроксимировать с помощью формулы

$$\varphi_x(x) \approx \varphi_u(x) - \frac{1}{3!}\frac{\mu_3}{\sigma^3}\varphi_u'''(x) + \left[\frac{1}{4!}\left(\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3\right)\varphi_u^{(4)}(x) + \frac{10}{6!}\left(\frac{\mu_3}{\sigma^3}\right)^2 \varphi_u^{(6)}(x)\right], \qquad (19.3\text{-}3a)$$

где $\sigma^2 = \mu_2$, μ_3, μ_4 — параметры теоретического распределения величины z (п. 18.3-7, b). Вводя коэффициенты асимметрии и эксцесса (табл. 18.3-1, d), формуле (3a) можно придать вид

$$\varphi_x(x) \approx \varphi_u(x) - \frac{\gamma_1}{3!}\varphi_u'''(x) + \left[\frac{\gamma_2}{4!}\varphi_u^{(4)}(x) + \frac{10\gamma_1^2}{6!}\varphi_u^{(6)}(x)\right]. \qquad (19.3\text{-}3b)$$

Формула (3) дает поправочные члены при замене плотности распределения $\varphi_x(x)$ плотностью нормального распределения $\varphi_u(x)$. В частности, формула (3) может применяться для приближенного построения плотности распределения суммы n независимых случайных величин; в этом случае коэффициент при φ_u''' имеет порядок $O(n^{-1/2})$, а коэффициенты при слагаемых, объединенных квадратной скобкой, — $O(n^{-1})$.

Аналогичное выражение для функции распределения $\Phi_x(x)$ получается из (3) заменой $\varphi_u^{(k)}(x)$ на $\Phi_u^{(k)}(x)$. Заметим, что для входящих в формулу (3) производных от плотности нормального распределения $\varphi_u(x)$ имеются широко распространенные таблицы и что параметры (коэффициенты) могут быть легко оценены как функции моментов (п. 19.4-3); все же расчет выборочных распределений здесь не прост.

Для весьма ограниченного класса распределений формула (3) содержит первые члены разложения в ряд Грама — Шарлье по ортогональным функциям (п. 15.2-6):

$$\Phi_x(x) = \Phi_u(x) + \frac{\eta_3}{3!}\Phi_u'''(x) + \frac{\eta_4}{4!}\Phi_u^{(4)}(x) + \ldots, \qquad (19.3\text{-}4a)$$

$$\varphi_x(x) = \varphi_u(x) + \frac{\eta_3}{3!}\varphi_u'''(x) + \frac{\eta_4}{4!}\varphi_u^{(4)}(x) + \ldots, \qquad (19.3\text{-}4b)$$

где

$$\eta_k = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \int_{-\infty}^{\infty} H_k\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\varphi_x(x)\,dx, \qquad (19.3\text{-}4c)$$

$H_k(x)$ — многочлен Эрмита степени k (п. 21.7-1). В частности, $\eta_3 = -\gamma_1$, $\eta_4 = \gamma_2$.

Ряд (4a) сходится к $\Phi_x(x)$, если существуют все моменты $\mu_1, \mu_2, \ldots$ и если $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{4}x^2}\,d\Phi_x(x)$ сходится; ряд (4b) будет при этом сходиться к $\varphi_x(x)$ во всех точках непрерывности, если $\varphi_x(x)$ есть функция ограниченной вариации (п. 4.4-8, b) в $(-\infty, \infty)$. Для очень большого класса распределений аппроксимация (3) может быть обоснована *асимптотическими рядами Эджворта* [18.6].

19.3-4. Усеченные нормальные распределения и распределение Парето.

(a) Усеченные нормальные распределения. Если из нормальной совокупности со средним μ и дисперсией σ^2 (п. 19.1-2) исключить все события $\{x < x_0\}$,

то оставшаяся совокупность будет иметь одностороннее усеченное нормальное распределение, для которого $\varphi(x) = \Phi(x) = 0$ при $x < x_0$ и

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma(1-\tau)} \varphi_u\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \qquad \Phi(x) = \frac{\Phi_u\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \tau}{1-\tau} \quad (x \geqslant x_0), \tag{19.3-5}$$

где $\tau = \Phi_u\left(\frac{x_0-\mu}{\sigma}\right)$ — *степень усечения*, равная вероятности $P\{x < x_0\}$ в исходном распределении.

Первые два начальных момента усеченного распределения равны

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \mu + \sigma^2\varphi(x_0), \\ \alpha_2 &= \mu^2 + \sigma^2(\mu + x_0)\varphi(x_0) + \sigma^2. \end{aligned}\right\} \tag{19.3-6}$$

Если заданы x_0 и моменты α_1, α_2 (последние оцениваются выборочными моментами a_1, a_2; п. 19.2-4, b), то μ и σ могут быть найдены с помощью таблиц Пирсона, дающих численное решение уравнений (6) [18.5].

(b) **Распределение Парето** определяется формулами $\varphi(x) = \Phi(x) = 0$ при $x < x_0$ и

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1}, \qquad \Phi(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} \qquad (x \geqslant x_0;\ \alpha > 0), \tag{19.3-7}$$

$$\xi = Mx = \frac{\alpha}{\alpha-1} x_0 \quad (\alpha > 1), \qquad x_{1/2} = 2^{1/\alpha}x_0. \tag{19.3-8}$$

19.3-5. Типы распределений Пирсона. Плотность многих непрерывных распределений вероятностей может быть определена как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{x + \eta_1}{\eta_2 + \eta_3 x + \eta_4 x^2} \varphi(x), \tag{19.3-9}$$

содержащего четыре параметра. Каждый параметр η_k может быть выражен через первые четыре момента α_r или μ_r (п. 19.4-3), но расчет выборочных распределений, даже в наиболее простых случаях, труден. Распределения, определяемые уравнением (9), могут быть классифицированы в зависимости от характера корней уравнения $\eta_2 + \eta_3 x + \eta_4 x^2 = 0$. Эти распределения охватывают многие распределения, приведенные в табл. 18.8-11, пп. 18.8-3 и 9.5-3, как частные случаи.

Для распределений Пирсона вводится пирсоновская мера асимметрии (табл. 18.3-1):

$$\frac{\xi - \xi_m}{\sigma} = \frac{\gamma_1(\gamma_2 + 6)}{2(5\gamma_2 - 6\gamma_1^2 + 6)}; \tag{19.3-10}$$

при малых γ_1, γ_2 отсюда следует, что $\xi_m \approx \xi - \frac{1}{2}\sigma\gamma_1$.

19.4. ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ

19.4-1. Свойства оценок (см. также п. 19.1-3).

(a) Статистика $y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **состоятельной оценкой** для параметра η теоретической совокупности, если y сходится к η по вероятности при увеличении объема выборки n, т. е. если вероятность любого конечного отклонения $|y - \eta|$ стремится к нулю при $n \to \infty$ (п. 18.6-1).

(b) **Смещением** некоторой оценки y параметра η называется разность $My - \eta$. Оценка y называется **несмещенной оценкой** параметра η, если $My = \eta$.

(c) А с и м п т о т и ч е с к и э ф ф е к т и в н ы е о ц е н к и и э ф ф е к т и в н ы е о ц е н к и. Желательно применять такие оценки, выборочные распределения которых возможно меньше рассеиваются около искомого значения параметра, т. е. оценки с возможно меньшей стандартной ошибкой $\sqrt{Dy} = \sigma(y)$. Для важного класса оценок $y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выборочные распределения которых *асимптотически нормальны* со средней η и дисперсией λ/n (см. также п. 19.5-2), постоянная λ определяется формулой

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} n\,Dy \geqslant \lambda_{\min} = \frac{1}{M\left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial \eta}\right)^2}. \tag{19.4-1}$$

Асимптотическая эффективность $e_\infty\{y\}=\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}$ такой оценки измеряет рассеяние асимптотического распределения около параметра η; y называется **асимптотически эффективной оценкой** параметра η, если $\lambda=\lambda_{\min}$. *Каждая асимптотически эффективная оценка является состоятельной.*

Более общо, «относительная эффективность» оценки $y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ параметра η по данной выборке объема n измеряется обратной величиной среднего квадрата отклонения $\mathsf{M}(y-\eta)^2$. При достаточно общих условиях средний квадрат отклонения $\mathsf{M}(y-\eta)^2$ различных возможных оценок y данного параметра η имеет конечную нижнюю грань, определяемую формулой

$$\mathsf{M}(y-\eta)^2 \geqslant \frac{\lambda_{\min}}{n} = \frac{\left(1+\frac{db}{d\eta}\right)^2}{n\,\mathsf{M}\left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial \eta}\right)^2}, \tag{19.4-2}$$

где $b(\eta)=\mathsf{M}y-\eta$ (см. [18.6]).

Для несмещенных оценок y выражение (2) сводится к

$$\mathsf{D}y \geqslant \frac{\lambda_{\min}}{n} = \frac{1}{n\,\mathsf{M}\left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial \eta}\right)^2}. \tag{19.4-3}$$

Эффективность $e(y)=\frac{\lambda_{\min}}{n\mathsf{D}y}$ несмещенной оценки, удовлетворяющей соотношению (3), измеряет рассеяние выборочного распределения около $\eta=\mathsf{M}y$. В этом случае предел $\lim\limits_{n\to\infty} e\{y\}$, если он существует, называется асимптотической эффективностью. Некоторая (обязательно несмещенная и состоятельная) оценка y называется **эффективной оценкой** параметра η, если $\mathsf{D}y$ существует и равна нижней грани $\frac{\lambda_{\min}}{n}$.

(d) Достаточные оценки. Оценка $y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ параметра η называется **достаточной оценкой**, если функцию правдоподобия для выборки (п. 19.1-2) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} L(X_1, X_2, \ldots, X_n; \eta) &\equiv L_1(Y, \eta)\,L_2(X_1, X_2, \ldots, X_n), \\ Y &\equiv y(X_1, X_2, \ldots, X_n), \end{aligned}\right\} \tag{19.4-4}$$

где L_2 не зависит от η. В этом случае условное распределение вероятностей величины $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условии $\{y=Y\}$ не зависит от η, так что *достаточная оценка y параметра η подытоживает всю информацию относительно η, содержащуюся в выборке. Эффективная оценка обязательно является достаточной.*

(e) Обобщения. Формулы (1)—(3) применимы и к дискретным распределениям, если вместо плотности распределения $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ подставить в них $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Теория, изложенная выше, применима без изменения к совокупностям, описываемым многомерными случайными величинами.

Совокупность m подходящих несмещенных оценок $y_1, y_2, \ldots, y_m$ называется **совместно эффективной оценкой** m параметров $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$, если эллипсоид рассеяния (п. 18.4-8, с) совместного выборочного распределения совпадает с «эллипсоидом минимального рассеяния», аналогично минимуму дисперсии, определенному формулой (3). **Совместные асимптотически эффективные оценки** определяются подобным образом через асимптотические выборочные распределения. Обратная величина обобщенной дисперсии (п. 18.4-8, с), соответствующей совместному выборочному распределению величин $y_1, y_2, \ldots, y_m$, является мерой *относительной совместной эффективности* этой совокупности оценок.

Чтобы определить совокупность m **совместно достаточных оценок** $y_1, y_2, \ldots, y_m$, надо только заменить случайную величину y в формуле (4) m-мерной случайной величиной $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

19.4-2. Некоторые свойства статистик, применяемых в качестве оценок (см. также п. 19.2-4).

(a) Функции от моментов. *Каждая статистика, представимая в виде рациональной функции от выборочных моментов a_r, является состоя-*

тельной оценкой той же самой функции от соответствующих моментов α_r генеральной совокупности при условии, что рассматриваемые моменты существуют и что значение функции в них конечно (см. также п. 18.3-7).

Несмещенную состоятельную оценку часто удается получить из смещенной состоятельной оценки путем умножения ее на подходящую функцию от n.

Аналогичная теорема применима к функции от выборочных моментов $a_{r_1 r_2 \ldots}$ для многомерных выборок. В частности, величины g_1, g_2, l_{ik}, r_{ik} и $r_{12 \cdot 34 \ldots m}$ (п. 19.7-2) являются состоятельными оценками соответствующих параметров γ_1, γ_2, λ_{ik}, ρ_{ik} и $\rho_{12 \cdot 34 \ldots m}$ генеральной совокупности.

(b) Для выборок из *нормальной совокупности* имеем:

1) $\bar{x}$ — эффективная оценка для ξ.

2) $\bar{x}$ и s^2 — совместные асимптотически эффективные оценки для ξ и σ^2, но s^2 — смещенная оценка; $\bar{x}$ и $S^2 = \frac{n}{n-1} s^2$ — совместные достаточные и асимптотически эффективные оценки для ξ и σ^2; S^2 имеет эффективность $\frac{n-1}{n}$.

3) Если ξ известно, то $\hat{s}^2 = \overline{(x-\xi)^2}$ — эффективная оценка для σ^2.

4) Выборочная медиана $x_{1/2}$ имеет асимптотическую эффективность $2/\pi$.

Для выборок из *биномиального распределения* (табл. 18.8-3) $\bar{x}$ — эффективная оценка для ξ.

Для выборок из *двумерного нормального распределения* (п. 18.8-6) с известным центром распределения выборочные центральные моменты l_{11}, l_{12} и l_{22} (п. 19.7-2) являются совместными асимптотически эффективными оценками для λ_{11}, λ_{12} и λ_{22}.

19.4-3. Нахождение оценок. Метод моментов. Если распределение генеральной совокупности описывается функцией

$$\Phi(x;\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots),\qquad \varphi(x;\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots)\quad \text{или}\quad p(x;\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots)$$

заданного вида с подлежащими определению параметрами $\eta_1, \eta_2, \ldots$, то каждая числовая характеристика распределения $\mathsf{M}x$, $\mathsf{D}x$, α_r и т. д. является функцией параметров $\eta_1, \eta_2, \ldots$ В частности,

$$\alpha_1 = \alpha_1(\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots),\qquad \alpha_2 = \alpha_2(\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots),\ \ldots,$$

если эти моменты существуют. *Метод моментов* определяет (совместные) оценки

$$y_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\qquad y_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\qquad \ldots,\qquad y_m(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

для соответствующих параметров $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ посредством m уравнений

$$\alpha_r(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m) = a_r(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\qquad (r = 1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{19.4-5}$$

получаемых путем *приравнивания первых m выборочных моментов a_r соответствующим моментам α_r генеральной совокупности*. Получаемые при этом оценки y_k будут функциями от выборочных моментов (см. также п. 19.4-2, а).

19.4-4. Метод наибольшего правдоподобия. Для любой данной выборки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значение функции правдоподобия $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (п. 19.1-2) есть функция неизвестных параметров $\eta_1, \eta_2, \ldots$ *По методу наибольшего правдоподобия* в качестве оценки каждого параметра η_k выбирается такая функция $y_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая придает возможно большее значение величине $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots)$ для всех выборок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Для получения совокупности m (совместно) **наиболее правдоподобных оценок**

$$y_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\quad y_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\quad \ldots,\quad y_m(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

решают систему m уравнений наибольшего правдоподобия *)

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\ln L(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \quad (19.4\text{-}6)$$

которые выражают *необходимые условия максимума функции правдоподобия*, если последняя дифференцируема (п. 11.3-3).

Хотя метод наибольшего правдоподобия часто приводит к более сложным вычислениям, чем метод моментов, наиболее правдоподобные оценки могут оказаться предпочтительнее, особенно в случае малых выборок, так как:

1) *Если эффективная оценка (или совокупность совместно эффективных оценок) существует, то она будет единственным решением уравнения (или системы уравнений) правдоподобия* (6).

2) *Если достаточная оценка (или совокупность достаточных оценок) существует, то каждое решение уравнения (или системы уравнений) правдоподобия* (6) *будет функцией этой оценки (или оценок).*

Кроме того, при достаточно общих условиях уравнения правдоподобия (6) имеют решения, дающие состоятельные, асимптотически нормальные и асимптотически эффективные оценки [18.6].

Пример. Если величина x распределена нормально, наиболее правдоподобная оценка $X=\bar{x}$ для ξ является эффективной оценкой и минимизирует $\sum_{i=1}^{n}(x_i-X)^2$ (*метод наименьших квадратов* в теории ошибок). Заметим, что метод наибольшего правдоподобия применим также к многомерным совокупностям.

19.4-5. Другие методы нахождения оценок. Некоторые методы, обычно применяемые в критериях согласия, могут быть использованы и для оценок параметров (п. 19.6-7, см. также пп. 19.9-1 — 19.9-5).

19.5. ВЫБОРОЧНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

19.5-1. Вводные замечания. Здесь рассматриваются распределения статистик, часто применяемых в качестве состоятельных оценок для соответствующих параметров генеральной совокупности. В п. 19.5-2 речь идет о приближенном расчете выборочного распределения для больших выборок, в пп. 19.5-3 и 19.5-4 — о распределении статистик, получаемых из нормальных совокупностей.

19.5-2. Асимптотически нормальные выборочные распределения (см. также п. 18.6-4). При достаточно большом объеме выборки выборочные распределения многих статистик можно аппроксимировать нормальным распределением с помощью следующих теорем, получаемых из п. 18.6-5.

(a) *Пусть статистика* $y(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ *представима в виде функции* $y=f(m_1,\ m_2,\ \ldots)$ *от выборочных моментов* m_k, *и пусть* $f(m_1,\ m_2,\ \ldots)$ *определена и дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки* $m_1=\mu_1$, $m_2=\mu_2$, ... *Тогда выборочное распределение статистики* y *при* $n\to\infty$ *асимптотически нормально с центром* $f(\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots)$ *и дисперсией вида* $\frac{\text{const}}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Эта теорема применима, в частности, к выборочному среднему $\bar{x}$, к выборочным дисперсиям s^2 и S^2 и ко всем выборочным моментам a_r и m_r (п. 19.2-4). Аналогичная теорема применима к многомерным распределениям.

(b) *Распределение каждой выборочной квантили* X_P *асимптотически нормально с центром* x_P *и дисперсией* $\frac{P(1-P)}{n\,\varphi^2(x_P)}$, *если только генеральная квантиль* x_P *единственна и если производная* $\varphi'(x)$ *существует и непрерывна в окрестности точки* $x=x_P$. Эта теорема применима, в частности, к выборочной медиане $X_{1/2}$. При аналогичных условиях любое совместное распределение выборочных квантилей (и, следовательно, например, выборочной интерквартильной широты) также является асимптотически нормальным.

*) Функции L и $\ln L$ достигают максимума одновременно.

19.5-3. Выборки из нормальной совокупности. Распределения χ^2, t и v^2.

(a) В случае выборок из *нормальной* совокупности (нормальных выборок) все выборочные значения являются нормальными случайными величинами и многие выборочные распределения могут быть вычислены явно с помощью пп. 18.5-7 и 18.8-9. Предположение о нормальности генеральной совокупности часто опирается на центральную предельную теорему (п. 18.6-5; пример: ошибки измерения).

Для любой выборки объема n из нормальной совокупности с центром ξ и дисперсией σ^2

1) $\frac{\bar{x}-\xi}{\sigma/\sqrt{n}}$ имеет **стандартизованное нормальное распределение** (u-распределение, п. 18.8-4);

2) $\frac{\bar{x}-\xi}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x}-\xi}{s/\sqrt{n-1}}$ **(отношение Стьюдента)** имеет t-**распределение с $n-1$ степенью свободы** (табл. 19.5-2);

3) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2$ имеет χ^2-**распределение с $n-1$ степенью свободы** (табл. 19.5-1);

4) $\frac{x_i-\xi}{\sigma}$ имеет **стандартизованное нормальное распределение;**

5) $\frac{x_i-\xi}{S} = \frac{x_i-\xi}{s}\sqrt{\frac{n-1}{n}}$ имеет t-**распределение с $n-1$ степенью свободы;**

6) $\frac{x_i-\bar{x}}{S}\sqrt{\frac{n}{n-1}} = \frac{x_i-\bar{x}}{s}$ имеет r-**распределение с $m=n-2$ степенями свободы** (п. 19.7-4);

7) $\frac{n\hat{s}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi)^2$ имеет χ^2-**распределение с n степенями свободы.**

Дополнительные формулы см. ниже в табл. 19.6-1. Табл. 19.5-1 — 19.5-3 описывают распределения χ^2, t и v^2; квантили этих функций табулированы (см. табл. 19.5-4 — 19.5-6).

(b) *Выборочное среднее $\bar{x}$ и выборочная дисперсия s^2 независимы тогда и только тогда, когда рассматриваемая выборка получена из нормальной совокупности.*

Для каждой нормальной выборки $\bar{x}$, s^2 и $m_r m_2^{-r/2}$ взаимно независимы для всех r; для $g_1 = m_3 m_2^{-3/2}$, $g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$ имеем

$$\mathsf{M}g_1 = 0, \qquad \mathsf{D}g_1 = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}, \tag{19.5-1}$$

$$\mathsf{M}g_2 = -\frac{6}{n+1}, \quad \mathsf{D}g_2 = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}. \tag{19.5-2}$$

19.5-4. Распределение размаха выборки (см. также пп. 19.2-6 и 19.7-6).

(a) Если генеральная совокупность имеет непрерывное распределение, то размах w случайной выборки объема n имеет плотность распределения

$$\varphi_w(w) = n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}[\Phi(x+w)-\Phi(x)]^{n-2}\varphi(x)\varphi(x+w)\,dx. \tag{19.5-3}$$

Эта функция табулирована для некоторых видов распределений генеральной совокупности [18.9].

(b) *Для нормальной генеральной совокупности среднее значение и среднеквадратическое отклонение размаха* w *пропорциональны среднему квадратическому отклонению* σ *генеральной совокупности*:

$$\mathrm{M}w = k_n\sigma, \qquad \mathrm{D}w = c_n^2\sigma^2; \tag{19.5-4}$$

k_n, c_n и c_n/k_n табулированы как функции от n; w/k_n есть несмещенная оценка для σ. Средний размах

$$\bar{w} = \frac{w_1 + w_2 + \ldots + w_m}{m}$$

для m случайных выборок объема n имеет при $m \to \infty$ асимптотически нормальное распределение с центром $k_n\sigma$ и дисперсией $\frac{c_n^2\sigma^2}{m}$; w/k_n является при этом несмещенной состоятельной оценкой для σ.

(c) *Для равномерного распределения генеральной совокупности в интервале* (a, b)

$$\mathrm{M}w = (b-a)\frac{n-1}{n+1}, \qquad \mathrm{D}w = (b-a)^2\frac{2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)} \tag{19.5-5}$$

и $w\frac{n+1}{n-1}$ есть несмещенная состоятельная оценка для $b-a$.

Заметим, что арифметическое среднее из наименьшего и наибольшего выборочных значений есть состоятельная несмещенная оценка для $\mathrm{M}x$.

(d) Для любого непрерывного распределения генеральной совокупности вероятность того, что по крайней мере доля q всей совокупности расположена между крайними значениями $x_{\min}$ и $x_{\max}$ данной случайной выборки объема n, равна

$$1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n. \tag{19.5-6}$$

19.5-5. *Выборочный метод для конечной совокупности. Пусть дана конечная совокупность N элементов (событий, результатов измерений или наблюдений) $E_1, E_2, \ldots, E_N$, каждый из которых отмечен одним из $M \leqslant N$ различных спектральных значений $X_1, X_2, \ldots, X_M$ некоторой *дискретной случайной величины* x (п. 18.3-1). Функция $p(x)$ определяется значениями $p(X_i) = N_i/N$, где N_i — количество элементов, отмеченных спектральным значением X_i.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины x равны

$$\mathrm{M}x = \xi = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{M} N_i X_i, \qquad \mathrm{D}x = \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{M} N_i (X_i - \xi)^2. \tag{19.5-7}$$

Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — бесповторная случайная выборка объема n. Здесь x_1 рассматривается как случайная величина, соответствующая числовой отметке первого случайно выбранного элемента, x_2 — второго элемента и т. д., причем элементы выбираются без возвращения. Любая из случайных величин x_i имеет то же распределение, что и сама величина x, однако, в отличие от выборки из бесконечной генеральной совокупности, *величины* x_i *и* x_j *не являются независимыми*. Имеем

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{M}x_i = \xi, \qquad \mathrm{D}x_i = \sigma^2, \\ &\operatorname{cov}(x_i, x_j) = -\frac{\sigma^2}{N-1}, \qquad \rho(x_i, x_j) = -\frac{1}{N-1}. \end{aligned}\right\} \tag{19.5-8}$$

Пусть $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ и $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ — соответственно выборочное среднее значение и выборочная дисперсия. Тогда

$$\mathsf{M}\bar{x}=\xi, \quad \mathsf{D}\bar{x}=\frac{N-n}{N-1}\frac{\sigma^2}{n}, \quad \mathsf{M}S^2=\frac{N}{N-1}\sigma^2,$$

$$\mathsf{D}S^2=\frac{N(N-n)}{(N-1)^2(N-2)(N-3)}\frac{\sigma^4}{n(n-1)}\times$$
$$\times[2nN^2-\sigma(n+1)(N-1)+(n-1)(N-1)^2\gamma_2],$$

где γ_2 — коэффициент эксцесса.

Эти формулы при $N\to\infty$ приводятся к формулам пп. 19.2-3 и 19.2-4.

Если коэффициентом эксцесса можно пренебречь ($\gamma_2\approx 0$), то при больших N величина $t=\sqrt{\frac{(N-1)n}{N-n}}\,\frac{\bar{x}-\xi}{S}$ имеет в первом приближении t-распределение с $\left[\frac{N(n-1)}{N-n}\right]$ числом степеней свободы.

Таблица 19.5-1

χ^2-распределение с m степенями свободы

(рис. 19.5-1 и табл. 19.5-4; см. также пп. 18.8-7, 19.5-3 и 19.6-7)

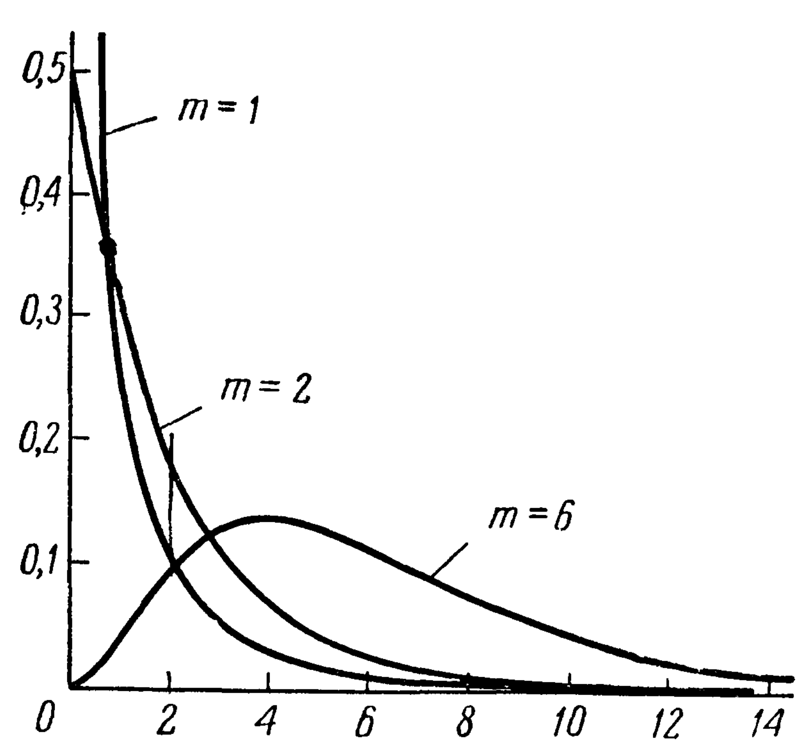


Рис. 19.5-1. χ^2-распределение для различных значений m.

(a) $$\varphi_y(Y)\equiv\varphi_{\chi^2(m)}(Y)=\begin{cases}0 & \text{при } Y<0,\\ \dfrac{1}{\Gamma(m/2)\,2^{m/2}}\,Y^{\frac{m-2}{2}}e^{-\frac{Y}{2}} & \text{при } Y>0.\end{cases}$$

(b) $\mathsf{M}y=m$, $\mathsf{D}y=2m$.

Мода $m-2$ $(m\geqslant 2)$.

Момент порядка r относительно $y=0$:

$m(m+2)\dots(m+2r-2)$.

Семиинвариант порядка r:

$2^{r-1}(r-1)!\,m$.

Коэффициент асимметрии $2\sqrt{2/m}$.

Коэффициент эксцесса $12/m$.

Характеристическая функция

$(1-2iq)^{-m/2}$

Таблица 19.5-1 (*продолжение*)

(c) **Типичная интерпретация.** Если m взаимно независимых стандартизованных случайных величин $u_k = \frac{(x_k - \xi_k)}{\sigma_k}$ имеют нормальные распределения, то сумма их квадратов $\chi^2 = \sum_{k=1}^{m} u_k^2$ имеет χ^2-распределение с m степенями свободы.

Если $\sum_{k=1}^{m} u_k^2$ *выражена в виде суммы от r квадратичных форм* $y_j(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ *рангов соответственно* m_j (п. 13.5-4, b), *то* $y_1, y_2, \ldots, y_r$ *взаимно независимы и имеют* χ^2-*распределения с* $m_1, m_2, \ldots, m_r$ *степенями свободы тогда и только тогда, когда* $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = m$ (*теорема разложения*).

Сумма r независимых случайных величин $y_1, y_2, \ldots, y_r$, *имеющих* χ^2-*распределение с* $m_1, m_2, \ldots, m_r$ *степенями свободы соответственно, имеет* χ^2-*распределение с* $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_r$ *степенями свободы* (*теорема сложения или свойство устойчивости*, см. также п. 18.8-9).

(d) **Квантили** для y обозначаются через χ^2_P или $\chi^2_P(m)$. В таблицах часто дается $\chi^2_{1-\alpha}(m)$ в зависимости от α.

(e) **Приближения.** При $m \to \infty$:

y распределена асимптотически нормально с центром m и дисперсией $2m$.

y/m распределена асимптотически нормально с центром 1 и дисперсией $2/m$.

$\sqrt{2y}$ распределена асимптотически нормально с центром $\sqrt{2m-1}$ и дисперсией 1.

Из последнего свойства вытекает аппроксимация квантилей

$$\chi^2_P(m) \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{2m-1} + u_P\right)^2 \qquad (m > 30),$$

где u_P — квантили стандартизованного нормального распределения (п. 18.8-4, b). Эта аппроксимация не годится при значениях P, близких к 0 или 1. Лучшая аппроксимация дается формулой

$$\chi^2_P(m) \approx m\left(1 - \frac{2}{9m} + u_P\sqrt{\frac{2}{9m}}\right)^3.$$

Таблица 19.5-2

t-распределение Стьюдента с m степенями свободы

(рис. 19.5-2 и табл. 19.5-5; см. также пп. 19.5-3 и 19.6-6)

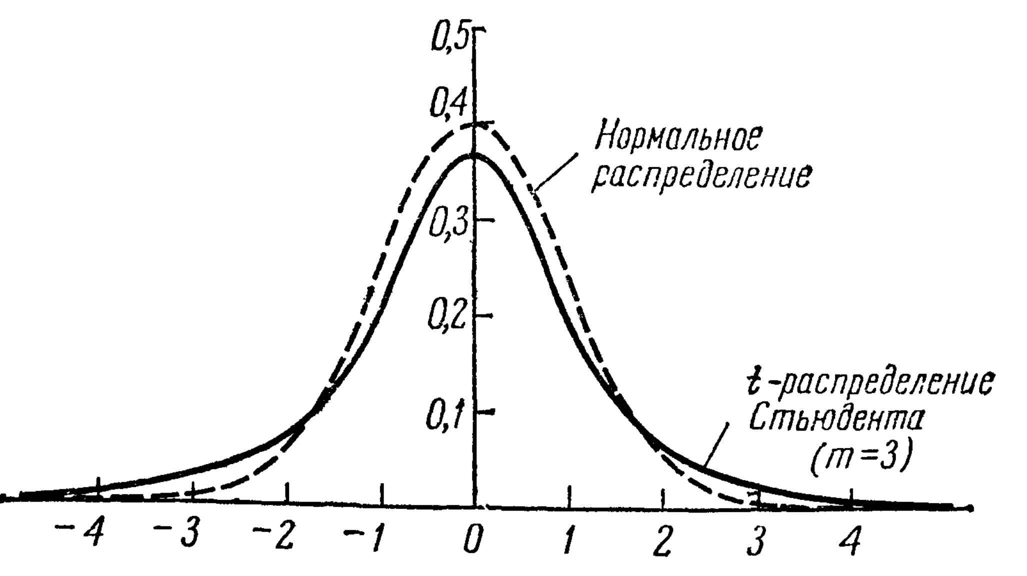


Рис. 19.5-2. t-распределение Стьюдента; сравнение со стандартизованным нормальным распределением.

Таблица 19.5-2 (*продолжение*)

(a) $$\varphi_y(Y) \equiv \varphi_{t(m)}(Y) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{m\pi}}\left(1+\frac{Y^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}.$$

(b) $\mathsf{M}y = 0\ (m > 1)$, $\mathsf{D}y = \dfrac{m}{m-2}\ (m > 2)$.

Мода 0. Коэффициент асимметрии 0.

Коэффициент эксцесса $\dfrac{3(m-2)}{m-4}$ $(m > 4)$.

Моменты порядка $2r$ относительно $y = 0$:

$$\frac{1\cdot 3\ldots(2r-1)}{(m-2)(m-4)\ldots(m-2r)}\, m^r\quad (2r < m).$$

(c) **Типичная интерпретация.** Распределению Стьюдента подчинено отношение

$$y = t = \frac{x_0}{\sqrt{\frac{1}{m}\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2\right)}},$$

где $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$ — взаимно независимые нормально распределенные случайные величины с центрами 0 и дисперсиями σ^2. Заметим, что t от σ^2 не зависит.

(d) **Квантили** y_P для y обозначаются через t_P; заметим, что $t_P = -t_{1-P}$.

Распределение величины $|y| = |t|$ связано с t-распределением формулами

$$\mathsf{P}\{|y| < Y\} = \mathsf{P}\{-Y < y < Y\} = \int_{-Y}^{Y}\varphi_{t(m)}(y)\,dy = 2\Phi_{t(m)}(Y) - 1 = \Phi_{|t(m)|}(Y),$$

$$\mathsf{P}\{|y| > Y\} = 2\int_{Y}^{\infty}\varphi_{t(m)}(y)\,dy = 2\left[1 - \Phi_{t(m)}(Y)\right] = 1 - \Phi_{|t(m)|}(Y).$$

Квантили $|t|_{1-\alpha} = t_{1-\alpha/2}$, определяемые соотношением $\mathsf{P}\{|y| > |t|_{1-\alpha}\} = \alpha$, табулированы; в некоторых таблицах значения $|t|_{1-\alpha}$ обозначены через t_α.

(e) **Приближения.** При $m \to \infty$ распределение y асимптотически нормально с центром 0 и дисперсией 1, так что (см. п. 18.8-4, b)

$$t_P \approx u_P \quad\text{и}\quad |t|_{1-\alpha} = t_{1-\alpha/2} \approx |u|_{1-\alpha} = u_{1-\alpha/2}\qquad (m > 30).$$

Таблица 19.5-3

Распределение отношения дисперсий (v^2-распределение) и связанные с ним распределения

(табл. 19.5-6; см. также п. 19.6-6)

(a) $\varphi_y(Y) \equiv \varphi_{v^2(m,\,m')}(Y) =$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } Y < 0,\\ \left(\dfrac{m}{m'}\right)^{m/2}\dfrac{\Gamma\left(\frac{m+m'}{2}\right)}{\Gamma(m/2)\,\Gamma(m'/2)}\,Y^{(m-2)/2}\left(1+\dfrac{m}{m'}Y\right)^{-(m+m')/2} & \text{при } Y > 0.\end{cases}$$

Таблица 19.5-3 (*продолжение*)

(b) $\mathsf{M}y = \frac{m'}{m'-2}\ (m' > 2)$, $\mathsf{D}y = \frac{2m'^2(m+m'-2)}{m(m'-2)^2(m'-4)}\ (m' > 4)$.

Мода $\frac{m'(m-2)}{m(m'+2)}\quad (m > 2)$.

Момент порядка r относительно $y=0$: $\frac{\Gamma(m/2+r)\,\Gamma(m'/2-r)}{\Gamma(m/2)\,\Gamma(m'/2)}(m'/m)^r$.

(c) **Типичная интерпретация.** Этому распределению подчинено отношение v^2 двух случайных величин, имеющих χ^2-распределения с m и m' степенями свободы, или

$$y = v^2 = \frac{\frac{1}{m}\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2\right)}{\frac{1}{m'}\left(x_1'^2 + x_2'^2 + \ldots + x_{m'}'^2\right)} = e^{2z} = \frac{m'}{m}\,\frac{g^2}{1-g^2},$$

где все $m+m'$ величин x_i и x_k' взаимно независимы и нормально распределены с центрами 0 и дисперсиями σ^2. Заметим, что v^2 от σ^2 не зависит.

(d) **Преобразование переменных.** Распределение отношения дисперсий v^2 описывается также другими случайными величинами:

1) v с плотностью

$$\varphi_{v\,(m,\ m')}(V) = \begin{cases} 0 & \text{при } V < 0, \\ 2\left(\frac{m}{m'}\right)^{\frac{m}{2}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+m'}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m'}{2}\right)} V^{m-1}\left(1+\frac{m}{m'}V^2\right)^{-\frac{m+m'}{2}} & \text{при } V > 0; \end{cases}$$

2) $z = \ln v = \frac{1}{2}\ln v^2$ с плотностью

$$\varphi_{z\,(m,\ m')}(Z) = 2\left(\frac{m}{m'}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+m'}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m'}{2}\right)} e^{mZ}\left(1+\frac{m}{m'}e^{2Z}\right)^{-\frac{m+m'}{2}}$$

(*распределение Фишера*);

3) $g^2 = \frac{m}{m'}v^2\left(1+\frac{m}{m'}v^2\right)^{-1}$ *с бета-распределением* (табл. 18.8-11).

(e) **Квантили**

$$v_{1-\alpha}^2(m,\ m') = \frac{1}{v_\alpha^2(m,\ m')}, \qquad v_{1-\alpha}(m,\ m') \text{ и } z_{1-\alpha}(m,\ m')$$

табулированы в функциях от α для различных значений m, m'.

Специальные случаи

$$v_P^2(1,\ m) = t_{\frac{1+P}{2}}^2(m), \quad v_P^2(m,\ \infty) = \frac{1}{m}\chi_P^2(m), \quad v_P^2(1,\ \infty) = u_{\frac{1+P}{2}}^2,$$

$$v_P^2(m,\ 1) = \frac{1}{t_{P/2}^2(m)}, \quad v_P^2(\infty,\ m) = \frac{m}{\chi_{1-P}^2(m)}, \quad v_P^2(\infty,\ 1) = \frac{1}{u_{P/2}^2}.$$

(f) **Приближения.** При $m \to \infty$, $m' \to \infty$ величина z распределена асимптотически нормально с центром $\frac{m-m'}{2mm'}$ и дисперсией $\frac{m+m'}{2mm'}$. Эта аппроксимация пригодна при $m > 30$, $m' > 30$.

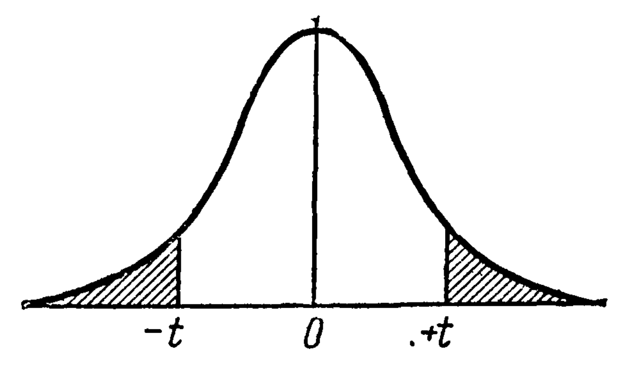
Таблица 19.5-4

χ^2-распределение

В таблице приведены значения квантилей $\chi^2_{1-\alpha}(m)$ в зависимости от числа степеней свободы m и вероятности α

m \ α	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
	Вероятность $P\{\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(m)\}$										
1	0,00016	0,00063	0,00393	0,0158	0,0642	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341	16,268
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,465
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,517
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	5,229	5,985	7,262	8,547	10,307	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59.703

Таблица 19.5-5

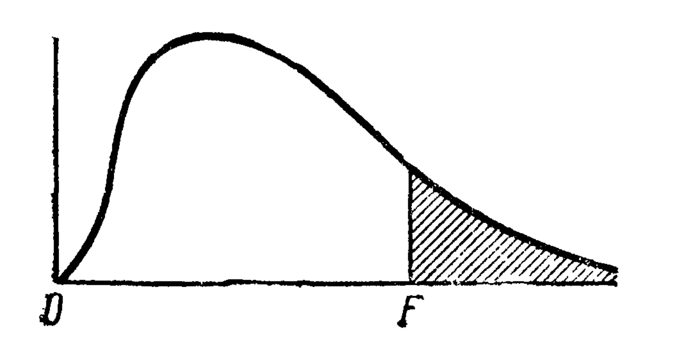


t-распределение Стьюдента

В таблице приведены значения квантилей $|t(m)|_{1-\alpha}$ в зависимости от числа степеней свободы m и вероятности α

Вероятность $P\{\|t\| > \|t(m)\|_{1-\alpha}\}$								
m \ α	0,80	0,40	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,325	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,289	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,277	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,271	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,267	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,265	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,263	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,262	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,261	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,260	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,260	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,259	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,259	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,258	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,258	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,258	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,257	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,257	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,257	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,257	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,257	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,256	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,256	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,256	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,256	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,256	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,256	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,256	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,256	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,256	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,255	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,254	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,254	0,845	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,253	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Таблица 195-6.



F-распределение (распределение v^2)

В таблице приведены значения квантилей $v^2_{1-\alpha}(m, m')$ для $\alpha = 0{,}05$ (обычный шрифт) и $\alpha = 0{,}01$ (**жирный шрифт**) в зависимости от числа степеней свободы m и m'.

m — число степеней свободы для большей дисперсии

m' — число степеней свободы для меньшей дисперсии

	Число степеней свободы для большей дисперсии																				
m' \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	20	24	30	40	50	100	200	∞
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,41	19,42	19,43	19,44	19,45	19,46	19,47	19,47	19,49	19,49	19,50
	98,49	**99,00**	**99,17**	**99,25**	**99,30**	**99,33**	**99,34**	**99,36**	**99,38**	**99,40**	**99,42**	**99,43**	**99,44**	**99,45**	**99,46**	**99,47**	**99,48**	**99,48**	**99,49**	**99,49**	**99,50**
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,74	8,71	8,69	8,66	8,64	8,62	8,60	8,58	8,56	8,54	8,53
	34,12	**30,82**	**29,46**	**28,71**	**28,24**	**27,91**	**27,67**	**27,49**	**27,34**	**27,23**	**27,05**	**26,92**	**26,83**	**26,69**	**26,60**	**26,50**	**26,41**	**26,35**	**26,23**	**26,18**	**26,12**
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,87	5,84	5,80	5,77	5,74	5,71	5,70	5,66	5,65	5,63
	21,20	**18,00**	**16,69**	**15,98**	**15,52**	**15,21**	**14,98**	**14,80**	**14,66**	**14,54**	**14,37**	**14,24**	**14,15**	**14,02**	**13,93**	**13,83**	**13,74**	**13,69**	**13,57**	**13,52**	**13,46**
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,68	4,64	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,40	4,38	4,36
	16,26	**13,27**	**12,06**	**11,39**	**10,97**	**10,67**	**10,45**	**10,27**	**10,15**	**10,05**	**9,89**	**9,77**	**9,68**	**9,55**	**9,47**	**9,38**	**9,29**	**9,24**	**9,13**	**9,07**	**9,02**
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,96	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,71	3,69	3,67
	13,74	**10,92**	**9,78**	**9,15**	**8,75**	**8,47**	**8,26**	**8,10**	**7,98**	**7,87**	**7,72**	**7,60**	**7,52**	**7,39**	**7,31**	**7,23**	**7,14**	**7,09**	**6,99**	**6,94**	**6,88**
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,57	3,52	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,28	3,25	3,23
	12,25	**9,55**	**8,45**	**7,85**	**7,46**	**7,19**	**7,00**	**6,84**	**6,71**	**6,62**	**6,47**	**6,35**	**6,27**	**6,15**	**6,07**	**5,98**	**5,90**	**5,85**	**5,75**	**5,70**	**5,65**
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,28	3,23	3,20	3,15	3,12	3,08	3,05	3,03	2,98	2,96	2,93
	11,26	**8,65**	**7,59**	**7,01**	**6,63**	**6,37**	**6,19**	**6,03**	**5,91**	**5,82**	**5,67**	**5,56**	**5,48**	**5,36**	**5,28**	**5,20**	**5,11**	**5,06**	**4,96**	**4,91**	**4,86**
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,07	3,02	2,98	2,93	2,90	2,86	2,82	2,80	2,76	2,73	2,71
	10,56	**8,02**	**6,99**	**6,42**	**6,06**	**5,80**	**5,62**	**5,47**	**5,35**	**5,26**	**5,11**	**5,00**	**4,92**	**4,80**	**4,73**	**4,64**	**4,56**	**4,51**	**4,41**	**4,36**	**4,31**
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,91	2,86	2,82	2,77	2,74	2,70	2,67	2,64	2,59	2,56	2,54
	10,04	**7,56**	**6,55**	**5,99**	**5,64**	**5,39**	**5,21**	**5,06**	**4,95**	**4,85**	**4,71**	**4,60**	**4,52**	**4,41**	**4,33**	**4,25**	**4,17**	**4,12**	**4,01**	**3,96**	**3,91**
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,79	2,74	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,50	2,45	2,42	2,40
	9,65	**7,20**	**6,22**	**5,67**	**5,32**	**5,07**	**4,88**	**4,74**	**4,63**	**4,54**	**4,40**	**4,29**	**4,21**	**4,10**	**4,02**	**3,94**	**3,86**	**3,80**	**3,70**	**3,66**	**3,60**
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,69	2,64	2,60	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,35	2,32	2,30
	9,33	**6,93**	**5,95**	**5,41**	**5,06**	**4,82**	**4,65**	**4,50**	**4,39**	**4,30**	**4,16**	**4,05**	**3,98**	**3,86**	**3,78**	**3,70**	**3,61**	**3,56**	**3,46**	**3,41**	**3,36**
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,60	2,55	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,32	2,26	2,24	2,21
	9,07	**6,70**	**5,74**	**5,20**	**4,86**	**4,62**	**4,44**	**4,30**	**4,19**	**4,10**	**3,96**	**3,85**	**3,78**	**3,67**	**3,59**	**3,51**	**3,42**	**3,37**	**3,27**	**3,21**	**3,16**

Таблица 19.5-6 (*продолжение*)

	Число степеней свободы для большей дисперсии																				
m' \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	20	24	30	40	50	100	200	∞
36	4,11	3,26	2,86	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,10	2,03	1,98	1,93	1,87	1,82	1,78	1,72	1,69	1,62	1,59	1,55
	7,39	**5,25**	**4,38**	**3,89**	**3,58**	**3,35**	**3,18**	**3,04**	**2,94**	**2,86**	**2,72**	**2,62**	**2,54**	**2,43**	**2,35**	**2,26**	**2,17**	**2,12**	**2,00**	**1,94**	**1,87**
38	4,10	3,25	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,02	1,96	1,92	1,85	1,80	1,76	1,71	1,67	1,60	1,57	1,53
	7,35	**5,21**	**4,34**	**3,86**	**3,54**	**3,32**	**3,15**	**3,02**	**2,91**	**2,82**	**2,69**	**2,59**	**2,51**	**2,40**	**2,32**	**2,22**	**2,14**	**2,08**	**1,97**	**1,90**	**1,84**
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07	2,00	1,95	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,59	1,55	1,51
	7,31	**5,18**	**4,31**	**3,83**	**3,51**	**3,29**	**3,12**	**2,99**	**2,88**	**2,80**	**2,66**	**2,56**	**2,49**	**2,37**	**2,29**	**2,20**	**2,11**	**2,05**	**1,94**	**1,88**	**1,81**
42	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06	1,99	1,94	1,89	1,82	1,78	1,73	1,68	1,64	1,57	1,54	1,49
	7,27	**5,15**	**4,29**	**3,80**	**3,49**	**3,26**	**3,10**	**2,96**	**2,86**	**2,77**	**2,64**	**2,54**	**2,46**	**2,35**	**2,26**	**2,17**	**2,08**	**2,02**	**1,91**	**1,85**	**1,78**
44	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05	1,98	1,92	1,88	1,81	1,76	1,72	1,66	1,63	1,56	1,52	1,48
	7,24	**5,12**	**4,26**	**3,78**	**3,46**	**3,24**	**3,07**	**2,94**	**2,84**	**2,75**	**2,62**	**2,52**	**2,44**	**2,32**	**2,24**	**2,15**	**2,06**	**2,00**	**1,88**	**1,82**	**1,75**
46	4,05	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,14	2,09	2,04	1,97	1,91	1,87	1,80	1,75	1,71	1,65	1,62	1,54	1,51	1,46
	7,21	**5,10**	**4,24**	**3,76**	**3,44**	**3,22**	**3,05**	**2,92**	**2,82**	**2,73**	**2,60**	**2,50**	**2,42**	**2,30**	**2,22**	**2,13**	**2,04**	**1,98**	**1,86**	**1,80**	**1,72**
48	4,04	3,19	2,80	2,56	2,41	2,30	2,21	2,14	2,08	2,03	1,96	1,90	1,86	1,79	1,74	1,70	1,64	1,61	1,53	1,50	1,45
	7,19	**5,08**	**4,22**	**3,74**	**3,42**	**3,20**	**3,04**	**2,90**	**2,80**	**2,71**	**2,58**	**2,48**	**2,40**	**2,28**	**2,20**	**2,11**	**2,02**	**1,96**	**1,84**	**1,78**	**1,70**
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02	1,95	1,90	1,85	1,78	1,74	1,69	1,63	1,60	1,52	1,48	1,44
	7,17	**5,06**	**4,20**	**3,72**	**3,41**	**3,18**	**3,02**	**2,88**	**2,78**	**2,70**	**2,56**	**2,46**	**2,39**	**2,26**	**2,18**	**2,10**	**2,00**	**1,94**	**1,82**	**1,76**	**1,68**
55	4,02	3,17	2,78	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,05	2,00	1,93	1,88	1,83	1,76	1,72	1,67	1,61	1,58	1,50	1,46	1,41
	7,12	**5,01**	**4,16**	**3,68**	**3,37**	**3,15**	**2,98**	**2,85**	**2,75**	**2,66**	**2,53**	**2,43**	**2,35**	**2,23**	**2,15**	**2,06**	**1,96**	**1,90**	**1,78**	**1,71**	**1,64**
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,86	1,81	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,48	1,44	1,39
	7,08	**4,98**	**4,13**	**3,65**	**3,34**	**3,12**	**2,95**	**2,82**	**2,72**	**2,63**	**2,50**	**2,40**	**2,32**	**2,20**	**2,12**	**2,03**	**1,93**	**1,87**	**1,74**	**1,68**	**1,60**
65	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,02	1,98	1,90	1,85	1,80	1,73	1,68	1,63	1,57	1,54	1,46	1,42	1,37
	7,04	**4,95**	**4,10**	**3,62**	**3,31**	**3,09**	**2,93**	**2,79**	**2,70**	**2,61**	**2,47**	**2,37**	**2,30**	**2,18**	**2,09**	**2,00**	**1,90**	**1,84**	**1,71**	**1,64**	**1,56**
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,01	1,97	1,89	1,84	1,79	1,72	1,67	1,62	1,56	1,53	1,45	1,40	1,35
	7,01	**4,92**	**4,08**	**3,60**	**3,29**	**3,07**	**2,91**	**2,77**	**2,67**	**2,59**	**2,45**	**2,35**	**2,28**	**2,15**	**2,07**	**1,98**	**1,88**	**1,82**	**1,69**	**1,62**	**1,53**
80	3,96	3,11	2,72	2,48	2,33	2,21	2,12	2,05	1,99	1,95	1,88	1,82	1,77	1,70	1,65	1,60	1,54	1,51	1,42	1,38	1,32
	6,96	**4,88**	**4,04**	**3,56**	**3,25**	**3,04**	**2,87**	**2,74**	**2,64**	**2,55**	**2,41**	**2,32**	**2,24**	**2,11**	**2,03**	**1,94**	**1,84**	**1,78**	**1,65**	**1,57**	**1,49**
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92	1,85	1,79	1,75	1,68	1,63	1,57	1,51	1,48	1,39	1,34	1,28
	6,90	**4,82**	**3,98**	**3,51**	**3,20**	**2,99**	**2,82**	**2,69**	**2,59**	**2,51**	**2,36**	**2,26**	**2,19**	**2,06**	**1,98**	**1,89**	**1,79**	**1,73**	**1,59**	**1,51**	**1,43**
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,08	2,01	1,95	1,90	1,83	1,77	1,72	1,65	1,60	1,55	1,49	1,45	1,36	1,31	1,25
	6,84	**4,78**	**3,94**	**3,47**	**3,17**	**2,95**	**2,79**	**2,65**	**2,56**	**2,47**	**2,33**	**2,23**	**2,15**	**2,03**	**1,94**	**1,85**	**1,75**	**1,68**	**1,54**	**1,46**	**1,37**
150	3,91	3,06	2,67	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,82	1,76	1,71	1,64	1,59	1,54	1,47	1,44	1,34	1,29	1,22
	6,81	**4,75**	**3,91**	**3,44**	**3,14**	**2,92**	**2,76**	**2,62**	**2,53**	**2,44**	**2,30**	**2,20**	**2,12**	**2,00**	**1,91**	**1,83**	**1,72**	**1,66**	**1,51**	**1,43**	**1,33**
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87	1,80	1,74	1,69	1,62	1,57	1,52	1,45	1,42	1,32	1,26	1,19
	6,76	**4,71**	**3,88**	**3,41**	**3,11**	**2,90**	**2,73**	**2,60**	**2,50**	**2,41**	**2,28**	**2,17**	**2,09**	**1,97**	**1,88**	**1,79**	**1,69**	**1,62**	**1,48**	**1,39**	**1,28**
400	3,86	3,02	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,78	1,72	1,67	1,60	1,54	1,49	1,42	1,38	1,28	1,22	1,13
	6,70	**4,66**	**3,83**	**3,36**	**3,06**	**2,85**	**2,69**	**2,55**	**2,46**	**2,37**	**2,23**	**2,12**	**2,04**	**1,92**	**1,84**	**1,74**	**1,64**	**1,57**	**1,42**	**1,32**	**1,19**
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,69	1,64	1,57	1,52	1,46	1,40	1,35	1,24	1,17	1,00
	6,64	**4,60**	**3,78**	**3,32**	**3,02**	**2,80**	**2,64**	**2,51**	**2,41**	**2,32**	**2,18**	**2,07**	**1,99**	**1,87**	**1,79**	**1,69**	**1,59**	**1,52**	**1,36**	**1,25**	**1,00**

m' \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	20	24	30	40	50	100	200	∞
	Число степеней свободы для большей дисперсии																				
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,53	2,48	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,19	2,16	2,13
	8,86	**6,51**	**5,56**	**5,03**	**4,69**	**4,46**	**4,28**	**4,14**	**4,03**	**3,94**	**3,80**	**3,70**	**3,62**	**3,51**	**3,43**	**3,34**	**3,26**	**3,21**	**3,11**	**3,06**	**3,00**
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,48	2,43	2,39	2,33	2,29	2,25	2,21	2,18	2,12	2,10	2,07
	8,68	**6,36**	**5,42**	**4,89**	**4,56**	**4,32**	**4,14**	**4,00**	**3,89**	**3,80**	**3,67**	**3,56**	**3,48**	**3,36**	**3,29**	**3,20**	**3,12**	**3,07**	**2,97**	**2,92**	**2,87**
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,37	2,33	2,28	2,24	2,20	2,16	2,13	2,07	2,04	2,01
	8,53	**6,23**	**5,29**	**4,77**	**4,44**	**4,20**	**4,03**	**3,89**	**3,78**	**3,69**	**3,55**	**3,45**	**3,37**	**3,25**	**3,18**	**3,10**	**3,01**	**2,96**	**2,86**	**2,80**	**2,75**
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,38	2,33	2,29	2,23	2,19	2,15	2,11	2,08	2,02	1,99	1,96
	8,40	**6,11**	**5,18**	**4,67**	**4,34**	**4,10**	**3,93**	**3,79**	**3,68**	**3,59**	**3,45**	**3,35**	**3,27**	**3,16**	**3,08**	**3,00**	**2,92**	**2,86**	**2,76**	**2,70**	**2,65**
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,29	2,25	2,19	2,15	2,11	2,07	2,04	1,98	1,95	1,92
	8,28	**6,01**	**5,09**	**4,58**	**4,25**	**4,01**	**3,85**	**3,71**	**3,60**	**3,51**	**3,37**	**3,27**	**3,19**	**3,07**	**3,00**	**2,91**	**2,83**	**2,78**	**2,68**	**2,62**	**2,57**
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43	2,38	2,31	2,26	2,21	2,15	2,11	2,07	2,02	2,00	1,94	1,91	1,88
	8,18	**5,93**	**5,01**	**4,50**	**4,17**	**3,94**	**3,77**	**3,63**	**3,52**	**3,43**	**3,30**	**3,19**	**3,12**	**3,00**	**2,92**	**2,84**	**2,76**	**2,70**	**2,60**	**2,54**	**2,49**
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,28	2,23	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,96	1,90	1,87	1,84
	8,10	**5,85**	**4,94**	**4,43**	**4,10**	**3,87**	**3,71**	**3,56**	**3,45**	**3,37**	**3,23**	**3,13**	**3,05**	**2,94**	**2,86**	**2,77**	**2,69**	**2,63**	**2,53**	**2,47**	**2,42**
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,20	2,15	2,09	2,05	2,00	1,96	1,93	1,87	1,84	1,81
	8,02	**5,78**	**4,87**	**4,37**	**4,04**	**3,81**	**3,65**	**3,51**	**3,40**	**3,31**	**3,17**	**3,07**	**2,99**	**2,88**	**2,80**	**2,72**	**2,63**	**2,58**	**2,47**	**2,42**	**2,36**
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35	2,30	2,23	2,18	2,13	2,07	2,03	1,98	1,93	1,91	1,84	1,81	1,78
	7,94	**5,72**	**4,82**	**4,31**	**3,99**	**3,76**	**3,59**	**3,45**	**3,35**	**3,26**	**3,12**	**3,02**	**2,94**	**2,83**	**2,75**	**2,67**	**2,58**	**2,53**	**2,42**	**2,37**	**2,31**
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32	2,28	2,20	2,14	2,10	2,04	2,00	1,96	1,91	1,88	1,82	1,79	1,76
	7,88	**5,66**	**4,76**	**4,26**	**3,94**	**3,71**	**3,54**	**3,41**	**3,30**	**3,21**	**3,07**	**2,97**	**2,89**	**2,78**	**2,70**	**2,62**	**2,53**	**2,48**	**2,37**	**2,32**	**2,26**
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,18	2,13	2,09	2,02	1,98	1,94	1,89	1,86	1,80	1,76	1,73
	7,82	**5,61**	**4,72**	**4,22**	**3,90**	**3,67**	**3,50**	**3,36**	**3,25**	**3,17**	**3,03**	**2,93**	**2,85**	**2,74**	**2,66**	**2,58**	**2,49**	**2,44**	**2,33**	**2,27**	**2,21**
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,28	2,24	2,16	2,11	2,06	2,00	1,96	1,92	1,87	1,84	1,77	1,74	1,71
	7,77	**5,57**	**4,68**	**4,18**	**3,86**	**3,63**	**3,46**	**3,32**	**3,21**	**3,13**	**2,99**	**2,89**	**2,81**	**2,70**	**2,62**	**2,54**	**2,45**	**2,40**	**2,29**	**2,23**	**2,17**
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,10	2,05	1,99	1,95	1,90	1,85	1,82	1,76	1,72	1,69
	7,72	**5,53**	**4,64**	**4,14**	**3,82**	**3,59**	**3,42**	**3,29**	**3,17**	**3,09**	**2,96**	**2,86**	**2,77**	**2,66**	**2,58**	**2,50**	**2,41**	**2,36**	**2,25**	**2,19**	**2,13**
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25	2,20	2,13	2,08	2,03	1,97	1,93	1,88	1,84	1,80	1,74	1,71	1,67
	7,68	**5,49**	**4,60**	**4,11**	**3,79**	**3,56**	**3,39**	**3,26**	**3,14**	**3,06**	**2,93**	**2,83**	**2,74**	**2,63**	**2,55**	**2,47**	**2,38**	**2,33**	**2,21**	**2,16**	**2,10**
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,06	2,02	1,96	1,91	1,87	1,81	1,78	1,72	1,69	1,65
	7,64	**5,45**	**4,57**	**4,07**	**3,76**	**3,53**	**3,36**	**3,23**	**3,11**	**3,03**	**2,90**	**2,80**	**2,71**	**2,60**	**2,52**	**2,44**	**2,35**	**2,30**	**2,18**	**2,13**	**2,06**
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,05	2,00	1,94	1,90	1,85	1,80	1,77	1,71	1,68	1,64
	7,60	**5,42**	**4,54**	**4,04**	**3,73**	**3,50**	**3,33**	**3,20**	**3,08**	**3,00**	**2,87**	**2,77**	**2,68**	**2,57**	**2,49**	**2,41**	**2,32**	**2,27**	**2,15**	**2,10**	**2,03**
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	2,09	2,04	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,69	1,66	1,62
	7,56	**5,39**	**4,51**	**4,02**	**3,70**	**3,47**	**3,30**	**3,17**	**3,06**	**2,98**	**2,84**	**2,74**	**2,66**	**2,55**	**2,47**	**2,38**	**2,29**	**2,24**	**2,13**	**2,07**	**2,01**
32	4,15	3,30	2,90	2,67	2,51	2,40	2,32	2,25	2,19	2,14	2,07	2,02	1,97	1,91	1,86	1,82	1,76	1,74	1,67	1,64	1,59
	7,50	**5,34**	**4,46**	**3,97**	**3,66**	**3,42**	**3,25**	**3,12**	**3,01**	**2,94**	**2,80**	**2,70**	**2,62**	**2,51**	**2,42**	**2,34**	**2,25**	**2,20**	**2,03**	**2,02**	**1,96**
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,30	2,23	2,17	2,12	2,05	2,00	1,95	1,89	1,84	1,80	1,74	1,71	1,64	1,61	1,57
	7,44	**5,29**	**4,42**	**3,93**	**3,61**	**3,38**	**3,21**	**3,08**	**2,97**	**2,89**	**2,76**	**2,66**	**2,58**	**2,47**	**2,38**	**2,30**	**2,21**	**2,15**	**2,04**	**1,93**	**1,91**

19.6. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

19.6-1. Статистические гипотезы. Рассмотрим пространство выборок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ — действительные случайные величины. Каждое непротиворечивое множество предположений, относящихся к распределению n-мерной величины $(x_1, \ldots, x_n)$, называется **статистической гипотезой**. Статистическая гипотеза H называется **простой**, если она однозначно определяет распределение вероятностей; в противном случае она называется **сложной.**

Пусть распределение n-мерной величины $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определено одной из функций $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \eta_2, \ldots)$, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \eta_2, \ldots)$ или $p(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \eta_2, \ldots)$, где $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — параметры (см. также п. 19.1-3). Тогда *простая статистическая гипотеза* приписывает параметрам $\eta_1, \eta_2, \ldots$ вполне определенные значения $\eta_{10}, \eta_{20}, \ldots$ («точка» *в пространстве параметров*), тогда как *сложная статистическая гипотеза* ограничивает «точки» $\eta_1, \eta_2, \ldots$ некоторой областью в пространстве параметров. Класс допустимых статистических гипотез (допустимых комбинаций параметров) ограничен условиями рассматриваемой задачи.

Если случайная выборка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получена из одной теоретической совокупности (т. е. если случайные величины x_k взаимно независимы и одинаково распределены), то статистические гипотезы относятся к значениям параметров совокупности или к отношениям между ними. Заметим, однако, что теория пп. 19.6-1 и 19.6-2 относится не только к таким выборкам, но и к выборкам из любого случайного процесса.

19.6-2. Критерии с фиксированной выборкой; определения. Пусть дана некоторая фиксированная выборка объема n; **критерий статистической гипотезы** H есть правило, позволяющее отвергнуть или не отвергнуть гипотезу H на основании выборки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Каждый критерий определяет **критическое множество (область)** S «точек» $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: гипотеза H отвергается, если выборка $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ принадлежит критическому множеству, и не отвергается в противном случае.

Такое принятие или отбрасывание гипотезы не дает логического доказательства ее или опровержения. Здесь возможны четыре случая:

1. Гипотеза H *верна* и *принимается* согласно критерию.
2. Гипотеза H *неверна* и *отвергается* согласно критерию.
3. Гипотеза H *верна*, но *отвергается* согласно критерию (**ошибка первого рода**).
4. Гипотеза H *неверна*, но *принимается* согласно критерию (**ошибка второго рода**).

Для любого множества (фактических) значений параметров $\eta_1, \eta_2, \ldots$ вероятность *отвергнуть* проверяемую гипотезу по данной критической области S равна

$$\pi_S(\eta_1, \eta_2, \ldots) \equiv P\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S;\ \eta_1, \eta_2, \ldots\} = \int_S d\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \eta_1, \eta_2, \ldots). \quad (19.6\text{-}1)$$

Если с гипотезой H конкурирует лишь одна альтернативная простая гипотеза $H_1 \equiv \{\eta_1 = \eta_{11}, \eta_2 = \eta_{21}, \ldots\}$, то вероятность $\pi_S(\eta_{11}, \eta_{21}, \ldots)$ *отвергнуть* гипотезу H, когда верна гипотеза H_1, называется **мощностью критерия, определенного на S, по отношению к гипотезе** H_1 (см. также рис. 19.6-1, *a*). График вероятности $1-\beta$ правильного отбрасывания гипотезы H в зависимости от вероятности α ложного отбрасывания ее называется **оперативной характеристикой** критерия (рис. 19.6-1, *b*; см. также п. 19.6-3).

19.6-3. Уровень значимости. Правило Неймана — Пирсона отбора критериев для простых гипотез.

(а) Желательно применять такую критическую область S, чтобы вероятность $\pi_S(\eta_1, \eta_2, \ldots)$ была мала, если проверяемая гипотеза верна, и велика

в противном случае. Пусть критическая область S применяется для проверки *простой* гипотезы $H_0 \equiv \{\eta_1 = \eta_{10}, \eta_2 = \eta_{20}, \ldots\}$ («нулевая гипотеза»), и пусть эта гипотеза *верна*. Тогда вероятность напрасно отвергнуть гипотезу H_0

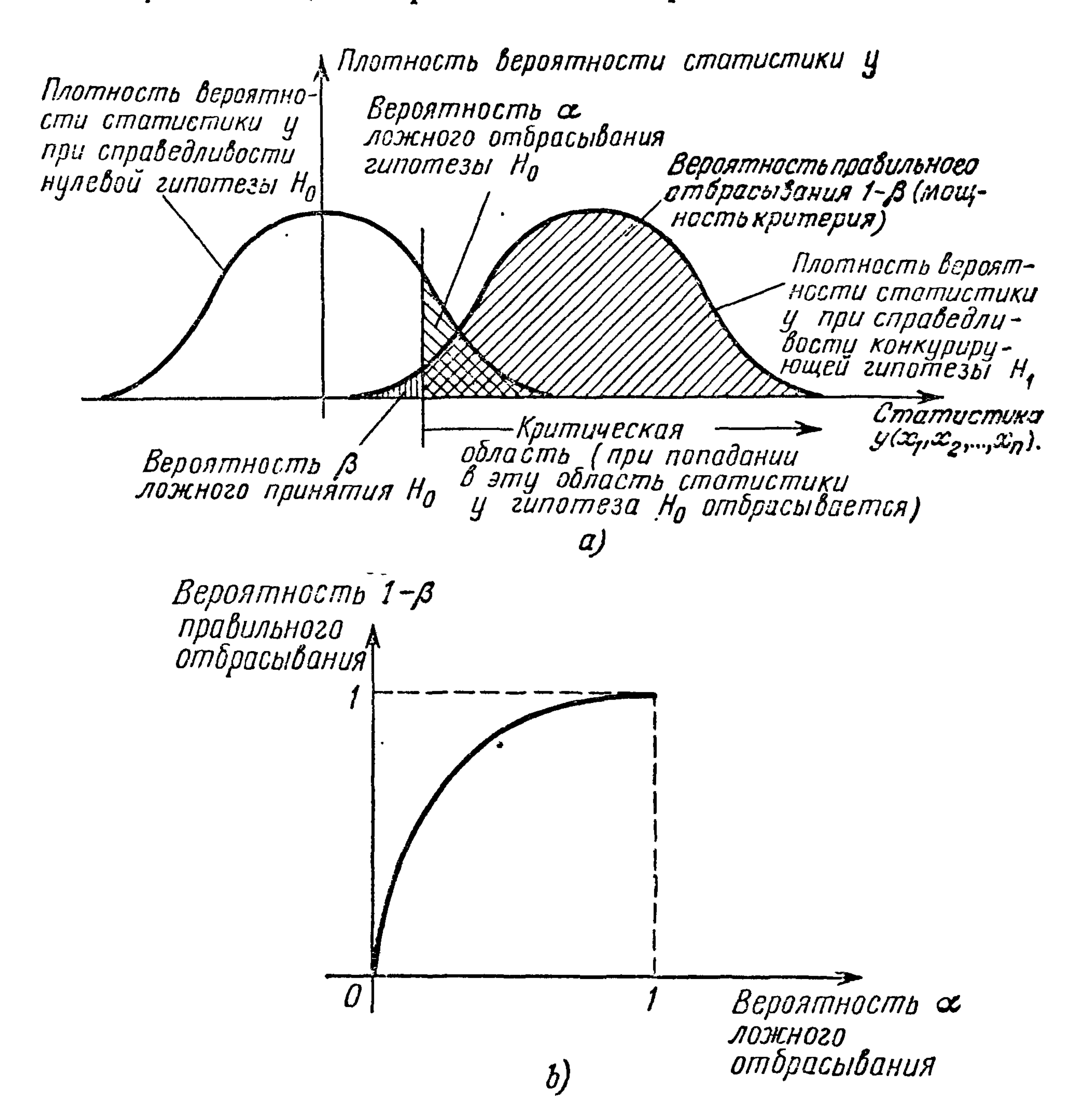


Рис. 19.6-1. *a*) Проверка нулевой гипотезы H_0 по сравнению с простой конкурирующей гипотезой H_1 с помощью статистики $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. *b*) Оперативная характеристика критерия.

(ошибки первого рода) есть $\pi_S(\eta_{10}, \eta_{20}, \ldots) = \alpha$; α называется **уровнем значимости данного критерия**: критическая область S проверяет простую гипотезу *на уровне значимости* α.

В случае *дискретных* случайных величин $x_1, x_2, \ldots x_n$ нельзя задавать α произвольным образом, можно лишь указать верхнюю границу для α. Критическая область, применяемая для проверки *сложной* гипотезы $H \equiv \{(\eta_1, \eta_2, \ldots) \in D\}$, будет давать, вообще говоря, различные уровни значимости для различных простых гипотез (комбинаций параметров $\eta_1, \eta_2, \ldots$), допускаемых гипотезой H; можно указать точную верхнюю грань этих уровней значимости.

(b) Для каждой выборки объема n и данного уровня значимости α:

1. **Наиболее мощный критерий** для простой гипотезы $H_0 \equiv \{\eta_1 = \eta_{10}, \eta_2 = \eta_{20}, \ldots\}$ относительно простой альтернативной гипотезы $H_1 \equiv \{\eta_1 = \eta_{11}, \eta_2 = \eta_{21}, \ldots\}$ определяется такой критической областью S, которая дает наибольшее значение вероятности $\pi_S(\eta_{11}, \eta_{21}, \ldots)$.

2. **Равномерно наиболее мощный критерий** есть наиболее мощный критерий относительно *всех* допустимых альтернативных гипотез; такой критерий не всегда существует.

3. Критерий называется **несмещенным**, если $\pi_S(\eta_{11}, \eta_{21}, \ldots) \geqslant \alpha$ для каждой простой альтернативной гипотезы H_1; в противном случае критерий будет **смещенным. Наиболее мощный несмещенный критерий** относительно данной альтернативной гипотезы H_1 и **равномерно наиболее мощный несмещенный критерий** выделяются из *несмещенных* критериев, как указано выше.

Критическая область S для *наиболее мощного* критерия строится так, чтобы для всех выборочных точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ отношение правдоподобия

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_{10}, \eta_{20}, \ldots)/\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_{11}, \eta_{21}, \ldots)$$

или

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_{10}, \eta_{20}, \ldots)/p(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_{11}, \eta_{21}, \ldots)$$

было меньше некоторого постоянного C; различные значения C будут давать «лучшие» критические области при различных уровнях значимости α. *Равномерно наиболее мощный критерий* представляет особый интерес при проверке гипотезы H_0 по отношению к сложной альтернативной гипотезе. На практике в отборе критерия решающим фактором может оказаться легкость вычисления. Обычно можно увеличить мощность каждого критерия путем увеличения объема выборки n (см. также п. 19.6-9).

19.6-4. Критерии значимости. Пусть проверяемое свойство генеральной совокупности сводится к множеству значений параметров $\eta_1 = \eta_{10}$, $\eta_2 = \eta_{20}, \ldots$, которые сравниваются с выборочными оценками этих параметров. В качестве основы критерия пробуют построить такую статистику

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_{10}, \eta_{20}, \ldots) \equiv g(y_1, y_2, \ldots; \eta_{10}, \eta_{20}, \ldots), \qquad (19.6\text{-}2)$$

значения которой измеряют отклонения или отношения сравниваемых параметров генеральной совокупности и выборки. При этом простая гипотеза $H_0 \equiv \{\eta_1 = \eta_{10}, \eta_2 = \eta_{20}, \ldots\}$ отвергается с данным уровнем значимости α («отклонение» *значимо*), если выборочное значение y попадает *вне* допустимого интервала $\{y_{P_1} \leqslant y \leqslant y_{P_2}\}$, для которого

$$\mathrm{P}\{y_{P_1} \leqslant y \leqslant y_{P_2}\} = P_2 - P_1 = 1 - \alpha. \qquad (19.6\text{-}3)$$

Таким способом определенные критерии часто называются **критериями значимости.** *Формула* (3) *определяет* $y_{P_1} = y_{P_1}(\eta_{10}, \eta_{20}, \ldots)$ *и* $y_{P_2} = y_{P_2}(\eta_{10}, \eta_{20}, \ldots)$ *как квантили выборочного распределения статистики* $y(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_{10}, \eta_{20}, \ldots)$. Часто оказывается возможным выбрать статистику y так, чтобы ее квантили y_P были независимы от $\eta_{10}, \eta_{20}, \ldots$ Важные примеры приведены в табл. 19.6-1 и в пп. 19.6-6 и 19.6-7.

В приложениях к контролю качества границы y_{P_1} и y_{P_2}, определенные формулой (3), называются **границами допуска** при данном уровне значимости α, а интервал (y_{P_1}, y_{P_2}) называется **интервалом допуска** (см. также рис. 19.6-2).

19.6-5. Доверительная область.

(а) Пусть построено семейство критических областей $S_\alpha(\eta_1, \eta_2, \ldots,)$ для проверки множества простых гипотез (допустимых комбинаций параметров $\eta_1, \eta_2, \ldots$) при некотором заданном уровне значимости α [1]). Тогда для любой фиксированной выборки $(x_1 = X_1, \ldots, x_n = X_n)$ множество $D_\alpha(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ комбинаций параметров $(\eta_1, \eta_2, \ldots)$ («точек» в пространстве параметров), согласуемых с данной выборкой, есть **доверительная область уровня** α; $1-\alpha$ называется **доверительной вероятностью**. Доверительная область содержит все допустимые комбинации параметров, принятие которых на основе

[1]) В случае дискретного распределения критические области $S_\alpha(\eta_1, \eta_2, \ldots)$ определяются для уровня значимости, *не превосходящего* α.

Таблица 19.6-1

Некоторые критерии значимости, относящиеся к параметрам ξ, σ^2 нормальной совокупности

(см. также пп. 19.5-3,а и 19.6-4). Выборки предполагаются случайными. Квантили находятся по таблицам. При большом объеме выборки применимы аппроксимации квантилей, данные в табл. 19.5-1 и 19.5-2 [1])

№	Проверяемая гипотеза	Статистика $y = y(x_1, \ldots, x_n)$, на основе которой построен критерий	Критическая область S отбрасывания гипотезы при данном уровне значимости α ($\leqslant \alpha$ для сложных гипотез)	Мощность $\pi_S(\xi, \sigma)$	Примечания
1	$\xi = \xi_0$ (σ известно)	$\dfrac{\bar{x} - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\lvert y\rvert > \lvert u\rvert_{1-\alpha} = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\Phi_u\left(u_{\alpha/2} - \dfrac{\xi - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) + \Phi_u\left(u_{\alpha/2} + \dfrac{\xi - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$	Простая гипотеза. Наиболее мощный *несмещенный* критерий; равномерно наиболее мощный критерий не существует
2	$\xi \leqslant \xi_0$ (σ известно)		$y > u_{1-\alpha}$	$\Phi_u\left(u_\alpha + \dfrac{\lvert \xi - \xi_0\rvert}{\sigma\sqrt{n}}\right)$	Сложные гипотезы. Если допустимые гипотезы ограничены условием $\xi \geqslant \xi_0$ для критерия 2 или $\xi \leqslant \xi_0$ для критерия 3, то любой из этих критериев будет равномерно наиболее мощным для простой гипотезы $\xi = \xi_0$
3	$\xi \geqslant \xi_0$ (σ известно)		$y < u_\alpha = -u_{1-\alpha}$		
4	$\xi = \xi_0$	$\dfrac{\bar{x} - \xi_0}{S/\sqrt{n}}$	$\lvert y\rvert > \lvert t\rvert_{1-\alpha} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ [1]) ($m = n-1$)	Применяется формула (19.6-1)	Простая гипотеза; «двусторонний t-критерий». См. примечание к критерию 1
5	$\xi \leqslant \xi_0$		$y > t_{1-\alpha}$ ($m = n-1$)		Сложные гипотезы; «односторонний t-критерий». См. примечание к критериям 2 и 3
6	$\xi \geqslant \xi_0$		$y < t_\alpha = -t_{1-\alpha}$ ($m = n-1$)		
7	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$	$y < \chi^2_{\alpha/2}$ [2]) ($m = n-1$) $y > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\mathrm{P}\left\{\chi^2 < \dfrac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_{\alpha/2}\right\} + \mathrm{P}\left\{\chi^2 > \dfrac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$	Простая гипотеза; не существует равномерно наиболее мощный критерий
8	$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$		$y > \chi^2_{1-\alpha}$ ($m = n-1$)	$\mathrm{P}\left\{\chi^2 > \dfrac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_{1-\alpha}\right\}$	Сложные гипотезы; если допустимые гипотезы ограничены условием $\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$ для критерия 8 или $\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$ для критерия 9, то любой из этих критериев будет равномерно наиболее мощным для простой гипотезы $\sigma^2 = \sigma_0^2$
9	$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$		$y < \chi^2_\alpha$ ($m = n-1$)	$\mathrm{P}\left\{\chi_2 < \dfrac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_\alpha\right\}$	

[1]) Во многих таблицах $\lvert t\rvert_{1-\alpha}$ обозначено через t_α.

[2]) Заметим, что в таблицах чаще даются $\chi^2_{1-\alpha}$, чем χ^2_α; в каждом случае следует внимательно проверять указания к таблицам.

Таблица 19.6-2

Доверительные границы для нормальной совокупности

При больших n применима аппроксимация, данная в табл. 19.5-1 — 19.5-3

№	Параметр η_1	Доверительный интервал $\{\gamma_1 \leqslant \eta_1 \leqslant \gamma_2\}$, Доверительная вероятность $1-\alpha = P_2 - P_1$
1	ξ (σ^2 известно)	$\bar{x} - u_{P_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \xi \leqslant \bar{x} - u_{P_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
2	ξ (σ^2 неизвестно)	$\bar{x} - t_{P_2}\frac{S}{\sqrt{n}} \leqslant \xi \leqslant \bar{x} - t_{P_1}\frac{S}{\sqrt{n}}$
3	σ^2	$S^2\frac{n-1}{\chi^2_{P_2}} \leqslant \sigma^2 \leqslant S^2\frac{n-1}{\chi^2_{P_1}}$

данной выборки имеет вероятность $\mathrm{P}\{(X_1, X_2, \ldots, X_n) \overline{\in} S_\alpha(\eta_1, \eta_2, \ldots)\} \geqslant 1-\alpha$.

(b) Доверительные интервалы, построенные по критериям значимости (см. также п. 19.6-4 и табл. 19.6-2). Чтобы найти доверительные области, связывающие значения одного из неизвестных параметров, скажем, η_1, с данным выборочным значением $Y = y(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ подходящей статистики y, обратимся к рис. 19.6-2. Начертим нижнюю и верхнюю границы допуска $y_{P_1}(\eta_1)$ и $y_{P_2}(\eta_1)$ в зависимости от η_1 для данного уровня значимости α. Пересечение этих граничных кривых с каждой прямой $y = Y$ определяет нижнюю и верхнюю границы $\gamma_1 = \gamma_1(Y)$, $\gamma_2 = \gamma_2(Y)$ **доверительного интервала** $D_\alpha \equiv (\gamma_1, \gamma_2)$ **уровня** α. Доверительный интервал содержит такие значения параметра η_1, принятие которых на основе выборочного значения $y = Y$ имеет вероятность $\mathrm{P}\{y_{P_1}(\eta_1) \leqslant Y \leqslant y_{P_2}(\eta_1)\} \geqslant 1-\alpha$.

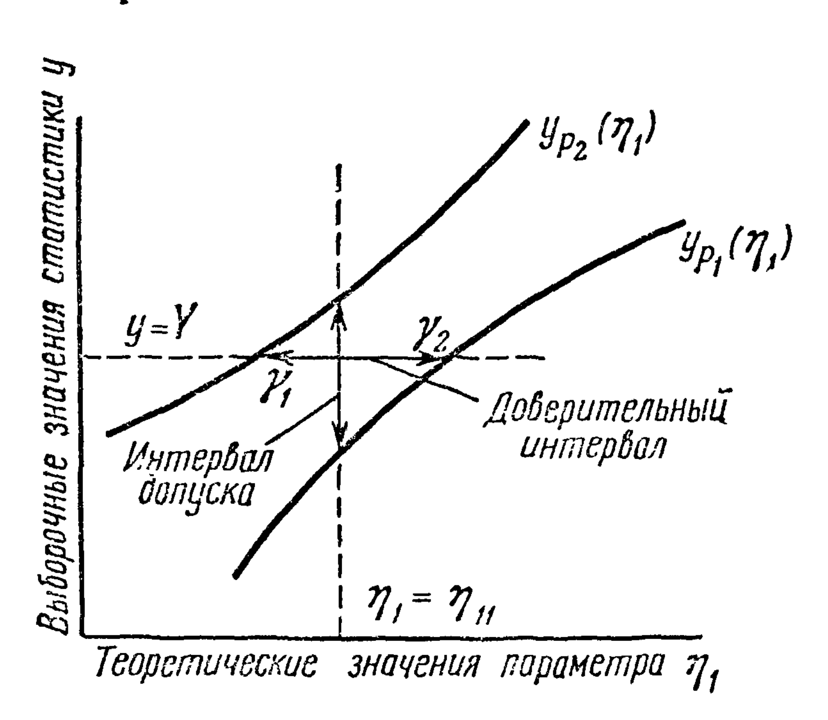


Рис. 19.6-2. Построение доверительных интервалов.

19.6-6. Критерии сравнения нормальных совокупностей. Дисперсионный анализ.

(a) Статистики объединенных выборок. Рассмотрим r взаимно независимых случайных выборок $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i})$ из r генеральных совокупностей с центрами ξ_i и дисперсиями σ_i^2 $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Пусть i-я выборка объема n_i имеет центр и дисперсию

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} x_{ik}, \quad S_i^2 = \frac{n_i}{n_i - 1}s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{k=1}^{n_i}(x_{ik} - \bar{x}_i)^2$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r). \qquad (19.6\text{-}4)$$

Эти r выборок можно рассматривать как «объединенную» выборку, объем которой, центр и дисперсия даются формулами

$$n=\sum_{i=1}^{r} n_i, \quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i} x_{ik}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i\bar{x}_i, \tag{19.6-5}$$

$$\left.\begin{aligned} S^2&=\frac{n}{n-1}s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}(x_{ik}-\bar{x})^2=\\ &=\frac{1}{n-1}\left[(n-r)S_0^2+(r-1)S_A^2\right],\\ &\text{где}\\ S_0^2&=\frac{1}{n-r}\sum_{i=1}^{r}(n_i-1)S_i^2, \quad S_A^2=\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2. \end{aligned}\right\} \tag{19.6-6}$$

Статистики S_0^2 (суммарная дисперсия) и S_A^2 измеряют рассеяние *внутри выборок* и *между выборками* соответственно.

(b) Сравнение нормальных совокупностей (см. также табл 19.5-1 — 19.5-3) Если имеется r независимых выборок из *нормальных* совокупностей с центрами ξ_i и одинаковыми дисперсиями $\sigma_i^2=\sigma^2$, то S^2, S_0^2 и S_A^2 являются состоятельными несмещенными оценками для дисперсии генеральной совокупности σ^2 (как правило, неизвестной). Случайные величины $(n-r)\frac{S_0^2}{\sigma^2}$ и $(r-1)\frac{S_A^2}{\sigma^2}$ независимы и имеют χ^2-распределения со степенями свободы $n-r$ и $r-1$ соответственно.

Отметим выборочные распределения следующих статистик:

1. $\dfrac{(\bar{x}_i-\bar{x}_k)-(\xi_i-\xi_k)}{\sigma}\sqrt{\dfrac{n_in_k}{n_i+n_k}}$ имеет *стандартизованное нормальное распределение*

2. $\dfrac{(\bar{x}_i-\bar{x}_k)-(\xi_i-\xi_k)}{S_0}\sqrt{\dfrac{n_in_k}{n_i+n_k}}$ имеет *t-распределение с* n_i+n_k-2 *степенями свободы.*

3. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{S_i^2}{S_k^2} \text{ имеет } v^2\text{-распределение,} \\ \ln\dfrac{S_i}{S_k} \text{ имеет } z\text{-распределение} \end{array}\right\} (m=n_i-1,\ m'=n_k-1).$

4. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{S_A^2}{S_0^2} \text{ имеет } v^2\text{-распределение,} \\ \ln\dfrac{S_A}{S_0} \text{ имеет } z\text{-распределение} \end{array}\right\} (m=r-1,\ m'=n-r).$

Таблица 19.6-3 показывает применение этих статистик в критериях сравнения нормальных совокупностей. Доверительные границы для разности $\xi_i-\xi_k$ можно вычислить из t-распределения. Случай нормальных распределений с различными дисперсиями рассмотрен в [18.9].

(c) Дисперсионный анализ. В третьем критерии табл. 19.6-3 средние значения ξ_i сравниваются путем разбиения общей дисперсии S^2 на

составляющие S_0^2 и S_A^2, обусловленные соответственно *статистической флуктуацией внутри выборок* и *различием между выборками*. Этот метод известен как **дисперсионный анализ**; рассматриваемый здесь частный случай относится

Таблица 19.6-3

Критерии значимости для сравнения нормальных совокупностей
(см. также табл. 19.5-2 и 19.5-3)

№	Проверяемая гипотеза	Критическая область, в которой гипотеза отвергается при уровне значимости $\leqslant \alpha$	
1a	$\sigma_i^2 = \sigma_k^2$	$\left\| \ln \frac{S_i}{S_k} \right\| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$,	$(m = n_i - 1,\ m' = n_k - 1)$ (*критерий Фишера*)
1b	$\sigma_i^2 \leqslant \sigma_k^2$	$\ln \frac{S_i}{S_k} > z_{1-\alpha}$ или $\frac{S_i^2}{S_k^2} > v_{1-\alpha}^2$	
2a	$\xi_i = \xi_k$ (дано $\sigma_i^2 = \sigma_k^2$)	$\left\| \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_k}{S_0} \sqrt{\frac{n_i n_k}{n_i + n_k}} \right\| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$,	$(m = n_i + n_k - 2)$ (*t*-критерий; отметим специальный случай $n_i = 1$)
2b	$\xi_i \leqslant \xi_k$ (дано $\sigma_i^2 = \sigma_k^2$)	$\frac{\bar{x}_i - \bar{x}_k}{S_0} \sqrt{\frac{n_i n_k}{n_i + n_k}} > t_{1-\alpha}$	
3	$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_r$ (дано $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_r^2$)	$\left\| \ln \frac{S_A}{S_0} \right\| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$(m = r - 1,\ m' = n - r)$ (*критерий Фишера*)

к *группировке по одному признаку*, соответствующему значению индекса i. Подобные критерии применяются в исследованиях эффекта различных методов лечения, обработки почвы и т. п. [18.6], [18.9].

Дисперсионный анализ для группировки по двум признакам (случайные блоки). Рассмотрим rq выборочных значений x_{ik}, расположенных в таблицу

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rq} \end{matrix}$$

и введем средние по строкам $\bar{x}_{i\cdot}$, средние по столбцам $\bar{x}_{\cdot k}$ и общее среднее $\bar{x}$ с помощью формул

$$\bar{x}_{i\cdot} = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} x_{ik}, \quad \bar{x}_{\cdot k} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} x_{ik}, \quad \bar{x} = \frac{1}{rq} \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{q} x_{ik}. \qquad (19.6\text{-}7)$$

Общая дисперсия разбивается следующим образом;

$$\left.\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{rq-1}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{q}(x_{ik}-\bar{x})^2 = \\
&= \frac{1}{rq-1}\left[(r-1)(q-1)S_0^2+(r-1)qS_{\text{I}}^2+r(q-1)S_{\text{II}}^2\right],\\
S_0^2 &= \frac{1}{(r-1)(q-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{q}\left(x_{ik}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot k}+\bar{x}\right)^2 \text{ (дисперсия, обусловленная флуктуацией внутри строк и столбцов)},\\
S_{\text{I}}^2 &= \frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})^2 \text{ (дисперсия между строками)},\\
S_{\text{II}}^2 &= \frac{1}{q-1}\sum_{k=1}^{q}(\bar{x}_{\cdot k}-\bar{x})^2 \text{ (дисперсия между столбцами)}.
\end{aligned}\right\} \quad (19.6\text{-}8)$$

Если случайные величины x_{ik} распределены нормально с одинаковыми дисперсиями, то случайные величины S_0^2, S_{I}^2 и S_{II}^2 взаимно независимы и имеют χ^2-распределения со степенями свободы $(r-1)(q-1)$, $r-1$ и $q-1$ соответственно. Статистика S_{I}^2/S_0^2 имеет v^2-распределение с $m=r-1$, $m'=(r-1)(q-1)$ и служит для проверки равенства средних по строкам $\mathsf{M}x_{i\cdot}=\xi_{i\cdot}$ тем же способом, что и в табл. 19.6-3. Аналогично S_{II}^2/S_0^2 имеет v^2-распределение с $m=q-1$, $m'=(r-1)(q-1)$ и служит для проверки равенства средних по столбцам $\mathsf{M}x_{\cdot k}=\xi_{\cdot k}$.

19.6-7. Критерий согласия χ^2 (см. также табл. 19.5-1).

(a) Критерий χ^2 контролирует согласованность гипотетических вероятностей $p_k=\mathsf{P}\{E_k\}$ случайных событий $E_1, E_2, \ldots, E_r$ с их относительными частотами $h_k=h\{E_k\}=n_k/n$ в выборке из n независимых наблюдений. Во многих приложениях каждое событие E_k состоит в том, что некоторая случайная величина x попадает в определенный классовый интервал (п. 19.2-2), так что критерий χ^2 позволяет сравнивать гипотетическое теоретическое распределение величины x с ее эмпирическим распределением.

Согласие измеряется с помощью статистики

$$y=n\sum_{k=1}^{r}\frac{(h_k-p_k)^2}{p_k}=\sum_{k=1}^{r}\frac{(n_k-np_k)^2}{np_k}, \qquad (19.6\text{-}9)$$

распределение которой при $n\to\infty$ *стремится к распределению* χ^2 *с* $m=r-1$ *степенями свободы*. Если все $np_k>10$ (для этого при необходимости объединяют некоторые классовые интервалы), то критерий χ^2 *отвергает* гипотетические вероятности с уровнем значимости α при $y>\chi^2_{1-\alpha}(m)$. Если $m>30$, то вместо χ^2-распределения можно пользоваться нормальным распределением величины $\sqrt{2\chi^2}$ с центром $\sqrt{2m-1}$ и дисперсией 1.

(b) Критерий χ^2 с оцениваемыми параметрами. Если гипотетические вероятности p_k зависят от q неизвестных параметров $\eta_1, \eta_2, \ldots$ $\ldots, \eta_q$, то сначала находят совместные наиболее правдоподобные оценки этих параметров по данной выборке (п. 19.4-4) и подставляют полученные значения $p_k=p_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q)$ в формулу (9). *При достаточно общих условиях* (см. ниже) *статистика y сходится по вероятности к χ^2 с $m=r-q-1$ степенями свободы и критерий χ^2 применим с $m=r-q-1$.* Критерии этого типа проверяют применимость нормального распределения, распределения Пуассона и др. с параметрами, оцениваемыми по выборке.

Указанная сходимость имеет место, если функции $p_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q)$ в некоторой окрестности точки $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q)$ совместного максимума правдоподобия удовлетворяют следующим условиям:

1. $\sum_{k=1}^{r} p_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q) = 1.$

2. Вероятности $p_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q)$ имеют положительную нижнюю грань и дважды непрерывно дифференцируемы, а матрица $(\partial p_k/\partial \eta_j)$ имеет ранг q.

19.6-8. Непараметрическое сравнение двух совокупностей: критерий знаков. Проверяемая гипотеза состоит в том, что *две случайные величины x и y независимы и одинаково распределены*; последнее утверждение мы будем понимать в следующем смысле:

$$\mathrm{P}\{x-y>0\} = \mathrm{P}\{x-y<0\} = \frac{1}{2},$$

если известно, что $\mathrm{P}\{x=y\}=0$.

Рассмотрим случайную выборку n пар $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$; при вычислении объема выборки n пренебрежем парами, для которых $x_i = y_i$ (*совпадения*). Вероятность того, что более чем m разностей $x_i - y_i$ положительны, равна

$$p(m) = \frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{m+1} + \binom{n}{m+2} + \ldots + \binom{n}{n}\right].$$

Пусть теперь m_α есть наименьшее значение m, для которого $p(m) \leqslant \alpha$. *Односторонний критерий знаков* требует отвергнуть проверяемую гипотезу с уровнем значимости $\leqslant \alpha$, если число положительных разностей $x_i - y_i$ превосходит m_α. *Двусторонний критерий знаков* требует отвергнуть гипотезу с уровнем значимости 2α, если число положительных или число отрицательных разностей превосходит m_α; m_α табулировано в зависимости от α и n (см. [18.3], [18.5]). Критерий знаков может применяться также для проверки: 1) симметрии распределения вероятностей, 2) гипотезы о том, что значение $x = X$ является медианой распределения.

19.6-9. **Обобщения.** Критерии, основанные на фиксированной выборке (пп. 19.6-1 — 19.6-7), допускают только две возможности: отвергнуть или не отвергнуть проверяемую гипотезу на основании выборки. *Последовательные критерии* разрешают увеличение объема выборки (дополнительные наблюдения) в качестве третьего возможного решения; тогда можно уточнять оба уровня значимости и мощность критерия (относительно некоторой альтернативной гипотезы), пока проверяемая гипотеза не будет в конце концов принята или отвергнута.

Схемы критериев с фиксированной выборкой и последовательных критериев представляют собой частные случаи **решающих функций** или правил поведения, связанных с принятием гипотезы (решением) по каждой выборке некоторого наблюдаемого признака.

19.7. НЕКОТОРЫЕ СТАТИСТИКИ, ВЫБОРОЧНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И КРИТЕРИИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

19.7-1. Вводные замечания. Здесь даются лишь некоторые часто применяемые определения, формулы и критерии, не исчерпывающие исследования многомерных статистик. Отметим, что многомерные статистики служат для оценки и проверки стохастических связей между случайными величинами.

19.7-2. Статистики, получаемые на основе многомерных выборок.

(а) Пусть дана многомерная случайная величина $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ (п. 18.2-9); по аналогии с пп. 19.1-2, 19.2-2, 19.2-4 определим **случайную выборку объема** n:

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) \equiv (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{\nu 1}; x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{\nu 2}; \ldots; x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{\nu n})$$

и статистики: *выборочное среднее от* x_i

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \qquad (i=1, 2, \ldots, \nu), \tag{19.7-1}$$

выборочное среднее от $f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$

$$\overline{f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{\nu k}), \tag{19.7-2}$$

выборочные дисперсии (при $i=j$) *и ковариации* (при $i \neq j$)

$$l_{ij} = \overline{(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)} = l_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{19.7-3}$$

и выборочные коэффициенты корреляции

$$r_{ij} = \frac{l_{ij}}{\sqrt{l_{ii} l_{jj}}} = r_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{19.7-4}$$

Точка $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_\nu)$ есть **центр выборочного распределения**, матрица $L \equiv (l_{ij})$ — **матрица моментов выборки.**

(b) Для двумерной случайной выборки $(x_{11}, x_{21}; x_{12}, x_{22}; \ldots; x_{1n}, x_{2n})$ двумерной случайной величины (x_1, x_2) определяют **выборочные коэффициенты регрессии**

$$b_{21} = \frac{l_{12}}{l_{11}} = r_{12} \frac{s_2}{s_1}, \qquad b_{12} = \frac{l_{12}}{l_{22}} = r_{12} \frac{s_1}{s_2}. \tag{19.7-5}$$

Эмпирическая линейная средняя квадратическая регрессия x_2 **на** x_1

$$g_2(x_1) = \bar{x}_2 + b_{21}(x_1 - \bar{x}_1) \tag{19.7-6}$$

представляет линейную функцию $ax_1 + b$, которая минимизирует средний квадрат отклонения в выборке

$$\overline{[x_2 - (ax_1 + b)]^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} [x_{2k} - (ax_{1k} + b)]^2 \tag{19.7-7}$$

(см. также пп. 18.4-6, b и 19.7-4, c).

Для ν-мерных совокупностей *эмпирические сводный и частные коэффициенты корреляции и коэффициенты регрессии* получаются из выборочных моментов l_{ij} по формулам, аналогичным формулам (18.4-35) — (18.4-38), и служат для оценки соответствующих параметров генеральной совокупности. Полную теорию см. в [18.6] и [18.9].

(c) Статистики (1) — (4) могут быть аппроксимированы оценками по *группированным данным* по способу пп. 19.2-3 — 19.2-5. Оценки по группированным данным l_{ikG} центральных моментов второго порядка λ_{ik} можно улучшить поправками Шеппарда

$$l'_{ii} = l_{iiG} - \frac{1}{12}(\Delta X_i)^2; \qquad l'_{ik} = l_{ikG} \qquad (i \neq k),$$

где ΔX_i — длины классовых интервалов. Эти поправки часто сглаживают ошибки, возникающие от группировки, если ΔX_i не превосходит восьмой части размаха величины x_i. Практические схемы вычислений даны в [18.9].

19.7-3. Оценки параметров (см. также п. 19.4-1). Теорема п. 19.4-2, а применима к многомерным распределениям, и поэтому *статистики* (3) — (5), *так же как и выборочные средние* $\bar{x}_i$, *являются состоятельными оценками соответствующих параметров генеральной совокупности.* Среднее значение

и дисперсия каждого выборочного среднего $\bar{x}_i$ и выборочной дисперсии $l_{ii}=s_i^2$ даются формулами (19.2-8), (19.2-13) и (19.2-14); дополнительно отметим формулы

$$\mathsf{M}l_{ij}=\frac{n-1}{n}\lambda_{ij}=\lambda_{ij}+O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (19.7\text{-}8)$$

$$\mathsf{D}l_{ij}=\frac{1}{n}\left[\mathsf{M}(x_i-\xi_i)^2(x_j-\xi_j)^2-\lambda_{ij}^2\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (19.7\text{-}9)$$

$$\operatorname{cov}\{l_{ii},\ l_{ij}\}=\frac{1}{n}\left[\mathsf{M}(x_i-\xi_i)^2(x_j-\xi_j)^2-\lambda_{ii}\lambda_{jj}\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (19.7\text{-}10)$$

$$\operatorname{cov}\{l_{ii},\ l_{ij}\}=\frac{1}{n}\left[\mathsf{M}(x_i-\xi_i)^3(x_j-\xi_j)-\lambda_{ii}\lambda_{ij}\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (19.7\text{-}11)$$

$$\mathsf{M}r_{ij}=\rho_{ij}+O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (19.7\text{-}12)$$

$\mathsf{D}r_{ij}$ имеет порядок $1/n$ при возрастании n.

Для многомерных нормальных распределений (см. также п. 19.7-4)

$$\left.\begin{aligned}\mathsf{M}\det[l_{ij}]&=\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-\nu)}{n^{\nu}}\det[\lambda_{ij}],\\ \mathsf{D}\det[l_{ij}]&=\frac{\nu(2n+1-\nu)}{(n-\nu)(n-\nu+1)}\frac{(n-1)^2(n-2)^2\ldots(n-\nu)^2}{n^{2\nu}}\det{}^2[\lambda_{ij}],\end{aligned}\right\}\ (n>\nu\geqslant 2). \quad (19.7\text{-}13)$$

19.7-4. Выборочные распределения в случае нормальной совокупности (см. также пп. 18.8-6 и 18.8-8). Для случайной выборки из многомерной *нормальной* совокупности выборочные распределения и критерии, содержащие только выборочные средние $\bar{x}_i$ и выборочные дисперсии $l_{ii}=s_i^2$, получаются непосредственно из п. 19.5-3. Остается исследовать статистики, которые описывают *стохастические связи* между случайными величинами x_i, в частности, выборочный коэффициент корреляции и коэффициенты регрессии.

(а) Распределение выборочного коэффициента корреляции. Рассмотрим случайную выборку $(x_{11},\ x_{21};\ x_{12},\ x_{22};\ \ldots;\ x_{1n},\ x_{2n})$ из двумерной нормальной совокупности с плотностью распределения

$$\varphi(x_1,\ x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u_1^2-2\rho u_1u_2+u_2^2)\right\}, \quad (19.7\text{-}14)$$

где

$$u_1=\frac{x_1-\xi_1}{\sigma_1},\quad u_2=\frac{x_2-\xi_2}{\sigma_2}\quad (\sigma_1>0,\ \sigma_2>0,\ -1<\rho=\rho_{12}<1).$$

Плотность распределения выборочного коэффициента корреляции $r_{12}=r$ (п. 19.7-2) равна

$$\varphi_{r(n)}(r)=\frac{2^{n-3}}{\pi(n-3)!}(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma^2\left(\frac{n+k-1}{2}\right)\frac{(2\rho r)^k}{k!}=$$

$$=\frac{n-2}{\pi}(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\int_0^1\frac{\vartheta^{n-2}}{(1-\rho r\vartheta)^{n-1}}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}}\quad (-1<r<1) \quad (19.7\text{-}15)$$

и равна 0 при $|r|>1$; отметим формулы

$$\mathsf{M}r=\rho+O\left(\frac{1}{n}\right),\quad \mathsf{D}r=\frac{(1-\rho^2)^2}{n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \quad (19.7\text{-}16)$$

Заметим, что $\varphi_{r(n)}(r)$ не зависит от $\xi_1,\ \xi_2,\ \sigma_1,\ \sigma_2;\ n\geqslant 4$.

Полезно ввести новую случайную величину

$$y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}, \quad (19.7\text{-}17)$$

которая при $n > 10$ распределена приблизительно нормально с центром и дисперсией

$$\mathsf{M}y \approx \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-1)}, \qquad \mathsf{D}y \approx \frac{1}{n-3}. \qquad (19.7\text{-}18)$$

Поведение статистик r и y при различных значениях ρ и n представлено на рис. 19.7-1.

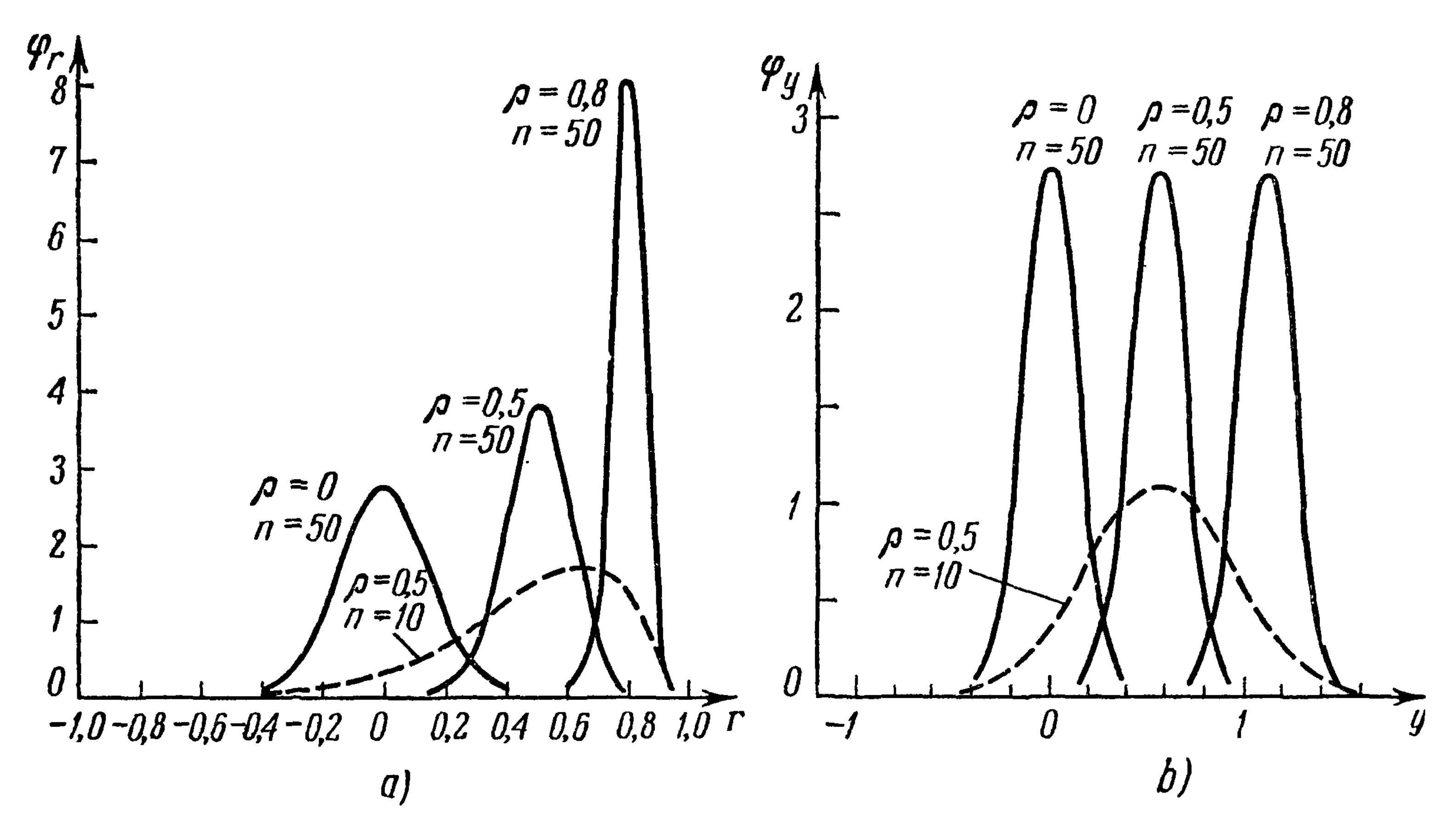


Рис. 19.7-1. Плотности распределения статистик r и y, применяемых для оценок коэффициента корреляции ρ двумерных нормальных распределений.

Если y и y' — значения статистики (17), вычисленные для двух независимых случайных выборок объемов n и n' из одной и той же нормальной совокупности, то $y - y'$ имеет приближенно нормальное распределение с центром 0 и дисперсией $\approx \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n'-3}$.

(b) r-распределение. Критерий некоррелированности величин. В важном частном случае $\rho = 0$ (гипотеза некоррелированности величин!) плотность распределения (15) сводится к

$$\varphi_{r(n)}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} \qquad (-1 < r < 1). \qquad (19.7\text{-}19)$$

В этом случае величина $t = \sqrt{n-2}\,\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$ *имеет* t*-распределение с* $n-2$ *степенями свободы* (табл. 19.5-2). *Статистика* $r\sqrt{n-1}$ *имеет* r**-распределение с** $n-2$ **степенями свободы.** r-распределение табулировано; оно асимптотически нормально со средним 0 и дисперсией 1 при $n \to \infty$. *Как* t*-распределение, так и* r*-распределение дают критерии для гипотезы* $\rho = 0$.

(c) Проверка гипотетического значения коэффициента регрессии (см. также п.19.7-2). Если дана случайная выборка из двумерной нормальной совокупности с плотностью (14), то *гипотетическое значение коэффициента регрессии* $\beta_{21} = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} = \rho_{12}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ (п. 18.4-6, b) *проверяют при помощи статистики*

$$t' = \frac{s_1\sqrt{n-2}}{s_2\sqrt{1-r_{12}^2}}\,(b_{21} - \beta_{21}), \qquad (19.7\text{-}20)$$

которая имеет t-распределение с $n-2$ степенями свободы. Этот критерий значительно более удобен, чем непосредственное применение распределения выборочного коэффициента регрессии b_{21} [18.9].

(d) ν-мерные выборки. Для случайной выборки из ν-мерной нормальной совокупности с плотностью распределения (18.8-26) совместное распределение выборочных средних $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_\nu$ является нормальным со средними значениями $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ и матрицей моментов Λ/n. *Совместное распределение величин $\bar{x}_i$ не зависит от совместного распределения $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ выборочных моментов l_{ij} (обобщенная теорема Фишера,* см. также п. 19.5-3, b).

19.7-5. Выборочная средняя квадратическая сопряженность признаков. Критерий независимости двух случайных величин, основанный на таблице сопряженности признаков (см. также п. 19.6-7).

(a) Пусть дана двумерная случайная выборка $(x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_n, y_n)$ случайных величин x, y. В **таблице сопряженности признаков** эти n выборочных пар размещены в r классовых x-интервалах и s классовых y-интервалах. Пусть

$n_{i\cdot}$ пар (x_k, y_k) попадают в i-й классовый x-интервал,

$n_{\cdot j}$ пар (x_k, y_k) попадают в j-й классовый y-интервал,

n_{ij} пар (x_k, y_k) попадают в i-й классовый x-интервал и j-й классовый y-интервал.

Выборочная средняя квадратическая сопряженность признаков есть статистика

$$f^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(\frac{n_{ij}}{n} - \frac{n_{i\cdot}}{n}\frac{n_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i\cdot}}{n}\frac{n_{\cdot j}}{n}} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{n_{ij}^2}{n_{i\cdot} n_{\cdot j}} - 1, \qquad (19.7\text{-}21)$$

которая измеряет зависимость между x и y. Величина f^2 заключена между 0 и $\min(r, s) - 1$ и достигает последнего значения тогда и только тогда, когда каждая строка (при $r \geqslant s$) или каждый столбец (при $r \leqslant s$) содержит только один элемент, отличный от нуля.

(b) *Если x и y независимы, то при $n \to \infty$ статистика nf^2 сходится по вероятности к χ^2 с $m = (r-1)(s-1)$ степенями свободы* (табл. 19.5-1). Если все $n_{ij} > 10$ (при необходимости некоторые классовые интервалы объединяются), то гипотеза о независимости отвергается с уровнем значимости α в критической области $nf^2 > \chi^2_{1-\alpha}(m)$ (п. 19.6-3).

(c) Особый интерес представляет частный случай $r = s = 2$ (таблица сопряженности признаков 2×2); в этом случае

$$f^2 = \frac{(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_{1\cdot}n_{2\cdot}n_{\cdot 1}n_{\cdot 2}} \qquad (19.7\text{-}22)$$

(см. также [18.6]).

19.7-6. Порядковая корреляция по Спирмену. Непараметрический критерий независимости. Пусть относительно случайной выборки n пар $(x_1, y_1; \ldots, x_n, y_n)$ известно только, что x_k в порядке убывания величины занимает A_k-е место, а y_k в порядке убывания величины занимает B_k-е место $(k = 1, 2, \ldots, n)$. *Если величины x и y независимы, то при $n \to \infty$ статистика (коэффициент порядковой корреляции)*

$$R = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_{k=1}^{n} (A_k - B_k)^2 \qquad (19.7\text{-}23)$$

распределена асимптотически нормально с центром 0 *и дисперсией* $1/(n-1)$. Для любого значения $n > 1$ гипотеза о независимости отвергается с уровнем значимости $\leqslant \alpha$ (п. 19.6-3), если

$$R > \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{n-1}} \quad \text{(односторонний критерий)} \qquad (19.7\text{-}24)$$

или

$$|R| > \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-1}} \quad \text{(двусторонний критерий).} \qquad (19.7\text{-}25)$$

Примечание. Если двумерное распределение (x, y) *нормально*, то $2 \sin \frac{\pi R}{6}$ есть состоятельная оценка для коэффициента корреляции ρ_{xy}.

19.8. СТАТИСТИКИ И ИЗМЕРЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

19.8-1. Средние по конечному промежутку времени. Пусть

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv f[x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n); y(t_1), y(t_2), \ldots, y(t_n); \ldots] \quad (19.8\text{-}1)$$

есть функция от выборочных значений $x(t_i)$, $y(t_i)$, ... одномерного или многомерного случайного процесса $x(t)$, $y(t)$, ... (п. 18.9-1). **Средние по конечному промежутку времени** вычисляются либо через выборочные значения, либо путем непрерывного усреднения по конечному промежутку времени с помощью формул

$$[f]_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(t_1+k\Delta t, t_2+k\Delta t, \ldots, t_n+k\Delta t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k\Delta t), \quad (19.8\text{-}2)$$

$$\langle f \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T f(t_1+\lambda, t_2+\lambda, \ldots, t_n+\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{T} \int_0^T (\lambda)\, d\lambda. \quad (19.8\text{-}3)$$

Эти средние $[f]_n$ и $\langle f \rangle_T$ представляют собой случайные величины, распределение которых определяется данными случайными процессами.

Если случайный процесс $x(t)$ *стационарен*, то

$$\mathsf{M}[f]_n = \mathsf{M}\langle f \rangle_T = \mathsf{M}f, \quad (19.8\text{-}4)$$

т. е. средние по конечному промежутку времени $[f]_n$ и $\langle f \rangle_T$ являются *несмещенными оценками* центра распределения $\mathsf{M}f$.

Дисперсия оценки $[f]_n$ равна

$$\mathsf{D}[f]_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cov}[f(i\Delta t), f(k\Delta t)] =$$

$$= \frac{1}{n} \mathsf{D}f + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \operatorname{cov}[f(0), f(k\Delta t)]. \quad (19.8\text{-}5)$$

Среднее (3), если оно существует, может быть получено предельным переходом из среднего (2) при $\Delta t \to 0$, $n = \frac{T}{\Delta t} \to \infty$, $k\Delta t = \lambda$. Такой предельный переход приводит к дисперсии оценки $\langle f \rangle_T$:

$$\mathsf{D}\langle f \rangle_T = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\lambda}{T}\right) \operatorname{cov}[f(0), f(\lambda)]\, d\lambda. \quad (19.8\text{-}6)$$

В зависимости от характера *корреляционной функции*

$$\mathrm{K}_{ff}(\lambda) = \operatorname{cov}[f(0), f(\lambda)] = \mathsf{M}[f(0) - \mathsf{M}f][f(\lambda) - \mathsf{M}f] =$$

$$= \mathsf{M}f(0)f(\lambda) - (\mathsf{M}f)^2 = \mathrm{R}_{ff}(\lambda) - (\mathsf{M}f)^2 \quad (19.8\text{-}7)$$

дисперсии (5) или (6) могут убывать или не убывать при возрастании объема выборки n или промежутка времени интегрирования T.

19.8-2. Усредняющие фильтры. Усреднение по времени часто осуществляется низкочастотным фильтром четырехполюсника или электромеханическим измерительным прибором с инерцией и затуханием. Рассмотрим, в частности, фильтр, инвариантный относительно сдвига времени, со стационарным входным сигналом $f(t) = f(t_1+t, t_2+t, \ldots, t_n+t)$, ограниченной функцией влияния $h(\xi)$ и частотной характеристикой $H(i\omega)$ (п. 9.4-7). Если входной сигнал действует от $t=0$ до $t=T$ (время усреднения), то выходной сигнал фильтра будет

$$z(T) = \int_{-\infty}^{T} h_T(T-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = \int_{0}^{\infty} h_T(\zeta) f(T-\zeta)\, d\zeta, \tag{19.8-8}$$

где

$$h_T(\zeta) = \begin{cases} h(\zeta) & (0 \leqslant \zeta < T), \\ 0 & \zeta \notin (0, T). \end{cases} \tag{19.8-9}$$

Таким образом,

$$\mathsf{M}\, z(T) = \mathsf{M} f \int_0^T h(\zeta)\, d\zeta = a(T)\, \mathsf{M} f, \tag{19.8-10}$$

так что $z(T)/a(T)$ есть несмещенная оценка для $\mathsf{M}f$.

Дисперсия этой оценки находится из соотношения

$$\mathsf{D}\, z(T) = \mathsf{M}\,[z(T) - \mathsf{M}\, z(T)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{h_T h_T}(\lambda)\,[\mathrm{R}_{ff}(\lambda) - (\mathsf{M} f)^2]\, d\lambda, \tag{19.8-11}$$

где (см. также п. 18.12-3)

$$\varphi_{h_T h_T}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h_T(\zeta)\, h_T(\zeta+\lambda)\, d\zeta. \tag{19.8-12}$$

При $T \to \infty$ дисперсия $\mathsf{D}\, z(T)$ не стремится, вообще говоря, к нулю, а обычно приближается к стационарной дисперсии выходного сигнала:

$$\mathsf{D}\, z(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{hh}(\lambda)\,[\mathrm{R}_{ff}(\lambda) - (\mathsf{M} f)^2]\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(i\omega)|^2\, \Phi(\omega)\, d\omega \approx$$

$$\approx 2\,|H(0)|^2\, \Phi(0)\, B_{EQ}, \tag{19.8-13}$$

где $\Phi(\omega)$ — спектральная плотность (п. 18.10-3) функции $f(t) - \mathsf{M}f$, B_{EQ} — ширина спектра эквивалентного «равномерного» низкочастотного фильтра с частотной характеристикой

$$H_{EQ}(i\omega) = \begin{cases} H(0) & \text{при } |\omega| \leqslant 2\pi B_{EQ}, \\ 0 & \text{при } |\omega| > 2\pi B_{EQ}. \end{cases}$$

B_{EQ} есть мера приведенного рассеяния усредняющего фильтра. Табл. 19.8-1 дает $H(i\omega)$ и B_{EQ} для некоторых фильтров (с плоским спектром на входе).

Таблица 19.8-1

Усредняющие фильтры

	$H(i\omega)$	B_{EQ}
Фильтр первого порядка	$1/(i\omega T_0 + 1)$	$1/(4T_0)$
Фильтры второго порядка		
с сильным затуханием	$1/[(i\omega T_1 + 1)(i\omega T_2 + 1)]$	$1/[4(T_1 + T_2)]$
с критическим затуханием	$1/(i\omega T_0 + 1)^2$	$1/(2T_0)$
со слабым затуханием	$\dfrac{\alpha^2 + \omega_1^2}{(i\omega + \alpha)^2 + \omega_1^2}$	$\dfrac{\alpha^2 + \omega_1^2}{2\omega_1}$

19.8-3. Примеры.

(а) Измерение среднего значения. При измерении математического ожидания $\mathsf{M}\,x = \xi$ некоторого стационарного случайного напряжения $x(t)$ с

$$R_{xx}(\tau) = a^2 e^{-\alpha|\tau|} + \xi^2, \quad \Phi_{xx}(\omega) = \frac{2\alpha a^2}{\omega^2 + \alpha^2} + 2\pi\xi^2\delta(\omega) \tag{19.8-14}$$

(белый шум, проходящий через простой фильтр с шириной спектра $\alpha/(2\pi)$ *герц*, или случайная телеграфная волна со средней скоростью отсчетов $\alpha/2$, п. 18.11-5) дисперсия оценки $\langle x\rangle_T$ равна

$$\mathsf{D}\,\langle x\rangle_T = \frac{2a^2}{T}\int\limits_0^T \left(1 - \frac{\lambda}{T}\right) e^{-\alpha\lambda}\,d\lambda = \frac{2a^2}{(\alpha T)^2}\left(\alpha T - 1 + e^{-\alpha T}\right) \leqslant \frac{2a^2}{(\alpha T)} \tag{19.8-15}$$

и для усредняющего фильтра первого порядка из табл. 19.8-1 с $T \gg T_0$ (практически $T > 4T_0$)

$$\mathsf{D}\,z(T) \approx \mathsf{D}\,z(\infty) = \frac{a^2\alpha}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{[(\omega T_0)^2 + 1]\,(\omega^2 + \alpha^2)} = \frac{a^2}{\alpha T_0 + 1} < \frac{a^2}{\alpha T_0}. \tag{19.8-16}$$

(b) Измерение среднего квадрата. При измерении среднего квадрата $\mathsf{M}f = \mathsf{M}x^2$ для *гауссовского* шума $x(t)$, удовлетворяющего условиям (14),

$$\left.\begin{aligned} R_{ff}(\tau) &= 2a^4 e^{-2\alpha|\tau|} + (a^2 + \xi^2)^2, \\ \Phi_{ff}(\omega) &= \frac{8\alpha a^2}{\omega^2 + (2\alpha)^2} + 2\pi(a^2 + \xi^2)\delta(\omega), \end{aligned}\right\} \tag{19.8-17}$$

$$\mathsf{D}\,\langle x^2\rangle_T = \frac{a^4}{(\alpha T)^2}\,(2\alpha T - 1 + e^{-2\alpha T}) \leqslant \frac{2a^4}{\alpha T} \tag{19.8-18}$$

и для усредняющего фильтра первого порядка с $T \gg T_0$ и $f \equiv x^2$

$$\mathsf{D}\,z(T) \approx \mathsf{D}\,z(\infty) = \frac{2a^4}{2\alpha T_0 + 1} \leqslant \frac{a^4}{\alpha T_0}. \tag{19.8-19}$$

(с) Измерение корреляционных функций (см. также п. 18.9-3). Дисперсия оценки корреляционных функций для совместно стационарных процессов $x(t)$, $y(t)$ дается соотношениями (5), (6) и (11) при $f(t) \equiv x(t)\,y(t+\tau)$. К сожалению, эта дисперсия зависит от момента четвертого порядка

$$\mathsf{M}\,[f(0)\,f(\lambda)] = \mathsf{M}\,[x(t)\,x(t+\lambda)\,y(t+\tau)\,y(t+\tau+\lambda)], \tag{19.8-20}$$

который редко бывает известен. В частном случае совместно гауссовских и стационарных сигналов $x(t)$, $y(t)$ с нулевыми средними значениями

$$\mathsf{M}\,[f(0)\,f(\lambda)] = R_{xx}(\lambda)\,R_{yy}(\lambda) + R^2_{xy}(\tau) + R_{xy}(\tau+\lambda)\,R_{xy}(\tau-\lambda), \tag{19.8-21}$$

но даже это выражение содержит неизвестную корреляционную функцию $R_{xy}(\tau)$ и, следовательно, бывает полезным только в простых случаях.

Для стационарного гауссовского процесса $x(t)$

$$\mathsf{D}\,\langle x(t)\,x(t+\tau)\rangle_T \leqslant \frac{4}{T}\int\limits_0^\infty R^2_{xx}(\lambda)\,d\lambda \qquad (|\tau| < T). \tag{19.8-22}$$

Зависимость оценки автокорреляционной функции

$$\langle x(t)\,x(t+\tau)\rangle_T = \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(\lambda)\,x(\lambda+\tau)\,d\lambda \tag{19.8-23}$$

от ширины спектра сигнала и от запаздывания можно иллюстрировать на примере гауссовского шума $x(t)$, удовлетворяющего условиям (14). В этом случае

$$\mathsf{D}\,\langle x(t)\,x(t+\tau)\rangle_T = \frac{a^4}{2(\alpha T)^2}\left\{2\alpha T - 1 + 2e^{-2\alpha T} + [(2\alpha\tau + 1)(2\alpha T - 1) - 2(\alpha\tau)^2]\,e^{-2\alpha\tau}\right\} \quad (T > \tau > 0). \tag{19.8-24}$$

При $\tau=0$ это выражение совпадает с (18). Если время наблюдения T велико по сравнению с обратной величиной ширины спектра сигнала (при $\alpha T \geqslant 10^6$), то

$$\frac{a^4}{\alpha T} \leqslant \mathsf{D}\,\langle x(t)\,x(t+\tau)\rangle_T \leqslant 2\frac{a^4}{\alpha T} \qquad (|\tau| \leqslant T). \tag{19.8-25}$$

Для более общего случая стационарного гауссовского сигнала $x(t)$ с

$$\mathsf{R}_{xx}(\tau) = a^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_1\tau + |\mathsf{M}x|^2 \tag{19.8-26}$$

получается такое же неравенство

$$\mathsf{D}\,\langle x(t)\,x(t+\tau)\rangle_T \leqslant 2\frac{a^4}{\alpha T} \qquad (\alpha T \geqslant 10^6,\ |\tau| \leqslant T). \tag{19.8-27}$$

19.8-4. Выборочные средние. Через ${}^1x(t)$, ${}^2x(t)$, ... здесь обозначены различные реализации случайного процесса (рис. 19.8-1). Независимость реализаций означает, что любое конечное множество выборочных значений ${}^ix(t_1)$,

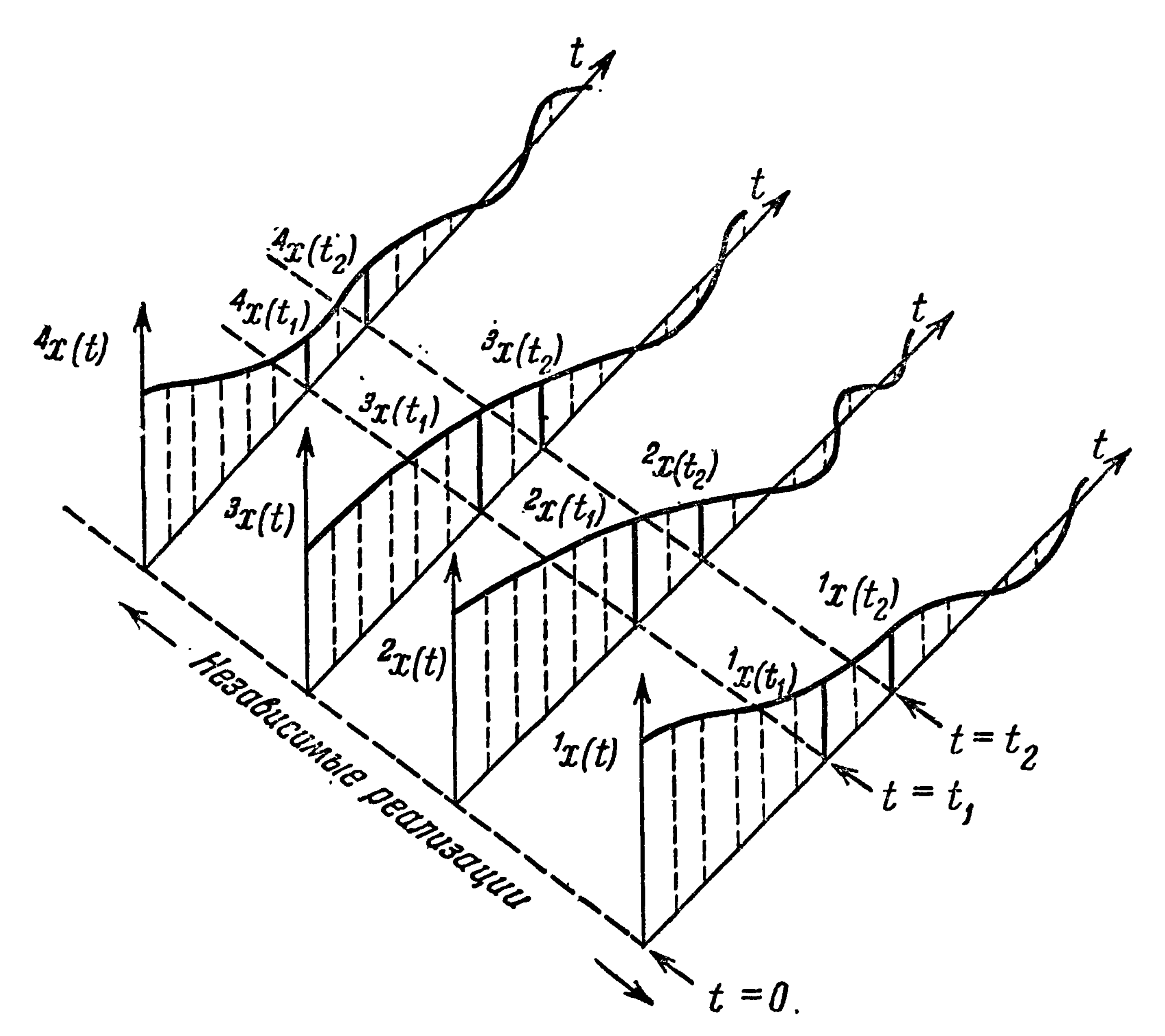


Рис. 19.8-1. Четыре независимые реализации $x(t) = {}^kx(t)$ непрерывного случайного процесса.

${}^ix(t_2)$, ... не зависит от любого множества выборочных значений другой реализации ${}^kx(t)$.

Если в последовательности независимых опытов можно получить некоторое множество реализаций ${}^1x(t)$, ${}^2x(t)$, ..., ${}^nx(t)$, то выборочные значения ${}^1x(t_1)$, ${}^2x(t_1)$, ..., ${}^nx(t_1)$ образуют классическую *случайную выборку объема n*, т. е. ${}^kx(t_1)$ — независимые случайные величины с одинаковым распределением вероятностей. Аналогично, ${}^1x(t_1)$, ${}^1x(t_2)$, ${}^2x(t_1)$, ${}^2x(t_2)$, ..., ${}^nx(t_1)$, ${}^nx(t_2)$ или ${}^1x(t_1)$, ${}^1y(t_2)$, ${}^2x(t_1)$, ${}^2y(t_2)$, ..., ${}^nx(t_1)$, ${}^ny(t_2)$ образуют двумерную случайную выборку.

Поэтому такие *выборочные средние* как

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{x(t_1)}=\frac{1}{n}\left[{}^1x(t_1)+{}^2x(t_1)+\ldots+{}^nx(t_1)\right],\\
&\overline{f[x(t_1),\ x(t_2),\ \ldots]}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}^kf=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left[{}^kx(t_1),\ {}^kx(t_2),\ \ldots\right],\\
&\overline{x(t_1)\,y(t_2)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}^kx(t_1)\,{}^ky(t_2)
\end{aligned}\right\}\qquad(19.8\text{-}28)$$

являются статистиками в смысле классической статистической теории. Для нахождения выборочных средних нужны повторные или множественные опыты, но обычно проще получить дисперсии и распределения вероятностей для выборочных средних, чем для средних по времени. В частности,

$$\left.\begin{aligned}
&\mathsf{D}\,\overline{x(t_1)}=\frac{1}{n}\,\mathsf{D}\,x(t_1),\qquad \mathsf{D}\bar{f}=\frac{1}{n}\,\mathsf{D}f,\\
&\mathsf{D}\,(\overline{x(t_1)\,y(t_2)})=\frac{1}{n}\,\mathsf{D}\,x(t_1)\,y(t_2),
\end{aligned}\right\}\qquad(19.8\text{-}29)$$

как и в п. 19.2-3 (см. также рис. 19.8-1).

19.9. ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА В ЗАДАЧАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

19.9-1. Постановка задачи. Практически важный класс ситуаций, требующих принятия решения, может быть представлен на модели рис. 19.9-1.

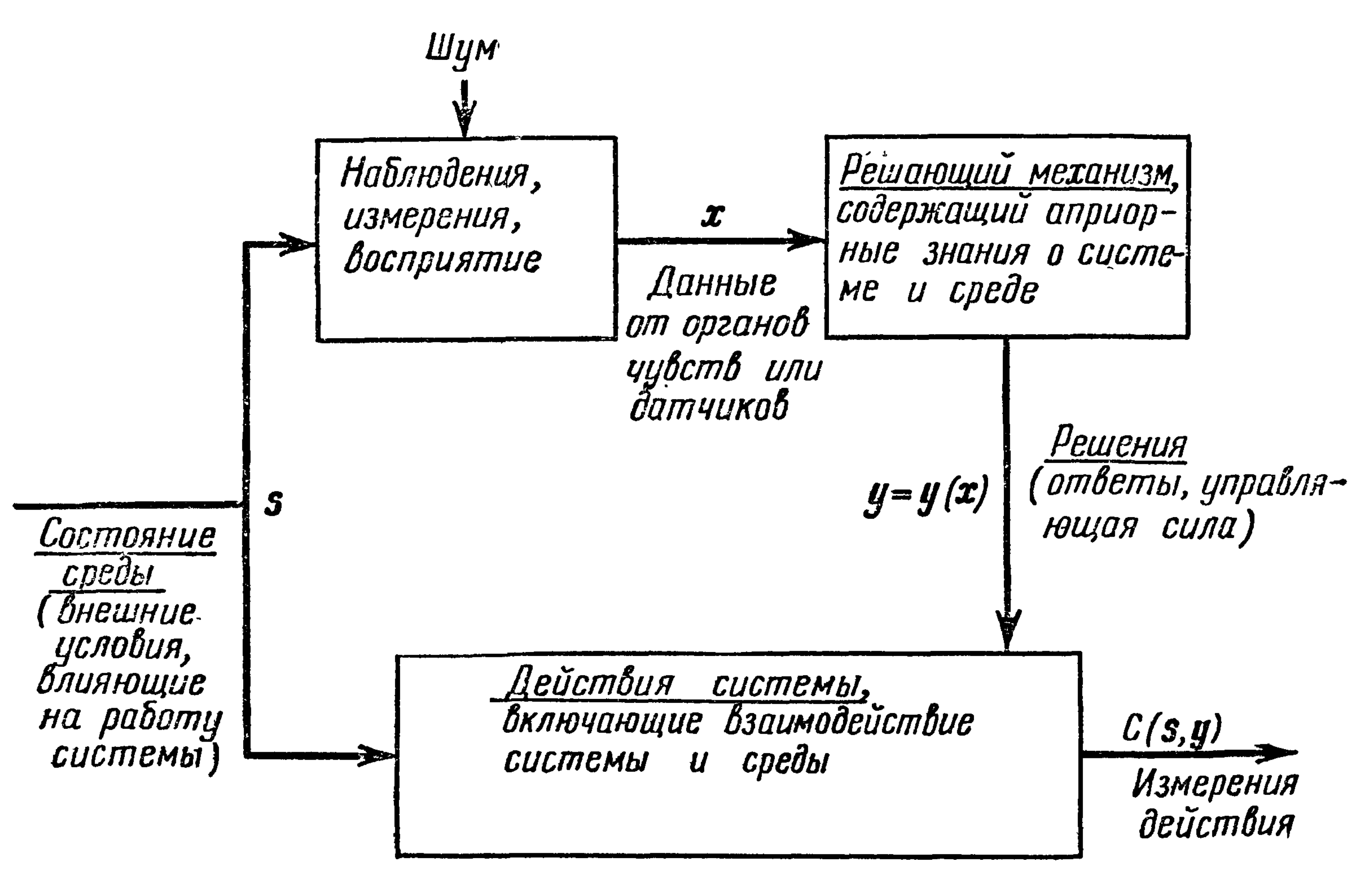


Рис. 19.9-1. Контекст для статистических решений (принятие гипотезы)

Цена С (*риск*) некоторого действия системы есть функция от состояния среды, представленного m-мерной случайной величиной $\mathbf{s}\equiv(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m)$, и решения, представленного r-мерной величиной $\mathbf{y}\equiv(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_r)$:

$$C=C(\mathbf{s},\ \mathbf{y}).\qquad(19.9\text{-}1)$$

Человек, машина или система принимает решение $\mathbf{y}$, основываясь на данных, представленных n-мерной случайной величиной $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая связана с состоянием среды через совместное распределение $\mathbf{s}$ и $\mathbf{x}$. Принимающий решение образует $\mathbf{y}$ как решающую функцию (см. также п. 19.6-9) от имеющихся данных[1]):

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}). \tag{19.9-2}$$

Если дано совместное распределение $\mathbf{s}$ и $\mathbf{x}$ вместе с функцией риска (1), представляющей действие системы для каждой комбинации состояния среды и решения, то задача состоит в минимизации **ожидаемого риска**

$$\mathbf{M}\, C(\mathbf{s}, \mathbf{y}) = \int\limits_{\mathbf{s}} \int\limits_{\mathbf{x}} C[\mathbf{s}, \mathbf{y}(\mathbf{x})]\, d\Phi(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \tag{19.9-3}$$

путем оптимального выбора **решающей функции** $\mathbf{y}(\mathbf{x})$. Величины $\mathbf{s}$, $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ могут быть как непрерывными, так и дискретными.

19.9-2. Оценка и проверка с помощью формул Байеса. Если параметры состояния среды $s_1, s_2, \ldots, s_m$ рассматриваются как параметры неизвестного распределения вероятностей наблюдаемой выборки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то задача похожа на классическую задачу оценки и контроля; существенное различие состоит в том, что параметры $s_1, s_2, \ldots, s_m$ являются теперь *случайными величинами*.

Для непрерывных величин $\mathbf{s}$, $\mathbf{x}$ знание состояния системы на основе полученной выборки $\mathbf{x}$ означает знание плотности условной вероятности $\varphi(\mathbf{s} \mid \mathbf{x})$. Минимизация ожидаемого риска (3) или

$$\mathbf{M}\, C(\mathbf{s}, \mathbf{y}) = \int\limits_{\mathbf{x}} d\Phi(\mathbf{x}) \int\limits_{\mathbf{s}} C[\mathbf{s}, \mathbf{y}(\mathbf{x})]\, d\Phi(\mathbf{s} \mid \mathbf{x}) \tag{19.9-4}$$

сводится при этом к минимизации **условного риска**

$$\mathbf{M}\, C(\mathbf{s}, \mathbf{y} \mid \mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{s}} C[\mathbf{s}, \mathbf{y}(\mathbf{x})]\, d\Phi(\mathbf{s} \mid \mathbf{x}) \tag{19.9-5}$$

для каждой выборки $\mathbf{x}$ путем выбора подходящей решающей функции $\mathbf{y}(\mathbf{x})$.

Если дано «априорное» распределение $\mathbf{s}$ и плотность условного распределения $\varphi(\mathbf{x} \mid \mathbf{s})$, то «апостериорное» распределение вероятностей, нужное для формулы (5), получается с помощью формул Байеса (пп. 18.2-6 и 18.4-5) в виде

$$d\Phi(\mathbf{s} \mid \mathbf{x}) = \frac{\varphi(\mathbf{x} \mid \mathbf{s})\, d\Phi(\mathbf{s})}{\int\limits_{\mathbf{s}} \varphi(\mathbf{x} \mid \mathbf{s})\, d\Phi(\mathbf{s})}. \tag{19.9-6}$$

Метод принятия решений, основанный на такой минимизации ожидаемого риска, называется **оценкой по Байесу.**

Если, как это часто бывает, неизвестны функция риска $C(\mathbf{s}, \mathbf{y})$ или «априорное» распределение величины $\mathbf{s}$, то оценка по Байесу становится невозможной. Иногда удается свести задачу к классическим методам оценок наибольшего правдоподобия (п. 19.4-4) и критерию Неймана—Пирсона (п. 19.6-3).

19.9-3. Случай двух состояний, проверка гипотез (см. также пп. 19.6-1—19.6-4). Пусть существуют только два состояния среды: $s=0$ (*нулевая гипотеза*) и $s=1$ (*конкурирующая гипотеза*). Допустим *два возможных решения*

---

[1]) Здесь не рассматривается случайный или частично случайный выбор решения (как в играх со смешанной стратегией, п. 11.4-4, b).

$y=0$, $y=1$, которые соответствуют принятию или отбрасыванию нулевой гипотезы на основе выборки наблюденных значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Задача сводится к установлению критической области (*области отбрасывания*) S выборочных точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая дает минимум ожидаемого риска

$$\mathbf{M}\,C(s, y) = C(s=0, y=0)\,p_0 \int_{\tilde{S}} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid s=0)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n +$$
$$+ C(s=0, y=1)\,p_0 \int_{S} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid s=0)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n +$$
$$+ C(s=1, y=0)(1-p_0) \int_{\tilde{S}} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid s=1)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n +$$
$$+ C(s=1, y=1)(1-p_0) \int_{S} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid s=1)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n, \quad (19.9\text{-}7)$$

где $p_0 = \mathbf{P}(s=0)$, а $\tilde{S}$ — дополнение к S (область принятия гипотезы). *Ожидаемый риск* $\mathbf{M}\,C(s, y)$ *будет минимальным, если нулевая гипотеза отвергается каждый раз, когда отношение правдоподобия*

$$\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \frac{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid s=1)}{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid s=0)} \quad (19.9\text{-}8)$$

(см. также п. 19.6-3) *превосходит критическое значение*

$$\Lambda_C = \frac{p_0}{1-p_0} \frac{C(s=0, y=1) - C(s=0, y=0)}{C(s=1, y=0) - C(s=1, y=1)} =$$
$$= \frac{p_0}{1-p_0} \frac{\text{цена ложного отбрасывания (ложная тревога)}}{\text{цена ложного принятия (промах)}}. \quad (19.9\text{-}9)$$

Заметим, что любая возрастающая или убывающая функция от отношения правдоподобия (8) может заменить его в качестве статистики для проверки гипотезы; само отношение правдоподобия является монотонной функцией от «апостериорной» условной вероятности $p(s \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая тоже может служить в качестве такой статистики.

Пример. *Обнаружение сигнала на фоне гауссовского шума с плоским спектром.* Надо решить, является ли принятый сигнал $x(t)$ с шириной спектра B чистым шумом $[s=0$ или $x(t) = n(t)]$ или полезным сигналом с добавочным шумом $[s=1$ или $x(t) = s(t) + n(t)]$. Конечная ширина спектра позволяет описать и сигнал и шум с помощью выборочных значений

$$x_k = x(k\Delta t), \qquad s_k = s(k\Delta t), \qquad n_k = n(k\Delta t),$$

где $\Delta t = \frac{1}{2B}$; $k = 1, 2, \ldots, 2BT$; T — время наблюдения (п. 18.11-2).

Отсюда

$$\varphi_{x \mid s}(x_1, x_2, \ldots, x_{2BT} \mid s=0) = (2\pi P_N)^{-BT} \exp\left(-\frac{1}{2P_N} \sum_{k=1}^{2BT} x_k^2\right),$$

$$\varphi_{x \mid s}(x_1, x_2, \ldots, x_{2BT} \mid s=1) = (2\pi P_N)^{-BT} \exp\left[-\frac{1}{2P_N} \sum_{k=1}^{2BT} (x_k - s_k)^2\right],$$

так что

$$\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{2BT}) = \exp\left(-\frac{1}{2P_N} \sum_{k=1}^{2BT} s_k^2 + \frac{1}{P_N} \sum_{k=1}^{2BT} s_k x_k\right).$$

Так как величина

$$z(x_1, x_2, \ldots, x_{2BT}) = \frac{1}{2B} \sum_{k=1}^{2BT} s_k x_k = \sum_{k=1}^{2BT} s(k\Delta t)\, x(k\Delta t)\, \Delta t \approx \int_0^T s(t)\, x(t)\, dt$$

есть возрастающая функция от отношения правдоподобия $\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{2BT})$, то она может быть использована как статистика для проверки гипотезы. Подсчитав эту величину либо путем дискретного суммирования, либо путем интегрирования, сравнивают ее с критическим значением z_C, определяемым с помощью p_0 и $C(s, y)$; неравенство $z > z_C$ соответствует решению $y = 1$.

19.9-4. Оценки по методу наименьших квадратов. Пусть среда имеет непрерывно распределенное множество состояний, представляемых значениями величины $\mathbf{s} \equiv (s_1, s_2, \ldots, s_m)$, и пусть m компонент y_k решающей функции $\mathbf{y} \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ надо выбирать так, чтобы аппроксимировать соответствующие значения s_k возможно лучше в некотором смысле, уточняемом функцией риска $C(\mathbf{s}, \mathbf{y})$. В практически важном случае *оценок по методу наименьших квадратов* функция риска задается в виде

$$C(\mathbf{s}, \mathbf{y}) = C(s_1, s_2, \ldots, s_m; y_1, y_2, \ldots, y_m) = \sum_{k=1}^{m} (s_k - y_k)^2. \qquad (19.9\text{-}10)$$

В этом случае минимум $\mathbf{M}\, C(\mathbf{s}, \mathbf{y})$ *достигается, когда каждая компонента* y_k *равна условному математическому ожиданию величины* s_k *для полученной выборки* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$y_k = \mathbf{M}(s_k \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} s_k\, \varphi(s_k \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)\, ds_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \qquad (19.9\text{-}11)$$

(см. также пп. 18.4-5, 18.4-6 и 18.4-9), где $\varphi(s_k \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получается из $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid s_1, s_2, \ldots, s_m)$ с помощью формулы Байеса

$$\varphi_{\mathbf{s}\mid\mathbf{x}}(s_1, \ldots, s_m \mid x_1, \ldots, x_n) = \frac{\varphi_{\mathbf{x}\mid\mathbf{s}}(x_1, \ldots, x_n \mid s_1, \ldots, s_m)\, \varphi_{\mathbf{s}}(s_1, \ldots, s_m)}{\int_{\mathbf{s}} \varphi_{\mathbf{x}\mid\mathbf{s}}(x_1, \ldots, x_n \mid s_1, \ldots, s_m)\, \varphi_{\mathbf{s}}(s_1, \ldots, s_m)\, ds_1 \ldots ds_m}. \qquad (19.9\text{-}12)$$

Пример. *Измерение случайной величины на фоне гауссовского шума.* Надо оценить случайную величину s по выборке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ измеренных значений

$$x_k = s + n_k,$$

если для величины s известна плотность априорного распределения вероятностей

$$\varphi_s(s) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_s^2}(s - \xi_s)^2\right],$$

а относительно величин n_k известно, что они независимы между собой и от s, причем

$$\varphi_{\mathbf{x}\mid s}(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid s) = \left(\frac{1}{2\pi P_N}\right)^{n/2} \exp\left[-\frac{1}{2P_N} \sum_{k=1}^{n} (x_k - s)^2\right].$$

Формула Байеса дает

$$\varphi_{s\mid\mathbf{x}}(s \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(s - \xi)^2\right],$$

где

$$\xi = \mathrm{M}\,(s \mid x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \sigma^2 \left(\frac{n\bar{x}}{P_N} + \frac{\xi_s}{\sigma_s^2}\right), \qquad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

$$\sigma^2 = \mathrm{D}\,(s \mid x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \left(\frac{n}{P_N} + \frac{1}{\sigma_s^2}\right)^{-1}.$$

Поэтому оценка по методу наименьших квадратов (минимизация $\mathrm{M}\,(y - s)^2$) приводит к значению

$$y = \xi = \frac{\sigma_s^2\bar{x} + \xi_s \dfrac{P_N}{n}}{\sigma_s^2 + \dfrac{P_N}{n}},$$

которое зависит от выборочных значений x_k только через статистику $\bar{x}$ (выборочное среднее) и является *смещенной* оценкой; смещение возрастает с возрастанием P_N и убыванием объема выборки n. Для полученной оценки ожидаемый риск равен

$$\mathrm{M}\,(y - s)^2 = \frac{P_N}{n} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \dfrac{P_N}{n}} \leqslant \frac{P_N}{n}.$$

ГЛАВА 20

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ

20.1. ВВЕДЕНИЕ

20.1-1. Вводные замечания. Глава 20 содержит описание вычислительных методов, причем упор делается на методику, а не на схемы или программы расчета. В пп. 20.4-1—20.5-7 дается исчисление конечных разностей. Разностные методы представляют интерес не только для численного интегрирования дифференциальных уравнений, но также и в тех математических моделях, где переменные изменяются дискретными шагами.

20.1-2. Ошибки. За исключением возможных **промахов** (грубых ошибок) в приближенных вычислениях встречаются **ошибки начальных данных, ошибки округления**, вызванные использованием конечного числа знаков, и **ошибки усечения**, вызванные конечной аппроксимацией бесконечного процесса. Влияние малых ошибок Δx_i или малых относительных ошибок $\frac{\Delta x_i}{x_i}$ на результат $f(x_1, x_2, \ldots)$ может быть оценено с помощью дифференциала (п. 4.5-3); так,

$$\Delta(x_1 + x_2) = \Delta x_1 + \Delta x_2, \qquad \Delta(x_1 x_2) = x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1, \tag{20.1-1}$$

$$\left| \frac{\Delta(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leqslant \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2|}{|x_1 - x_2|}, \qquad \frac{\Delta(x_1 x_2)}{x_1 x_2} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}. \tag{20.1-2}$$

Возникновение и распространение ошибок в более сложных вычислениях составляют предмет продолжающихся исследований; точные результаты получены лишь в отдельных классах вычислений. Желательно своевременно обнаруживать промахи и ошибки с помощью различных *программ контроля* (например, подстановкой приближенного решения в исходное уравнение), осуществляемых на каждом этапе расчета. В качестве весьма грубого практического совета можно рекомендовать сохранять на две значащие цифры больше, чем это оправдывается точностью исходных данных или требуемой точностью результата. В сходящихся итерационных процессах (пп. 20.2-2, 20.2-4, 20.3-2, 20.8-3 и 20.9-3) влияние ошибки уменьшается, за исключением ошибок, нарушающих сходимость.

Вычислительная схема называется **устойчивой**, если ошибки округления (абсолютные или относительные) в исходных данных и при расчете не вызывают возрастающего эффекта. Более точно, определение устойчивости вычислительной схемы часто оказывается возможным связать с асимптотической устойчивостью решения разностного уравнения (рекуррентного соотношения), как в п. 20.8-5.

Вместо слова «ошибка» часто применяют «погрешность».

20.2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

20.2-1. Вводные замечания. Численному решению уравнения

$$f(z) = 0 \tag{20.2-1}$$

должно быть предпослано хотя бы грубое исследование вопросов существования и положения корней, их оценка и т. д. (см. также пп. 1.6-6 и 7.6-9). Решения могут быть проверены подстановкой.

20.2-2. Итерационные методы.

(a) Данное уравнение (1) приводят к виду

$$z = \varphi(z). \qquad (20.2\text{-}2)$$

Выбирая некоторое *начальное приближение* $z^{[0]}$, вычисляют *последовательные приближения*

$$z^{[j+1]} = \varphi(z^{[j]}) \qquad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (20.2\text{-}3)$$

Сходимость таких приближений к искомому решению z требует отдельного исследования.

Теорема о сжимающих отображениях п. 12.5-6 *часто позволяет установить сходимость и оценить быстроту сходимости.* Итерации заканчивают тогда, когда отношение $\dfrac{|z^{[j]} - z^{[j-1]}|}{|z^{[j]}|}$ становится достаточно малым.

Признак сходимости и оценка ошибки. *Если существует такая область D в комплексной плоскости и такое положительное число $M < 1$, что*

$$|\varphi(Z_1) - \varphi(Z_2)| \leqslant M\,|Z_1 - Z_2| \text{ для всех } Z_1,\ Z_2 \text{ из } D,$$

и если D содержит $z^{[0]}$, $z^{[1]}$ и все точки z, удовлетворяющие неравенству

$$|z - z^{[j]}| \leqslant \frac{M}{1-M}\,|z^{[j]} - z^{[j-1]}| \qquad (20.2\text{-}4)$$

для каждого значения $j \geqslant 1$, то приближения (3) *сходятся к некоторому решению z уравнения* (1); *это решение удовлетворяет неравенству* (4) *и является единственным в D.* Заметим, что правая часть неравенства (4) дает верхнюю грань ошибки j-го приближения $z^{[j]}$.

(b) *Возможны различные способы приведения уравнения* (1) *к виду* (2). Вот некоторые итерационные формулы, основанные на специальном выборе функции $\varphi(z)$:

$$z^{[j+1]} = z^{[j]} - kf(z^{[j]}), \qquad (20.2\text{-}5)$$

$$z^{[j+1]} = z^{[j]} - \frac{f(z^{[j]})}{f'(z^{[j]})} \text{ (метод Ньютона)}, \qquad (20.2\text{-}6)$$

$$z^{[j+1]} = z^{[j]} - \frac{f(z^{[j]})}{f'(z^{[j]})} - \frac{1}{2}\,\frac{\{f(z^{[j]})\}^2 f''(z^{[j]})}{\{f'(z^{[j]})\}^3}. \qquad (20.2\text{-}7)$$

Эти итерационные формулы особенно удобны при вычислении действительных корней. Для нахождения комплексных корней действительных уравнений надо выбирать комплексное начальное приближение $z^{[0]}$. Признак сходимости и оценка ошибки из п. 20.2-2,а применимы во всех случаях.

Формула (6) есть частный случай общего метода Ньютона (п. 20.2-8). *Если производная $f'(z)$ непрерывно дифференцируема в рассматриваемой области и если можно найти такие положительные числа A, B, C, что*

$$\left|\frac{1}{f'(z^{[0]})}\right| \leqslant A; \qquad \left|\frac{f(z^{[0]})}{f'(z^{[0]})}\right| \leqslant B \qquad (20.2\text{-}8a)$$

и

$$|f''(z)| \leqslant C \leqslant \frac{1}{2AB} \qquad (20.2\text{-}8b)$$

при

$$|z - z^{[0]}| \leqslant \frac{1}{AC}\left(1 - \sqrt{1 - 2ABC}\right), \qquad (20.2\text{-}8c)$$

то искомый корень z удовлетворяет последнему неравенству и быстрота сходимости метода Ньютона оценивается неравенством

$$|z - z^{[j]}| \leqslant \frac{B}{2^{j-1}}\,(2ABC)^{2^{j}-1} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (20.2\text{-}9)$$

Отметим, что здесь имеет место относительно быстрая сходимость.

Примеры. Применение метода (6) к уравнениям $1/z - a = 0$, $z^2 - a = 0$, $1/z^2 - 1/a = 0$ и $z^n - a = 0$ дает итерационные формулы вычисления $1/a$, $\sqrt{a}$ и $\sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$:

$$z^{[j+1]} = z^{[j]}\left(2 - az^{[j]}\right) \to \frac{1}{a} \quad \text{при} \quad j \to \infty, \quad 0 < z^{[0]} < \frac{2}{a}, \tag{20.2-10}$$

$$z^{[j+1]} = \frac{1}{2}\left(z^{[j]} + \frac{a}{z^{[j]}}\right) \to \sqrt{a} \quad \text{при} \quad j \to \infty, \quad z^{[0]} > 0 \ (\textit{алгоритм Герона}), \tag{20.2-11}$$

$$z^{[j+1]} = z^{[j]}\left[1 + \frac{a - (z^{[j]})^2}{2a}\right] \to \sqrt{a} \quad \text{при} \quad j \to \infty, \ 0 < z^{[0]} < \sqrt{3a}, \tag{20.2-12}$$

$$z^{[j+1]} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) z^{[j]} + \frac{a}{n\,(z^{[j]})^{n-1}} \to \sqrt[n]{a} \quad \text{при} \quad j \to \infty, \quad z^{[0]} > 0. \tag{20.2-13}$$

(с) *Правило ложного положения (regula falsi, метод секущих). Правило ложного положения отличается от приведенных выше итерационных методов тем, что для определения нового приближения $z^{[j+1]}$ используют два предыдущих (возможны и более общие схемы, использующие несколько предыдущих приближений, см. п. 20.2-4, b). Для решения уравнения (1) выбирают два начальных приближения $z^{[0]}$, $z^{[1]}$ и строят последовательные приближения

$$z^{[j+1]} = z^{[j]} - \frac{z^{[j]} - z^{[j-1]}}{f(z^{[j]}) - f(z^{[j-1]})} f\left(z^{[j]}\right) \qquad (j = 1, 2, \ldots,). \tag{20.2-14a}$$

Для отыскания действительных корней действительных уравнений приближение $z^{[j+1]}$ обычно строят по $z^{[j]}$ и $z^{[k]}$, где $k = k(j) < j$ — наибольший индекс, такой, что $f\left(z^{[k]}\right)$ и $f\left(z^{[j]}\right)$ имеют разные знаки:

$$z^{[j+1]} = z^{[j]} - \frac{z^{[j]} - z^{[k]}}{f(z^{[j]}) - f(z^{[k]})} f\left(z^{[j]}\right). \tag{20.2-14b}$$

В частности, разные знаки должны иметь $f\left(z^{[0]}\right)$ и $f\left(z^{[1]}\right)$; при указанной схеме обеспечена локализация корня между $z^{[k]}$ и $z^{[j]}$.

(d) Улучшение сходимости по Эйткену—Стеффенсену. Если $\varphi(z)$ действительна и трижды непрерывно дифференцируема в окрестности действительного корня z, причем $\varphi'(z) \neq 1$, то сходимость итерационного процесса (3) можно улучшить с помощью следующей итерационной схемы:

$$\left.\begin{aligned}
&z^{[1]} = \varphi\left(z^{[0]}\right), \qquad z^{[2]} = \varphi\left(z^{[1]}\right),\\
&z^{[3]} = z^{[0]} - \frac{\left(z^{[1]} - z^{[0]}\right)^2}{z^{[2]} - 2z^{[1]} + z^{[0]}},\\
&z^{[4]} = \varphi\left(z^{[3]}\right), \qquad z^{[5]} = \varphi\left(z^{[4]}\right),\\
&z^{[6]} = z^{[3]} - \frac{\left(z^{[4]} - z^{[3]}\right)^2}{z^{[5]} - 2z^{[4]} + z^{[3]}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{20.2-15}$$

Итерации заканчивают, когда один из знаменателей оказывается близким к нулю (вообще говоря, желаемая точность достигается раньше этого, если последовательность (15) сходится). Этот метод, подобно методу секущих, может применяться вместо быстро сходящегося метода Ньютона, если вычисление значений $f'(z)$ вызывает затруднения.

(е) Кратные корни. Итерационные схемы, опирающиеся на формулы (6) (метод Ньютона) или (7), не будут сходиться в окрестности кратного корня уравнения. Заметим, что кратные корни функции $f(z)$ являются корнями ее производной $f'(z)$; для алгебраических уравнений наибольший общий делитель функций $f(z)$ и $f'(z)$ может быть получен методом п. 1.7-3.

(f) Метод проб. Если изолированный простой корень действительного уравнения (1) лежит между $z=a$ и $z=b$, то вычисляют $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ имеет тот же знак, скажем, что и $f(b)$, то далее вычисляют $f\left[\frac{1}{2}\left(a+\frac{a+b}{2}\right)\right]$, и т. д.

20.2-3. Вычисление значений многочлена.

(a) Последовательные умножения. Для применения рассматриваемых далее итерационных методов надо уметь вычислять значения многочлена

$$f(z)\equiv a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n. \qquad (20.2\text{-}16)$$

Для этой цели либо вычисляют последовательно a_0z+a_1, $z(a_0z+a_1)+a_2$, ..., либо предварительно находят величины $f(c)$, $f'(c)$, $\frac{1}{2}f''(c)$, ... по схеме Горнера и затем пользуются формулой (17).

(b) Схема Горнера. Деление многочлена $f(z)$ на $(z-c)$ дает новый многочлен $f_1(z)$ и остаток $f(c)$ (п. 1.7-2); деление $f_1(z)$ на $(z-c)$ дает многочлен $f_2(z)$ и остаток $f'(c)$. Продолжая этот процесс, получаем последовательно остатки $f(c)$, $f'(c)$, $\frac{1}{2!}f''(c)$, $\frac{1}{3!}f'''(c)$, ..., которые являются коэффициентами разложения многочлена

$$F(u)\equiv f(u+c)\equiv$$
$$\equiv f(c)+f'(c)u+\frac{1}{2!}f''(c)u^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)u^n\equiv f(z). \qquad (20.2\text{-}17)$$

Схема Горнера для комплексного аргумента. Если $f(z)$ — многочлен с действительными коэффициентами, а $c=a+ib$, то $f(c)=Ac+B=(Aa+B)+iAb$, где $Az+B$ — действительный остаток от деления $f(z)$ на $(z^2-2az+a^2+b^2)$.

20.2-4. Численное решение алгебраических уравнений. Итерационные методы.

(a) Общие методы. Чтобы вычислить изолированный простой корень алгебраического уравнения

$$f(z)\equiv a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0, \qquad (20.2\text{-}18)$$

можно:

1) применить метод Ньютона (6);

2) применить формулу (5) с $k=1/a_{n-1}$, вычисляя по схеме Горнера последовательные значения многочлена

$$z^{[j+1]}=z^{[j]}-\frac{1}{a_{n-1}}f\left(z^{[j]}\right). \qquad (20.2\text{-}19)$$

Если $a_{n-1}=0$, заменяют z на $u=z-c$ и применяют формулу (17), чтобы привести уравнение (18) к виду $F(u)=0$;

3) применить метод секущих (п. 20.2-2, с).

Сходимость этих и излагаемых ниже других методов итерации зависит от выбора начального приближения. Начальное приближение может быть получено или из предварительного исследования, или из квадратичной интерполяции функции $f(z)$, или методами п. 20.2-5. При отсутствии такой информации иногда можно выбирать в качестве начального приближения нуль или малое действительное число. В случае комплексных корней применима схема Горнера для комплексного аргумента, если только $f(z)$ есть многочлен с действительными коэффициентами; при этом в качестве начального приближения можно испытать такое число $a+ib$, которое минимизирует величины $|A|$ и $|B|$ в указанной схеме. Как только найден один из корней z_k, можно разделить многочлен $f(z)$ на $(z-z_k)$ и затем в качестве начального приближения для следующего корня можно выбирать z_k или $z_k(1+i)$

Для комплексных корней методы Мюллера и Бэрстоу упрощают вычисления и обеспечивают более быструю сходимость, чем метод Ньютона, если корни близки друг к другу.

(b) Метод Мюллера. Вместо линейной интерполяции метода секущих здесь применяется квадратичная интерполяция, что приводит к итерации вида

$$z^{[j+1]}=z^{[j]}-\left(z^{[j]}-z^{[j-1]}\right)\frac{2C_j}{|B_j|+\sqrt{B_j^2-4A_jC_j}}\operatorname{sign}B_j, \qquad (20.2\text{-}20a)$$

где

$$\left.\begin{aligned}&A_j=q_jf_j-q_j(1+q_j)f_{j-1}+q_j^2f_{j-2},\\&B_j=(2q_j+1)f_j-(1+q_j)^2f_{j-1}+q_j^2f_{j-2},\\&C_j=(1+q_j)f_j,\\&f_j=f\left(z^{[j]}\right),\qquad q_j=\frac{z^{[j]}-z^{[j-1]}}{z^{[j-1]}-z^{[j-2]}}\qquad (j=0,1,2,\ldots).\end{aligned}\right\}\qquad (20.2\text{-}20b)$$

Для начала решения можно положить

$$z^{[0]}=-1,\quad z^{[1]}=1,\quad z^{[2]}=0\qquad \left(q_2=-\tfrac{1}{2}\right)$$

и

$$f_0=a_n-a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots,\quad f_1=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots,\quad f_2=a_n.$$

Метод Мюллера распространяется также и на неалгебраические уравнения.

(c) Метод Бэрстоу. Пусть многочлен (16) содержит квадратный множитель z^2-uz-v, определяющий два различных простых корня уравнения (18), и пусть известны достаточно хорошие начальные приближения $u^{[0]}$ и $v^{[0]}$ для u и v. Тогда последовательность лучших приближений, сходящихся к u и v, дается формулами

$$\left.\begin{aligned}&u^{[j+1]}=u^{[j]}+\frac{b_n^{[j]}c_{n-3}^{[j]}-b_{n-1}^{[j]}c_{n-2}^{[j]}}{\left(c_{n-2}^{[j]}\right)^2-c_{n-1}^{[j]}c_{n-3}^{[j]}},\\&v^{[j+1]}=v^{[j]}+\frac{b_{n-1}^{[j]}c_{n-1}^{[j]}-b_n^{[j]}c_{n-2}^{[j]}}{\left(c_{n-2}^{[j]}\right)^2-c_{n-1}^{[j]}c_{n-3}^{[j]}},\end{aligned}\right\}\qquad (20.2\text{-}21a)$$

где величины $b_k^{[j]}$, $c_k^{[j]}$ вычисляются последовательно для каждого j по формулам

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}&b_k^{[j]}=a_k+u^{[j]}b_{k-1}^{[j]}+v^{[j]}b_{k-2}^{[j]},\\&c_k^{[j]}=b_k^{[j]}+u^{[j]}c_{k-1}^{[j]}+v^{[j]}c_{k-2}^{[j]}\end{aligned}\right\}(k=0,1,2,\ldots,n),\\&b_{-1}^{[j]}=b_{-2}^{[j]}=c_{-1}^{[j]}=c_{-2}^{[j]}=0.\end{aligned}\right\}\qquad (20.2\text{-}21b)$$

Этот метод более удобен для многочленов четной степени.

20.2-5. Специальные методы решения алгебраических уравнений.

(a) Алгоритм разделенных разностей. Этот метод, обобщающий классический метод Бернулли, может давать приближения ко всем корням алгебраического уравнения (18) за один цикл расчета. Он применяется также для получения начальных приближений в итерационных методах.

Вычисления располагают по схеме табл. 20.2-1, где

$$\left.\begin{aligned}&Q_{i+1}^{[k]}=Q_i^{[k]}+\left(E_i^{[k]}-E_{i+1}^{[k]}\right),\\&E_{i+1}^{[k]}=E_i^{[k]}\frac{Q_i^{[k+1]}}{Q_{i+1}^{[k]}},\quad E_i^{[0]}=E_i^{[n]}=0\end{aligned}\right\}(i=1,2,\ldots)\qquad (20.2\text{-}22)$$

Таблица 20.2-1

Таблица алгоритма разделенных разностей

$Q_0^{[1]}=-\frac{a_1}{a_0}$		$Q_{-1}^{[2]}=0$		$Q_{-2}^{[3]}=0$	...		$Q_{1-n}^{[n]}=0$
	$E_0^{[1]}=\frac{a_2}{a_1}$		$E_{-1}^{[2]}=\frac{a_3}{a_2}$		...	$E_{2-n}^{[n-1]}=\frac{a_n}{a_{n-1}}$	
$Q_1^{[1]}$		$Q_0^{[2]}$		$Q_{-1}^{[3]}$	...		$Q_{2-n}^{[n]}$
	$E_1^{[1]}$		$E_0^{[2]}$		...	$E_{3-n}^{[n-1]}$	
$Q_2^{[1]}$		$Q_1^{[2]}$		$Q_0^{[3]}$	...		$Q_{3-n}^{[n]}$
	$E_2^{[1]}$		$E_1^{[2]}$		...	$E_{4-n}^{[n-1]}$	
...	...	...	...	...	...	...	...

Вычисления становятся невозможными, если $Q_{i+1}^{[k]}$ или $E_i^{[k]}$ обращается в нуль. Тем не менее, метод разделенных разностей эффективен во многих частных случаях. Например, если все n корней $z_1, z_2, \ldots, z_n$ уравнения (18) положительны или если все корни являются простыми с различными ненулевыми абсолютными величинами, то для каждого k имеем

$$\lim_{i\to\infty} Q_i^{[k]}=z_k, \tag{20.2-23}$$

$$\lim_{i\to\infty} E_i^{[k]}=0, \tag{20.2-24}$$

так что *каждый столбец таблицы* 20.2-1 *дает приближение к корню.*

Вообще, *пусть* $|z_1|\geqslant|z_2|\geqslant\ldots\geqslant|z_n|>0$. *Если алгоритм разделенных разностей не отказывает, то формула* (23) *дает каждый корень* z_k, *который отличается по абсолютной величине от соседних с ним в указанной выше последовательности, а формула* (24) *остается справедливой при* $|z_k|>|z_{k+1}|$. Это помогает указать корни с равными абсолютными величинами, например, сопряженные комплексные корни.

(b) Метод Греффе—Лобачевского. Если дано алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами

$$f(z)\equiv\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)\equiv z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n=0,$$

то сначала находят коэффициенты $a_i^{(1)}$ многочлена

$$f(z)\,f(-z)\equiv(-1)^n\prod_{k=1}^{n}(z^2-z_k^2)\equiv(-1)^n(z^2)^n+a_1^{(1)}(z^2)^{n-1}+\ldots+a_n^{(1)}.$$

С помощью таблицы

$k=n$	$k=n-1$	$k=n-2$	$k=n-3$	(Номер столбца)
a_n a_n	a_{n-1} $-a_{n-1}$	a_{n-2} a_{n-2}	a_{n-3} $-a_{n-3}$	...
a_n^2	$-a_{n-1}^2$ $+2a_na_{n-2}$	a_{n-2}^2 $-2a_{n-1}a_{n-3}$ $+2a_na_{n-4}$	$-a_{n-3}^2$ $+2a_{n-2}a_{n-4}$ $-2a_{n-1}a_{n-5}$ $+2a_na_{n-6}$	...
$a_n^{(1)}$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$	$a_{n-3}^{(1)}$	...

Повторяя этот процесс, получают последовательно коэффициенты $a_i^{(j)}$ многочленов

$$(-1)^n \prod_{k=1}^{n} \left(z^{2^j}-z_k^{2^j}\right) \equiv (-1)^n \left(z^{2^j}\right)^n + a_1^{(j)} \left(z^{2^j}\right)^{n-1} + \ldots + a_n^{(j)}.$$

При возрастании j столбцы в расчетных таблицах оказываются одного из трех типов:

1) В некоторых столбцах удвоенные произведения становятся пренебрежимо малыми, так что последовательные записи в этих столбцах становятся квадратами с одинаковыми знаками (*правильные столбцы*); если последовательные записи имеют одинаковые знаки, а их абсолютные значения оказываются равными определенной доле квадрата предыдущего значения, то мы имеем *частично правильные столбцы*.

2) Записи столбцов могут иметь чередующиеся знаки (*колеблющиеся столбцы*).

3) Некоторые столбцы могут не обладать указанной выше правильностью.

Каждая пара правильных столбцов (например, k и $k-r$), разделенная $r-1$ неправильными столбцами, соответствует r корням z с равными модулями такими, что

$$\left|\frac{a_k^{(j)}}{a_{k-r}^{(j)}}\right| \sim |z|^{2^j r} \text{ при } j\to\infty. \qquad (20.2\text{-}25)$$

Эти r корней все либо действительны, либо чисто мнимы, если $r-1$ разделяющих столбцов частично правильны. В частности:

1. Два соседних правильных столбца (например, k и $k-1$) определяют *простой действительный корень* z такой, что

$$\left|\frac{a_k^{(j)}}{a_{k-1}^{(j)}}\right| \sim |z|^{2^j} \text{ при } j\to\infty.$$

2. Два правильных столбца (k и $k-2$), разделенные одним колеблющимся столбцом, определяют пару *простых комплексно сопряженных корней* z таких, что

$$\left|\frac{a_k^{(j)}}{a_{k-2}^{(j)}}\right| \sim |z|^{2^j+1} \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

На практике сначала находят действительные корни и чисто мнимые; знаки определяют подстановкой или с помощью п. 1.6-6. Затем упрощают уравнение делением на выделенные множители.

(c) Матричный метод. Корни алгебраического уравнения (18) n-й степени с $a_0 = 1$ можно вычислить как собственные значения ($n \times n$)-матрицы

$$A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \qquad (20.2\text{-}26)$$

одним из методов, описанных в п. 20.3-5.

(d) Метод Горнера. Метод Горнера (для действительных корней) сводится к последовательному вычислению коэффициентов многочленов $F_1(u) \equiv f(u + c_1)$, $F_2(u) \equiv F_1(u + c_2)$, ... по схеме Горнера, где $c_1, c_2, \dots$ выбираются так, чтобы уменьшить абсолютные величины остатков. Если удается получить $F_j(0) \approx 0$, то искомый корень приближенно равен $c_1 + c_2 + \dots + c_j$.

20.2-6. Системы уравнений и экстремальные задачи (см. также пп. 11.1-1, 12.5-6, 20.2-2 и 20.2-3).

(a) Постановка задачи. Итерационные методы. Задача решения системы n уравнений

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (20.2\text{-}27)$$

с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ эквивалентна задаче *минимизации функции*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} |f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 \qquad (20.2\text{-}28)$$

или какой-либо другой возрастающей функции от абсолютных величин $|f_i|$ **невязок (ошибок)** $f_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Задача отыскания минимума (или максимума) функции n переменных и сама по себе имеет большое практическое значение.

Для решения этой задачи *итерационными методами* начинают с произвольных значений $x_i^{[0]}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ и строят последовательные приближения

$$x_i^{[j+1]} = x_i^{[j]} + \lambda^{[j]} v_i^{[j]} \qquad (i = 1, 2, \dots, n; \;\; j = 0, 1, 2, \dots), \qquad (20.2\text{-}29)$$

которые сходятся к некоторому решению x_i при $j \to \infty$.

Различные методы отличаются выбором «направления» j-го шага, т. е. выбором отношений $v_1^{[j]} : v_2^{[j]} : \dots : v_n^{[j]}$. *Величина шага* определяется значением параметра $\lambda^{[j]}$, минимизирующим величину $F\left(x_1^{[j+1]}, x_2^{[j+1]}, \dots, x_n^{[j+1]}\right)$ как функцию от $\lambda^{[j]}$. Эту функцию обычно аппроксимируют ее тейлоровским разложением или интерполяционным многочленом по трем — пяти выбранным значениям $\lambda^{[j]}$. *Последний метод применим для отыскания* max *и* min *таблично заданной функции* $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Сходимость таких итерационных методов часто можно установить с помощью теоремы о сжимающем отображении п. 12.5-6; при этом искомое решение рассматривается как вектор с нормой $\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$ или $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$.

(b) Изменение на каждом шаге только одного переменного. На каждом шаге изменяют только одно из x_i, либо циклически, либо так, чтобы уменьшить наибольшую по модулю невязку (см. также п. 20.3-2, с, релаксация).

(c) Методы поиска. Чисто случайный поиск состоит в отборе наибольшего (или наименьшего) из значений $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для некоторого количества случайно выбранных точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; он применяется, главным образом, при отыскании начальных приближений для итерационных методов. В *методе случайных возмущений* начинают с некоторой точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и вводят множество случайных возмущений всех неизвестных $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ для получения большего (или меньшего) значения исследуемой функции F. Рассчитанная при этом точка дает следующее приближение, и поиск продолжается. При этом методе, в отличие от метода чисто случайного поиска, можно использовать свойство непрерывности исследуемой функции. Метод случайных возмущений часто применяется в тех случаях, когда градиентные методы отказывают из-за таких особенностей многомерной области, как «хребты», «ущелья», «плоскогорья» и кратные экстремумы. Дальнейшее развитие этого метода приводит к стратегиям, включающим изменение шага и предпочтение определенных направлений, зависящих от прошлых успехов или промахов.

(d) Условный экстремум (см. также пп. 11.3-4, 11.4-1 и 11.4-3). Задачи на условный экстремум с *уравнениями связей* $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ $(i=1, 2, \ldots, r)$ можно решать методом вспомогательных функций, добавляя к исследуемой функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ член вида $\sum_{i=1}^{r} K_i\,|\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$ или $\sum_{i=1}^{r} K_i\varphi_i^m(x_1, \ldots, x_n)$, где каждый множитель K_i — некоторое большое положительное число при отыскании минимума (отрицательное — при отыскании максимума), а m — четное положительное число. Существуют программы по оптимизации на цифровых ЭВМ, включающие выбор меняющейся стратегии поиска в случае медленной сходимости.

20.2-7. Градиентные методы.

(a) Метод наискорейшего спуска. Выбирают $v_i^{[j]}=-\partial F/\partial x_i$, где все производные вычисляются при $x_i=x_i^{[j]}$, и уменьшают величину шага $\lambda^{[j]}$ по мере приближения к минимуму функции F (рис. 20.2-1).

Для аналитических функций F и малых значений f_i тейлоровское разложение $F(\lambda^{[j]})$ позволяет выбрать оптимальную величину шага

$$\lambda^{[j]}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_k\,\partial x_h}\frac{\partial F}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial x_h}} \quad (j=0, 1, 2, \ldots), \qquad (20.2\text{-}30)$$

где все производные вычисляются при $x_i=x_i^{[j]}$. Параболическая интерполяция функции $F(\lambda^{[j]})$ может оказаться более удобной.

(b) Спуск с вычислением координат градиента. Часто вычисление координат вектора градиента $\partial F/\partial x_k$, необходимых для метода наискорейшего спуска, оказывается невозможным или непрактичным. Тогда указанные производные заменяют разностными отношениями $\Delta F/\Delta x_k$, получаемыми путем поочередного изменения только одного переменного x_k. Так как при этом на каждый шаг расчета в направлении градиента затрачивается n шагов

расчета координат градиента, то предпочитают продолжать расчеты в вычисленном направлении до тех пор, пока больше нельзя уточнить исследуемую функцию, и только после этого снова пересчитывать координаты градиента.

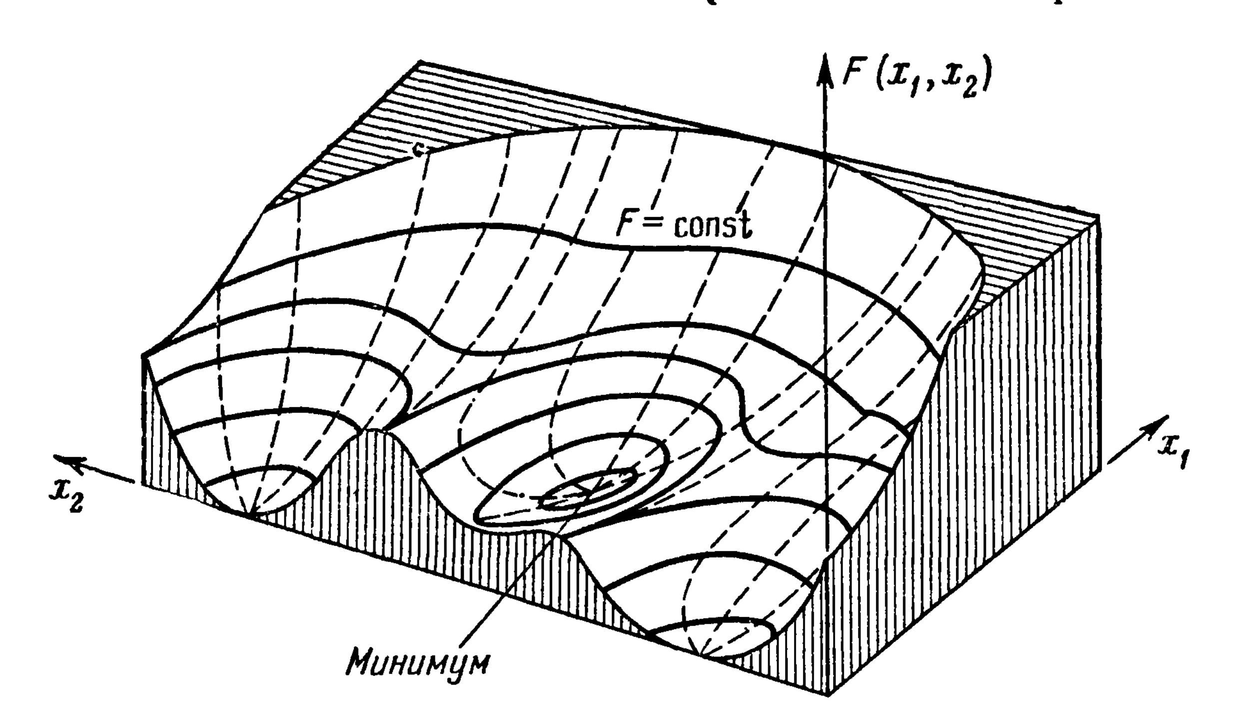


Рис. 20.2-1. График исследуемой на минимум функции в случае двух независимых переменных. Показано три минимума, линии уровня и линии наискорейшего спуска. В этом примере все три минимума функции $F(x_1, x_2)$ имеют одно и то же нулевое значение.

20.2-8. Метод Ньютона и теорема Канторовича (см. также пп. 20.2-2 и 20.9-3).

(а) Метод Ньютона. Выбирая некоторое начальное приближение $x_i^{[0]}$, находят последовательные приближения $x_i^{[j+1]}$ путем решения системы линейных уравнений

$$f_i + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\left(x_k^{[j+1]} - x_k^{[j]}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{20.2-31}$$

где значения функций f_i и частных производных $\partial f_i/\partial x_k$ берутся при $x_k = x_k^{[j]}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

(b) Теорема Канторовича о сходимости. Предположим, что матрица $[\partial f_i/\partial x_k]$ имеет обратную матрицу (п. 13.2-3) $[\partial f_i/\partial x_k]^{-1} \equiv [\Gamma_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ для рассматриваемых значений x_k.

Пусть A, B, C — такие положительные числа (нормы матриц, п. 13.2-1), *что в начальной точке $x_i = x_i^{[0]}$*

$$\max_i \sum_{k=1}^{n} |\Gamma_{ik}| \leqslant A, \qquad \max_i \sum_{k=1}^{n} |\Gamma_{ik} f_k| \leqslant B, \qquad C \leqslant \frac{1}{2AB}. \tag{20.2-32a}$$

Если $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условию

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\,\partial x_k}\right| \leqslant C \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{20.2-32b}$$

для всех точек $(x_1, x_2, \ldots, n)$ в кубической области

$$\max_i \left| x_i - x_i^{[0]} \right| \leqslant \frac{1}{AC}\left(1 - \sqrt{1 - 2ABC}\right), \tag{20.2-33}$$

то система (27) *имеет решение* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *в той же области* (33), *и скорость сходимости оценивается так:*

$$\max_i \left| x_i - x_i^{[j]} \right| \leqslant \frac{B}{2^{J-1}} (2ABC)^{2^{J-1}}. \tag{20.2-34}$$

Это указывает на относительно быструю сходимость.

20.3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦ

20.3-1. Методы исключения.

(а) Решение системы линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \tag{20.3-1}$$

по правилу Крамера (п. 1.9-2) требует слишком большого количества умножений, если $n \geqslant 4$. Излагаемые ниже методы позволяют решить систему (1) путем последовательного исключения неизвестных.

(b) Метод исключения по главным элементам (метод Гаусса). Пусть a_{IJ} — коэффициент, наибольший по абсолютной величине. Чтобы исключить x_J из i-го уравнения ($i \neq I$), умножим I-е уравнение на a_{iJ}/a_{IJ} и вычтем из i-го уравнения. Затем повторяем этот процесс для исключения другого неизвестного из оставшихся $n-1$ уравнений и т. д.

(с) Компактная схема исключения. Находим $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ в указанном порядке из уравнений

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \beta_n \end{array}\right\} \tag{20.3-2}$$

после вычисления элементов следующей $n \times (n+1)$-матрицы:

$$\begin{array}{ccccc|c} \gamma_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ldots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \ldots & \gamma_{nn} & \beta_n \end{array}$$

с помощью рекуррентных формул:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_{i1} = a_{i1} \ (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad \alpha_{1k} = \dfrac{a_{1k}}{a_{11}} \quad (k = 2, 3, \ldots, n), \\ \gamma_{ik} = a_{ik} - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \gamma_{ij}\alpha_{jk} \quad (i, k = 2, 3, \ldots, n; \quad i \geqslant k), \\ \alpha_{ik} = \dfrac{1}{\gamma_{ii}} \left(a_{ik} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij}\alpha_{jk} \right) \quad (i, k = 2, 3, \ldots, n; \ i < k), \\ \beta_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}; \quad \beta_i = \dfrac{1}{\gamma_{ii}} \left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij}\beta_j \right) \quad (i = 2, 3, \ldots, n). \end{array}\right\} \tag{20.3-3}$$

Вычисление определителя производится по формуле

$$\det [a_{ik}] = \gamma_{11}\gamma_{22} \dots \gamma_{nn}. \tag{20.3-4}$$

Компактный метод требует меньшего количества промежуточных записей, чем метод Гаусса, и становится особенно простым, когда матрица $[a_{ik}]$ симметрична ($a_{ki} = a_{ik}$). В этом важном частном случае

$$\alpha_{ik} = \frac{\gamma_{ki}}{\gamma_{ii}} \qquad (i < k). \tag{20.3-5}$$

(d) Матричная запись метода исключения. Метод Гаусса можно толковать как преобразование данной системы (1) вида

$$Ax = b$$

к виду

$$T_n T_{n-1} \dots T_1 Ax = T_n T_{n-1} \dots T_1 b$$

с помощью последовательности неособенных матриц $T_1, T_2, \dots, T_n$, выбираемых так чтобы получающаяся матрица $T_n T_{n-1} \dots T_1 A$ была треугольной матрицей, как в системе (2).

Кроме того, в компактной схеме речь идет об отыскании простой матрицы преобразования T такой, чтобы система $TAx = Tb$ имела треугольную форму (2). Встречаются и другие методы, в которых вместо умножения слева применяется умножение справа.

Некоторые из модифицированных схем, приведенных в литературе [20.5], позволяют уменьшить накопление ошибок округления.

20.3-2. Итерационные методы (см. также пп. 20.2-6 и 20.2-7).

(a) Итерационные методы имеют преимущество перед методами исключения для таких систем линейных уравнений, которые имеют достаточно «разреженную» матрицу $[a_{ik}]$, т. е. для которых многие из a_{ik}, особенно вдали от главной диагонали, равны нулю. Такие системы (и притом очень большие) встречаются в задачах численного интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными (п. 20.9-4).

Излагаемые ниже итерационные методы для системы линейных уравнений (1) с действительными коэффициентами дают последовательные приближения решения x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в виде (20.2-29). Невязки, получаемые на каждом шаге итерации, будем обозначать через

$$f_i^{[j]} \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^{[j]} - b_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n;\ j = 0, 1, 2, \dots). \tag{20.3-6}$$

Замечание. Для многих итерационных схем требуется, чтобы матрица коэффициентов $A \equiv [a_{ik}]$ была нормальна с положительно определенной симметричной частью (п. 13.3-4) или чтобы матрица A была симметричной и положительно определенной (п. 13.5-2). Если для данной матрицы коэффициентов это условие не выполнено, то можно попробовать так переставить или преобразовать данные уравнения, чтобы получить относительно большие диагональные коэффициенты, или можно решать эквивалентную систему

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{hi} a_{ik} x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{hi} b_i \qquad (h = 1, 2, \dots, n), \tag{20.3-7}$$

матрица коэффициентов которой обязательно симметрична и положительно определена, если только матрица A не вырождена.

(b) Простая итерация и итерация Зейделя. Преобразуем данную систему (путем перестановки уравнений и/или умножения их на постоянные) к такому виду, чтобы диагональные коэффициенты a_{ii} были положительными и возможно большими. Начиная с произвольных значений

$x_i^{[0]}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, вычислим последовательные приближения по формуле простой итерации

$$x_i^{[j+1]}=x_i^{[j]}-\frac{1}{a_{ii}}f_i^{[j]}=x_i^{[j]}-\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k^{[j]}-b_i\right)$$

$$(i=1, 2, \ldots, n;\quad j=0, 1, 2, \ldots) \qquad (20.3\text{-}8)$$

или по методу Зейделя

$$x_i^{[j+1]}=x_i^{[j]}-\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}x_k^{[j+1]}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}x_k^{[j]}-b_i\right)$$

$$(i=1, 2, \ldots, n;\quad j=0, 1, 2, \ldots) \qquad (20.3\text{-}9)$$

Обе схемы просты, но могут сходиться медленно или не сходиться совсем. Положительная определенность матрицы $[a_{ik}]$ гарантирует сходимость.

(c) **Методы релаксации** позволяют ускорить сходимость итерационного процесса при вычислении вручную. Начиная с произвольного приближения $x_i^{[0]}$ (обычно просто $x_1^{[0]}=1$, $x_2^{[0]}=x_3^{[0]}=\ldots=x_n^{[0]}=0$), пробуют находить последовательные приближения $x_i^{[j]}$ таким образом, чтобы свести n невязок (6) к нулю. На каждом шаге выписывают невязки $f_i^{[j]}$ и комбинируют следующие методы:

1. *Координатная релаксация.* На каждом шаге «ликвидируют» наибольшую по абсолютной величине невязку $f_I^{[j]}$ путем исправления одного только x_I:

$$x_I^{[j+1]}\approx x_I^{[j]}-\frac{f_I^{[j]}}{a_{II}};\qquad x_i^{[j+1]}=x_i^{[j]}\qquad (i\neq I). \qquad (20.3\text{-}10)$$

Для начальных шагов допустим грубый подсчет $x_I^{[j+1]}$.

2. *Блочная и групповая релаксации.* В некотором множестве («блоке») координат $x_i^{[j]}$ придадим им равные приращения $x_i^{[j+1]}-x_i^{[j]}$ так, чтобы ликвидировать одну из невязок $f_i^{[j+1]}$ или чтобы свести к нулю сумму всех невязок. Этот последний метод применяется, в частности, когда все начальные невязки $f_i^{[0]}$ имеют одинаковый знак.

При *групповой релаксации* для выбранного множества координат $x_i^{[j]}$ приращения могут быть различными.

3. *Сверхрелаксация.* Иногда можно ускорить сходимость релаксации, *изменяя знак* регулируемой невязки и уменьшая ее абсолютную величину, вместо того чтобы полностью ликвидировать ее на данном этапе.

Методы релаксации особенно удобны при решении вручную большого количества простых линейных разностных уравнений, используемых обычно для приближенного решения уравнений с частными производными (п. 20.9-3). Эффективность методов релаксации во многом зависит от навыков и искусства вычислителя, а также от знания им физического существа вопроса.

(d) **Систематическая сверхрелаксация** применяется при решении «разреженных» систем, возникающих в задачах численного интегрирования уравнений с частными производными. Рассмотрим систему уравне-

ний (1), преобразованную так, чтобы все диагональные коэффициенты были равны 1 ($a_{ii}=1$), и заменим итерацию (9) на следующую:

$$x_i^{[j+1]}=x_i^{[j]}-\omega_j\left(\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k^{[j+1]}+\sum_{k=i}^{n} a_{ik}x_k^{[j]}-b_i\right)$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где **сверхрелаксационный множитель** $\omega_j>1$ выбирается для ускорения сходимости. Методы выбора множителей ω_j описаны в [20.5].

(e) Градиентные методы минимизируют некоторую положительную функцию типа

$$F\equiv\sum_{i=1}^{n}|f_i|,\qquad F\equiv\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2,\ \ldots$$

способом, изложенным в п. 20.2-7. Если матрица коэффициентов $[a_{ik}]$ симметрична и положительно определена, можно вести расчет по формулам

$$x_i^{[j+1]}=x_i^{[j]}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(f_k^{[j]}\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{h=1}^{n}a_{kh}f_k^{[j]}f_h^{[j]}}f_i^{[j]}\qquad\begin{pmatrix}i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\\ j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\end{pmatrix}.\qquad(20.3\text{-}11)$$

Если сходимость имеет колеблющийся характер, то ее можно ускорить путем умножения последнего члена формулы (11) на 0,9 при некоторых значениях j.

(f) Метод взаимных градиентов. Пусть дана система линейных уравнений (1) с *действительной, симметричной и положительно определенной матрицей* коэффициентов $[a_{ik}]$, и пусть $x_i^{[0]}$ — начальное приближение. Положим $v_i^{[0]}=f_i^{[0]}$ и вычислим последовательно

$$\left.\begin{aligned}
x_i^{[j+1]}&=x_i^{[j]}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}f_k^{[j]}v_k^{[j]}}{m^{[j]}}v_i^{[j]},\\
f_i^{[j+1]}&=f_i^{[j]}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}f_k^{[j]}v_k^{[j]}}{m^{[j]}}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}v_k^{[j]},\\
v_i^{[j+1]}&=f_i^{[j+1]}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{h=1}^{n}a_{kh}f_k^{[j+1]}v_h^{[j]}}{m^{[j]}}v_i^{[j]}
\end{aligned}\right\}\begin{pmatrix}i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\\ j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\end{pmatrix},\qquad(20.3\text{-}12)$$

где $m^{[j]}=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{h=1}^{n}a_{kh}v_k^{[j]}v_h^{[j]}$. Значения $f_i^{[j]}$ удовлетворяют формуле (6). При отсутствии ошибок округления этот метод дает *точное* решение $x_i=x_i^{[n]}$ после n шагов; сверх того, этот метод имеет все преимущества итерационной схемы, но требует много умножений.

20.3-3. Обращение матриц (см. также пп. 13.2-3 и 14.5-3).

(a) Методы пп. 20.3-1 и 20.3-2 непосредственно применимы для численного обращения данной невырожденной матрицы $A\equiv[a_{ik}]$, а также для вычисления $\det[a_{ik}]$.

(b) Итерационная схема обращения матрицы. Чтобы для данной $(n \times n)$-матрицы A найти обратную матрицу A^{-1}, начинают с произвольной $(n \times n)$-матрицы $X^{(0)}$ (скажем, $X^{[0]} = E$) и вычисляют последовательные приближения

$$X^{[j+1]} = X^{[j]}\left(2E - AX^{[j]}\right) \quad (j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{20.3-13}$$

Если эта последовательность сходится, ее пределом является A^{-1} (см. также п. 20.2-2, b).

(c) (см. также п. 13.4-7). Для каждой невырожденной $(n \times n)$-матрицы A

$$\left.\begin{aligned} &A^{-1} = -\frac{1}{a_n}\left(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \ldots + a_{n-2}A + a_{n-1}E\right),\\ &\text{где}\\ &a_1 = -\operatorname{Tr} A,\\ &a_j = -\frac{1}{j}\left[a_{j-1}\operatorname{Tr} A + a_{j-2}\operatorname{Tr} A^2 + \ldots + a_1 \operatorname{Tr} A^{j-1} + \operatorname{Tr} A^j\right]\\ &\qquad\qquad (j = 2, 3, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{20.3-14}$$

20.3-4. Решение системы линейных уравнений и обращение матриц при помощи разбиения на клетки (см. также п. 13.2-8).

(a) Система линейных уравнений (1) может быть записана в матричной форме (п. 14.5-3):

$$Ax \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \ldots\\ b_n \end{pmatrix} \equiv b. \tag{20.3-15}$$

Уравнение (15) можно преобразовать путем разбиения матриц на клетки:

$$\left.\begin{aligned} &Ax \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1\\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1\\ B_2 \end{pmatrix} \equiv b,\\ &\text{где}\\ &A_{11} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad X_1 \equiv \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_m \end{pmatrix}; \quad B_1 \equiv \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \ldots\\ b_m \end{pmatrix} (m < n). \end{aligned}\right\} \tag{20.3-16}$$

Решение системы *матричных* уравнений

$$\left.\begin{aligned} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 = B_1,\\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 = B_2 \end{aligned}\right\} \tag{20.3-17}$$

приводит к уравнению

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\, X_1 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2, \tag{20.3-18}$$

которое дает m линейных уравнений для первых m неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, если только известна обратная матрица A_{22}^{-1} порядка $n - m$. Этот метод особенно удобен, если надо найти лишь первые m неизвестных.

(b) Обратная матрица A^{-1} получается тоже разбитой на клетки

$$\left.\begin{aligned} &A^{-1} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},\\ &\text{где}\\ &C_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}, \quad C_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}C_{11},\\ &C_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}, \quad C_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}C_{22}, \end{aligned}\right\} \tag{20.3-19}$$

так что обращение матрицы порядка n сводится к обращению двух матриц меньших порядков (m и $n - m$).

20.3-5. Собственные значения и собственные векторы матриц (см. также пп. 13.4-2 — 13.4-6, 14.8-5 и 14.8-9).

(a) Характеристическое уравнение. Собственные значения λ_k матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ порядка n находят как корни характеристического уравнения

$$F_A(\lambda) \equiv \det [a_{ik} - \lambda\delta_{ik}] = 0 \qquad (20.3\text{-}20)$$

одним из методов, описанных в пп. 20.2-1 — 20.2-3. Чтобы избежать непосредственного развертывания определителя, можно вычислить $F_A(\lambda)$ для $n+1$ выбранного значения λ (скажем, $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$), после чего многочлен n-й степени $F_A(\lambda)$ находится по одной из интерполяционных формул п. 20.5-3.

(b) Итерационный метод. Пусть матрица A — эрмитова, так что все ее собственные значения действительны; во многих приложениях A действительна и симметрична. Если наибольшее по модулю собственное значение λ_M — простое, то, начиная с произвольного начального вектора $x^{[0]}$, например, $\{1, 0, 0, \ldots, 0\}$, вычисляют последовательно произведения

$$x^{[j+1]} = \alpha_j A x^{[j]} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (20.3\text{-}21)$$

где α_j — подходящий множитель, выбираемый, например, так, чтобы наибольшая по модулю координата вектора $x^{[j+1]}$ равнялась 1. *При возрастании j векторы $x^{[j]}$ будут приближаться к собственному вектору, принадлежащему доминирующему собственному значению λ_M;* последнее можно вычислить по формуле

$$\lambda_M = \frac{(x, Ax)}{(x, x)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \bar{x}_i x_k}{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}. \qquad (20.3\text{-}22)$$

Этот метод сходится тем быстрее, чем значительнее отличается $|\lambda_M|$ от модулей всех остальных собственных значений матрицы A и чем ближе направление начального вектора $x^{[0]}$ к направлению искомого собственного вектора; если $x^{[0]} = \{1, 0, 0, \ldots, 0\}$ не удовлетворяет этому условию, то пробуют $\{0, 1, 0, \ldots, 0\}$ и т. д. Можно ускорить сходимость путем применения A^2 или A^3 вместо A в формуле (21).

Последующие собственные значения и собственные векторы находят после приведения матрицы (п. 14.8-6). О других методах см. [20.5], [20.9].

Если наибольшее по модулю собственное значение λ_M имеет кратность $m > 1$, то последовательность векторов, определенных формулой (21), сходится к одному из собственных векторов, принадлежащих λ_M. Выбирая различные начальные векторы $x^{[0]}$, можно построить m линейно независимых векторов инвариантного подпространства, принадлежащего λ_M.

(c) Метод вращений. Если дана действительная симметричная матрица $A \equiv [a_{ik}] \equiv A^{[0]}$, то начинаем с исключения недиагонального элемента a_{IK}, имеющего наибольшую абсолютную величину, путем ортогонального преобразования

$$\left.\begin{aligned} & A^{[1]} = T_1^{-1} A^{[0]} T_1, \quad T_1 \equiv (t_{ik}), \\ & \text{где} \\ & t_{ik} = \delta_k^i \left[1 + (\cos\vartheta_1 - 1)\left(\delta_I^i + \delta_K^i\right)\right] + \sin\vartheta_1 \left(\delta_K^i \delta_k^I - \delta_I^i \delta_k^K\right) \\ & \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \\ & \operatorname{tg} 2\vartheta_1 = \frac{2a_{IK}}{a_{II} - a_{KK}} \end{aligned}\right\} \qquad (20.3\text{-}23)$$

(вращение на угол ϑ_1 в плоскости, натянутой на $\mathbf{e}_I$ и $\mathbf{e}_K$, см. также пп. 2.1-6 и 14.10-2, b). Применяя аналогичный прием к $A^{[1]}$, получают $A^{[2]}$ и т. д. Произведение матриц преобразования $T_1\ T_2\ T_3 \ldots$ сходится к некоторой ортогональной матрице, которая приводит матрицу A к диагональному виду, даже если она имеет кратные собственные значения.

20.4. КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

20.4-1. Конечные разности и центральные средние.

(a) Пусть $y=y(x)$ — функция действительного переменного x. Для данного множества равноотстоящих значений аргумента

$$x_k=x_0+k\Delta x \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;\ \Delta x=h>0)$$

и соответствующих значений функции $y_k=y(x_k)=y(x_0+k\Delta x)$ определяют **нисходящие разности** (*для интерполяции вперед*)

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta y_k=y_{k+1}-y_k,\\
&\Delta^2 y_k=\Delta y_{k+1}-\Delta y_k=y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta^r y_k=\Delta^{r-1}y_{k+1}-\Delta^{r-1}y_k=\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}y_{k+r-j}\\
&(r=2,\ 3,\ \ldots;\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)
\end{aligned}\right\}\qquad(20.4\text{-}1)$$

и **восходящие разности** (*для интерполяции назад*)

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla y_k=y_k-y_{k-1}=\Delta y_{k-1},\\
&\nabla^r y_k=\nabla^{r-1}y_k-\nabla^{r-1}y_{k-1}=\Delta^r y_{k-r}\\
&(r=2,\ 3,\ \ldots;\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).
\end{aligned}\right\}\qquad(20.4\text{-}2)$$

Число r называется *порядком разности*.

(b) **Центральные разности** определяются формулами

$$\left.\begin{aligned}
&\delta y_k=y_{k+1/2}-y_{k-1/2}=\Delta y_{k-1/2},\\
&\delta^r y_k=\delta^{r-1}y_{k+1/2}-\delta^{r-1}y_{k-1/2}=\Delta^r y_{k-r/2}\quad(r=2,\ 3,\ \ldots).
\end{aligned}\right\}\qquad(20.4\text{-}3)$$

Центральные средние определяются формулами

$$\left.\begin{aligned}
&\mu y_k=\frac{1}{2}(y_{k-1/2}+y_{k+1/2}),\\
&\mu^r y_k=\frac{1}{2}(\mu^{r-1}y_{k-1/2}+\mu^{r-1}y_{k+1/2})\quad(r=2,\ 3,\ \ldots).
\end{aligned}\right\}\qquad(20.4\text{-}4)$$

Если значения функции $y_k=y(x_0+k\Delta x)$ известны лишь для целых значений k, то центральные разности и центральные средние можно вычислить
для $k=\pm {}^1/_2,\ \pm {}^3/_2,\ \ldots$, если порядок r нечетный, и
для $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, если порядок r четный.

(c) Конечные разности удобно располагать в таблицы таких типов;

$$\begin{array}{llllll}
x_{-1} & y_{-1} & & & & \\
 & & \Delta y_{-1} & & & \\
x_0 & y_0 & & \Delta^2 y_{-1} & & \\
 & & \Delta y_0 & & \Delta^3 y_{-1} & \\
x_1 & y_1 & & \Delta^2 y_0 & & \Delta^4 y_{-1} \\
 & & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 & \\
x_2 & y_2 & & \Delta^2 y_1 & & \\
 & & \Delta y_2 & & & \\
x_3 & y_3 & & & &
\end{array} \qquad (20.4\text{-}5)$$

$$\begin{array}{llllll}
x_{-3} & y_{-3} & & & & \\
 & & \nabla y_{-2} & & & \\
x_{-2} & y_{-2} & & \nabla^2 y_{-1} & & \\
 & & \nabla y_{-1} & & \nabla^3 y_0 & \\
x_{-1} & y_{-1} & & \nabla^2 y_0 & & \nabla^4 y_1 \\
 & & \nabla y_0 & & \nabla^3 y_1 & \\
x_0 & y_0 & & \nabla^2 y_1 & & \\
 & & \nabla y_1 & & & \\
x_1 & y_1 & & & &
\end{array} \qquad (20.4\text{-}6)$$

$$\begin{array}{llllll}
x_{-2} & y_{-2} & & & & \\
 & & \delta y_{-3/2} & & & \\
x_{-1} & y_{-1} & & \delta^2 y_{-1} & & \\
 & & \delta y_{-1/2} & & \delta^3 y_{-1/2} & \\
x_0 & y_0 & & \delta^2 y_0 & & \delta^4 y_0 \\
\hdashline
 & & \delta y_{1/2} & & \delta^3 y_{1/2} & \\
x_1 & y_1 & & \delta^2 y_1 & & \\
 & & \delta y_{3/2} & & & \\
x_2 & y_2 & & & &
\end{array} \qquad (20.4\text{-}7)$$

Заметим, что *вычисление разности порядка r требует знания $r+1$ значения функции и что у многочлена n-й степени разности n-го порядка постоянны.*

20.4-2. Операторные обозначения.

(a) Определения. **Оператор смещения** E для функции $y=y(x)$ действительного переменного x и фиксированного приращения $\Delta x=h$ определяют формулами

$$\mathsf{E}\,y(x)=y(x+\Delta x), \qquad \mathsf{E}^r\,y(x)=y(x+r\Delta x), \qquad (20.4\text{-}8)$$

где r — любое действительное число.

Разностные операторы Δ, ∇, δ и **оператор усреднения** μ определяются так:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\, y(x)&=y(x+\Delta x)-y(x),\\
\nabla\, y(x)&=y(x)-y(x-\Delta x),\\
\delta\, y(x)&=\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)-y\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (20.4\text{-}9)$$

$$\mu\, y(x)=\frac{1}{2}\left[y\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)+y\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]. \qquad (20.4\text{-}10)$$

Заметим, что при $u_k=u(x_0+k\Delta x)$, $v_k=v(x_0+k\Delta x)$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta(u_k+v_k)&=\Delta u_k+\Delta v_k, \quad \Delta(\alpha u_k)=\alpha\Delta u_k,\\
\Delta(u_k v_k)&=v_{k+1}\Delta v_k+v_k\Delta u_k=u_k\Delta v_k+v_{k+1}\Delta u_k=\\
&=u_k\Delta v_k+v_k\Delta u_k+\Delta u_k\Delta v_k.
\end{aligned}\right\} \qquad (20.4\text{-}11)$$

Заметим также, что при $\Delta x = 1$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta x^{[r]} = \Delta\,[x\,(x-1)\,\ldots\,(x-r+1)] = r\,x\,(x-1)\,\ldots\,(x-r+2) = rx^{[r-1]},\\&\Delta\binom{x}{r} = \binom{x}{r-1}\qquad (r = 1,\ 2,\ \ldots).\end{aligned}\right\}\qquad(20.4\text{-}12)$$

(b) Соотношения между операторами (см. также п. 14.3-1):

$$\left.\begin{aligned}&\Delta = \mathsf{E} - 1 = \mathsf{E}\nabla = \mathsf{E}^{1/2}\delta,\qquad \nabla = 1 - \mathsf{E}^{-1} = \mathsf{E}^{-1}\Delta = \mathsf{E}^{-1/2}\delta,\\&\delta = \mathsf{E}^{1/2} - \mathsf{E}^{-1/2} = \mathsf{E}^{-1/2}\Delta = \mathsf{E}^{1/2}\nabla,\qquad \mu = \frac{1}{2}\left(\mathsf{E}^{1/2} + \mathsf{E}^{-1/2}\right),\\&\mathsf{E} = 1 + \Delta,\qquad \nabla\Delta = \Delta\nabla = \delta^2.\end{aligned}\right\}\qquad(20.4\text{-}13)$$

Отметим для памяти

$$\Delta^r = (\mathsf{E} - 1)^r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \mathsf{E}^{r-j}\qquad (r = 1,\ 2,\ \ldots),\qquad(20.4\text{-}14)$$

откуда легко получаются формулы для $\nabla = \mathsf{E}^{-1}\Delta$ и $\delta = \mathsf{E}^{-1/2}\Delta$. Заметим также, что

$$\mathsf{E}^r = (1 + \Delta)^r = 1 + \binom{r}{1}\Delta + \binom{r}{2}\Delta^2 + \ldots\qquad(20.4\text{-}15)$$

Если r — целое и положительное, то ряд (15) конечен; в противном случае его сходимость требует исследования.

(c) Для аналитической функции

$$\mathsf{E}^r = e^{r\,\Delta x\,\mathsf{D}} = 1 + r\,\Delta x\,\mathsf{D} + \frac{1}{2!}(r\,\Delta x\,\mathsf{D})^2 + \ldots\ \left(\mathsf{D} \equiv \frac{d}{dx}\right)\qquad(20.4\text{-}16)$$

(операторное обозначение ряда Тейлора, п. 4.10-4).

20.4-3. Разностные уравнения.

(а) Обыкновенное разностное уравнение порядка r есть уравнение

$$G(x_k,\ y_k,\ y_{k+1},\ \ldots,\ y_{k+r}) \equiv G(x_k,\ y_k,\ \mathsf{E}y_k,\ \ldots,\ \mathsf{E}^r y_k) = 0$$
$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;\ \ r = 1,\ 2,\ \ldots),\qquad(20.4\text{-}17)$$

связывающее значения $y_k = y(x_k) = y(x_0 + k\,\Delta x)$ функции $y = y(x)$ на дискретном множестве значений $x = x_k = x_0 + k\,\Delta x$, где Δx — фиксированное приращение. Часто бывает удобно ввести в качестве новой независимой переменной величину $k = \frac{x - x_0}{\Delta x} = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

Обыкновенное разностное уравнение порядка r можно представить как соотношение, связывающее значение y_k и конечные разности $\Delta^i y_k$, $\nabla^i y_k$ или $\delta^i y_k$ вплоть до порядка r. Разностное уравнение может также связывать y_k **и разностные отношения** $\frac{\Delta^i y_k}{\Delta x^i}$, $\frac{\nabla^i y_k}{\Delta x^i}$ или $\frac{\delta^i y_k}{\Delta x^i}$ вплоть до порядка r.

Решением разностного уравнения (17) называется такая функция $y = y(x)$, что последовательность y_k удовлетворяет данным уравнениям для некоторой области значений k. Общее решение обыкновенного разностного уравнения порядка r содержит, вообще говоря, r произвольных постоянных, которые должны быть определены по начальным, краевым или другим дополнительным условиям, налагаемым на y_k. Решение разностного уравнения в любой конечной области значений k сводится в принципе к решению системы уравнений.

Разностные уравнения применяются: 1) для аппроксимации дифференциальных уравнений (пп. 20.9-2 и 20.9-3) и 2) для решения задач, представляющих модели с дискретными переменными.

Пример: суммирование рядов. Задача решения разностного уравнения первого порядка вида

$$\Delta y_{k-1} = \nabla y_k = \alpha_k \quad \text{или} \quad y_k = y_{k-1} + \alpha_k \tag{20.4-18}$$

с данным начальным значением $y_0 = \alpha_0$ равносильна задаче суммирования ряда (п. 4.8-5)

$$y_k = y_{k-1} + \alpha_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{20.4-19}$$

Эта задача аналогична интегрированию дифференциального уравнения $y' = f(x)$. Операторы Σ и ∇ являются взаимно обратными. Отметим суммирование по частям

$$\sum_{k=m}^{n} u_k \Delta v_k = (u_{n+1}v_{n+1} - u_m v_m) - \sum_{k=m}^{n} v_{k+1}\Delta u_k. \tag{20.4-20}$$

(b) Уравнение с частными разностями связывает значения

$$\Phi_{ij\ldots} = \Phi(x_0 + i\Delta x,\ y_0 + j\Delta y,\ \ldots) \qquad (i, j, \ldots = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

функции $\Phi = \Phi(x, y, \ldots)$; порядок уравнения с частными разностями есть наибольшая разность между значениями i, значениями j, ..., встречающимися в этом уравнении. В п. 20.9-3 приведены формулы, выражающие различные разностные операторы через значения функции $\Phi_{ij\ldots}$, и указано их применение для приближенного решения дифференциальных уравнений с частными производными.

20.4-4. Линейные обыкновенные разностные уравнения.

(a) Структура общего решения (см. также пп. 9.3-1 и 15.4-2). Линейное обыкновенное разностное уравнение порядка r имеет вид

$$a_0(k)\, y_{k+r} + a_1(k)\, y_{k+r-1} + \ldots + a_r(k)\, y_k \equiv$$
$$\equiv [a_0(k)\,\mathsf{E}^r + a_1(k)\,\mathsf{E}^{r-1} + \ldots + a_r(k)]\, y_k = f(k), \tag{20.4-21}$$

где $a_i(k)$ и $f(k)$ — данные функции от $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *Общее решение уравнения* (21) *может быть представлено в виде суммы какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения* («*приведенного*» *уравнения*)

$$[a_0(k)\,\mathsf{E}^r + a_1(k)\,\mathsf{E}^{r-1} + \ldots + a_r(k)]\, y_k = 0. \tag{20.4-22}$$

Любая линейная комбинация решений линейного однородного разностного уравнения (22) *является решением этого уравнения* (*принцип наложения*).

Теория обыкновенных разностных уравнений во многом подобна теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, однородное линейное разностное уравнение (22) *допускает не более* r *решений* $y_{(1)k}, y_{(2)k}, \ldots$, *линейно независимых на множестве* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *Линейная независимость* r *таких решений равносильна требованию, чтобы* **определитель Казоратти**

$$K[y_{(1)k}, y_{(2)k}, \ldots, y_{(r)k}] \equiv \begin{vmatrix} y_{(1)\,k} & y_{(2)\,k} & \ldots & y_{(r)\,k} \\ y_{(1)\,k+1} & y_{(2)\,k+1} & \ldots & y_{(r)\,k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{(1)\,k+r-1} & y_{(2)\,k+r-1} & \ldots & y_{(r)\,k+r-1} \end{vmatrix} \tag{20.4-23}$$

не был тождественно равен нулю при $k = 0, 1, 2, \ldots$ Этот определитель аналогичен определителю Вронского в п. 9.3-2.

Если в неоднородном уравнении (21) правая часть представляет собой линейную комбинацию $f(k) = \alpha f_1(k) + \beta f_2(k)$, то решение y_k этого уравнения есть подобная же линейная комбинация решений, отвечающих правым частям $f_1(k)$ и $f_2(k)$.

(b) Метод вариации произвольных постоянных (см. также п. 9.3-3). Если известны r линейно независимых решений $y_{(1)\,k}, y_{(2)\,k}, \ldots, y_{(r)\,k}$ «*приведенного*» уравнения (22), то общее решение неоднородного линейного разностного уравнения (21) можно найти в виде

$$y_k = C_1(k)\, y_{(1)k} + C_2(k)\, y_{(2)\,k} + \ldots + C_r(k)\, y_{(r)k}, \tag{20.4-24a}$$

где

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{h=1}^{r} y_{(h)\,k+j}\,\Delta C_h(k)=0 \qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,r-1),\\&\sum_{h=1}^{r} y_{(h)\,k+r}\,\Delta C_h(k)=f(k).\end{aligned}\right\} \qquad (20.4\text{-}24b)$$

После решения системы r линейных уравнений (24b) относительно $\Delta C_h(k)$ находим каждое $C_h(k)$ путем суммирования, как в формуле (19).

20.4-5. Линейные обыкновенные разностные уравнения с постоянными коэффициентами (см. также пп. 9.4-1 — 9.4-8). Общее решение линейного *однородного* разностного уравнения

$$a_0 y_{k+r}+a_1 y_{k+r-1}+\ldots+a_r y_k \equiv (a_0\mathrm{E}^r+a_1\mathrm{E}^{r-1}+\ldots+a_r)\,y_k=0 \qquad (20.4\text{-}25)$$

с постоянными коэффициентами $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_r$ имеет вид

$$y_k=C_1\lambda_1^k+C_2\lambda_2^k+\ldots+C_r\lambda_r^k, \qquad (20.4\text{-}26)$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_r$ — корни *характеристического уравнения*

$$a_0\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\ldots+a_r=0, \qquad (20.4\text{-}27)$$

если только все его r корней различны. Если некоторый корень, скажем, λ_1, имеет кратность m, то соответствующий член в решении (26) составляет $(C_1+kC_2+\ldots+k^{m-1}C_m)\,\lambda_1^k$. Если все коэффициенты a_j действительны, то два члена, соответствующих простым комплексно сопряженным корням $\lambda=\rho e^{\pm i\varphi}$, можно заменить на $\rho^k\,(A\cos k\varphi+B\sin k\varphi)$. Коэффициенты $C_j,\ A,\ B,\ \ldots$ должны быть определены по начальным или краевым условиям.

Решение *неоднородного* линейного разностного уравнения

$$a_0 y_{k+r}+a_1 y_{k+r-1}+\ldots+a_r y_k \equiv (a_0\mathrm{E}^r+a_1\mathrm{E}^{r-1}+\ldots+a_r)\,y_k=f(k) \qquad (20.4\text{-}28)$$

можно находить общим методом п. 20.4-4, b, но более удобными могут оказаться специальные методы, излагаемые ниже.

20.4-6. Методы преобразований для линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

(a) Метод **z-преобразования** (см. также пп. 8.7-3 и 9.4-5). Подвергнем обе части разностного уравнения (28) z-преобразованию с помощью теоремы сдвига 2 из таблицы 8.7-2, обозначив через

$$Y_Z(z)=\mathscr{Z}\,[y_k;\ z]\equiv y_0+\frac{y_1}{z}+\frac{y_2}{z^2}+\ldots \qquad (20.4\text{-}29)$$

z-преобразование неизвестного решения — последовательности $y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots$ Это приводит к формуле

$$Y_Z(z)=\frac{F_Z(z)}{a_0z^r+a_1z^{r-1}+\ldots+a_r}+\frac{G_Z(z)}{a_0z^r+a_1z^{r-1}+\ldots+a_r}, \qquad (20.4\text{-}30)$$

где первое слагаемое справа, как и в п. 9.4-5, представляет «нормальную реакцию» на заданное внешнее воздействие — последовательность $f(0),\ f(1),\ f(2),\ \ldots$, а второе слагаемое отражает действие r начальных значений $y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{r-1}$. Здесь

$$\begin{aligned}G_Z(z)\equiv{}& y_0\,(a_0z^r+a_1z^{r-1}+\ldots+a_{r-1}z)+\\&+y_1\,(a_0z^{r-1}+a_1z^{r-2}+\ldots+a_{r-2}z)+\ldots+y_{r-1}a_0z.\end{aligned} \qquad (20.4\text{-}31)$$

Неизвестные y_k могут быть получены либо как коэффициенты при $1/z^k$ в разложении $Y_Z(z)$ по степеням z, либо с помощью таблицы z-преобразова-

ния (таблица 20.4-1). Как и в случае преобразования Лапласа, обращение $Y_Z(z)$ можно упростить с помощью разложения на простейшие дроби, которые представляют «собственные колебания», соответствующие корням характеристического уравнения (27).

Таблица 20.4-1

Краткая таблица z-преобразований и преобразований Лапласа от ступенчатых функций

	Последовательность выбранных значений $y_k = y(k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$	z-преобразование $\mathscr{Z}[y_k;\, z] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_j}{z^j}$	Преобразование Лапласа ступенчатой функции $\mathscr{L}[I_+y(t)] = \frac{1-e^{-s}}{s} \sum_{j=0}^{\infty} y(j)\, e^{-js}$
1	1	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{s}$
2	k	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\frac{1}{s}\frac{1}{e^s-1}$
3	k^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\frac{e^s+1}{s(e^s-1)^2}$
4	$\binom{k}{n}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{z}{(z-1)^{n+1}}$	$\frac{1}{s(e^s-1)^n}$
5	a^k	$\frac{z}{z-a}$	$\frac{e^s-1}{s}\frac{1}{e^s-a}$
6	ka^k	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\frac{e^s-1}{s}\frac{a}{(e^s-a)^2}$
7	$\binom{k}{n} a^{k-n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{z}{(z-a)^{n+1}}$	$\frac{e^s-1}{s}\frac{1}{(e^s-a)^{n+1}}$
8	$\frac{a^k-b^k}{a-b}$ $(a \neq b)$	$\frac{z}{(z-a)(z-b)}$	$\frac{e^s-1}{s}\frac{1}{(e^s-a)(e^s-b)}$
9	$a^k \sin bk$	$\frac{az \sin b}{z^2 - 2az\cos b + a^2}$	$\frac{e^s-1}{s}\frac{a \sin b}{e^{2s} - 2ae^s \cos b + a^2}$
10	$a^k \cos bk$	$\frac{z(z - a\cos b)}{z^2 - 2az\cos b + a^2}$	$\frac{e^s-1}{s}\frac{e^s - a\cos b}{e^{2s} - 2ae^s \cos b + a^2}$

(b) Представление выборочных данных рядами импульсных функций и ступенчатыми функциями. Метод преобразования Лапласа. Если формально ввести асимметричную импульсную функцию $\delta_+(t)$, то последовательность выборочных значений $y_0, y_1, y_2, \ldots$ можно представлять (и притом взаимно однозначно) **рядом импульсных функций**

$$y^*(t) = y_0\,\delta_+(t) + y_1\delta_+(t-T) + y_2\delta_+(t-2T) + \ldots \qquad (t > 0), \qquad (20.4\text{-}32)$$

где T — положительная постоянная (*выборочный интервал*).

Если две последовательности выборочных значений $y_0, y_1, y_2, \ldots$ и $f(0), f(1), f(2), \ldots$ удовлетворяют разностному уравнению (28), то соответствующие *функции* $y^*(t)$ и $f^*(t)$ удовлетворяют *функциональному уравнению* (разностному уравнению для функций):

$$a_0 y^*(t + rT) + a_1 y^*[t + (r-1)T] + \ldots + a_r y^*(t) = f^*(t) \qquad (t > 0) \qquad (20.4\text{-}33)$$

с определенными начальными условиями.

К уравнению (33) можно применить *формальное преобразование Лапласа импульсных функций* (п. 8.5)

$$\mathscr{L}[y^*(t);\,s] \equiv \mathscr{L}[y^*(t)] = y_0 + y_1 e^{-Ts} + y_2 e^{-2Ts} + \ldots \tag{20.4-34}$$

При этом

$$\mathscr{L}[y^*(t+kT)] = e^{kTs}\left\{\mathscr{L}[y^*(t)] - (y_0 + y_1 e^{-Ts} + \ldots + y_{k-1} e^{-(k-1)Ts})\right\}.$$

Изложенный метод преобразования аналогичен методу z-преобразования с $z = e^{Ts}$ (дискретное преобразование Лапласа; п. 8.7-3).

Вместо того чтобы применять обобщенные функции, можно представить последовательность $y_0, y_1, y_2, \ldots$ с помощью соответствующей **ступенчатой функции** (см. п. 21.9-1)

$$\rceil_+ y(t) = \int_0^t y^*(\lambda)\,d\lambda = y_k \text{ при } kT < t \leqslant (k+1)\,T \quad (t > 0;\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{20.4-35}$$

Функции $\rceil_+ y(t)$ и $\rceil_+ f(t)$ удовлетворяют тому же функциональному уравнению, что и $y^*(t)$ и $f^*(t)$, так что снова допустимо преобразование Лапласа.

Отметим формулы

$$\mathscr{L}\left[\rceil_+ y(t)\right] = \frac{1-e^{-Ts}}{s}(y_0 + y_1 e^{-Ts} + \ldots) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}\mathscr{L}[y^*(t)],$$

$$\mathscr{L}\left[\rceil_+ y(t+kT)\right] = e^{kTs}\left\{\mathscr{L}\left[\rceil_+ y(t)\right] - \frac{1-e^{-Ts}}{s}\sum_{j=0}^{k-1} y_j e^{-jTs}\right\}.$$

В табл. 20.4-1 приведены пары преобразований Лапласа для некоторых ступенчатых функций; при этом принято, что $T = 1$.

20.4-7. Системы обыкновенных разностных уравнений. Матричная запись. Как и в случае дифференциальных уравнений, можно рассматривать **систему обыкновенных разностных уравнений**, содержащую две или более неизвестных функций $y(x_k) = y_k$, $z(x_k) = z_k$, ... Любое разностное уравнение (17) порядка r можно привести к системе r уравнений первого порядка введением новых переменных $\mathrm{E}^i y_k$ или $\Delta^i y_k$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1)$.

Так же, как в п. 13.6-1, система *линейных* разностных уравнений первого порядка (рекуррентных соотношений)

$$\left.\begin{aligned} y_{k+1} &= a_{11} y_k + a_{12} z_k + \ldots + f_1(k), \\ z_{k+1} &= a_{21} y_k + a_{22} z_k + \ldots + f_2(k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{20.4-36a}$$

с постоянными коэффициентами a_{ij} может быть записана в матричной форме (см. также п. 14.5-3):

$$Y_{k+1} = AY_k + F(k), \tag{20.4-36b}$$

где $Y_k \equiv \{y_k,\ z_k,\ \ldots\}$, $F(k) \equiv \{f_1(k),\ f_2(k),\ \ldots\}$ — векторы (матрицы-столбцы), а $A \equiv [a_{ij}]$. Если дано $Y_0 \equiv \{y_0,\ z_0,\ \ldots\}$, то решением является

$$Y_k = A^k Y_0 + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} F(h), \tag{20.4-37}$$

где матрица A^k, по аналогии с п. 13.6-2, b, называется **матрицей изменения состояния** для системы (36). Степени матрицы A^k, нужные для решения, могут быть вычислены с помощью теоремы Сильвестра (п. 13.4-7, b), так что каждое собственное значение матрицы A, т. е. корень характеристического уравнения

$$\det[A - \lambda E] = 0, \tag{20.4-38}$$

снова соответствует собственным колебаниям (см. также пп. 13.6-2 и 20.4-5).

Этот метод применим, в частности, к решению линейного разностного уравнения (28) порядка r, если оно сначала приведено к системе вида (36) путем введения $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{k+r-1}$ в качестве новых переменных, так что

$$\left.\begin{aligned} &Y_k \equiv \{y_{k+r-1}, y_{k+r-2}, \ldots, y_k\}, \\ &F(k) \equiv \left\{\frac{1}{a_0} f(k), 0, 0, \ldots, 0\right\}, \\ &A \equiv \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & \ldots & -\frac{a_{r-1}}{a_0} & -\frac{a_r}{a_0} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad (20.4\text{-}39)$$

20.4-8. Устойчивость.

(a) Аналогично п. 9.4-4, линейное разностное уравнение (28) или система (36) с постоянными коэффициентами называется **устойчивой**, *если все корни соответствующего характеристического уравнения* (27) *или* (38) *по абсолютной величине меньше единицы*. При этом действие малых изменений начальных условий затухает (стремится к 0) при возрастании k.

Имеется признак устойчивости, аналогичный условию Раусса—Гурвица (п. 1.6-6, b) для корней с отрицательной действительной частью.

(b) Определение устойчивости и асимптотической устойчивости решений по Ляпунову (п. 13.6-5) и соответствующие теоремы (п. 13.6-6) легко распространяются на решения Y_0, Y_1, Y_2, ... линейных и нелинейных автономных систем разностных уравнений

$$Y_{k+1} = F(Y_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (20.4\text{-}40)$$

Условия типа $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$ для функций Ляпунова $V(y)$ непрерывного аргумента просто превращаются в условия $\Delta V(Y_k) \leqslant 0$ для функции Ляпунова $V(Y_k)$ дискретного аргумента.

20.5. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ

20.5-1. Вводные замечания (см. также пп. 12.5-4, b и 15.2-5). **Интерполяционная формула** сопоставляет с функцией $y(x)$ функцию известного класса $Y(x) \equiv Y(x; \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, зависящую от $n+1$ параметров α_j, выбранных так, чтобы значения $Y(x)$ совпадали со значениями $y(x)$ для данного множества $n+1$ значений аргумента x_k (узлов интерполяции):

$$Y(x_k) = y(x_k) = y_k.$$

В пп. 20.5-2—20.5-6 излагается *параболическая интерполяция*. Другие интерполяционные методы рассматриваются в пп. 20.5-7 и 20.6-6.

Применение интерполяции (и, в частности, интерполяционных многочленов) не всегда оправдано. В случае эмпирических функций может оказаться желательным *сглаживание* колебаний $y(x_k)$, вызванных случайными ошибками, например, *посредством аппроксимации по методу наименьших квадратов.*

20.5-2. Общие формулы параболической интерполяции (значения аргумента могут быть и неравноотстоящими). Интерполяционная формула n-го порядка аппроксимирует функцию $y(x)$ многочленом n-й степени $Y(x)$, удовлетворяющим условиям $Y(x_k) = y(x_k) = y_k$ в $n+1$ узлах интерполяции—точках x_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

(a) Интерполяционная формула Лагранжа

$$Y(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}y_1 + \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n. \qquad (20.5\text{-}1)$$

(b) Разделенные разности и интерполяционная формула Ньютона. **Разделенные разности** определяются так:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_1(x_0, x_1) \equiv \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}, \\ &\Delta_r(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r) \equiv \frac{\Delta_{r-1}(x_1, x_2, \ldots, x_r) - \Delta_{r-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{r-1})}{x_r - x_0} \\ &\qquad (r = 2, 3, \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (20.5\text{-}2)$$

Интерполяционная формула Ньютона имеет вид

$$Y(x) = y_0 + (x-x_0)\Delta_1(x_0, x_1) + (x-x_0)(x-x_1)\Delta_2(x_0, x_1, x_2) + \ldots + \prod_{k=0}^{n-1}(x-x_k)\Delta_n(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (20.5\text{-}3)$$

В отличие от формулы (1), прибавление новой пары значений (x_{n+1}, y_{n+1}) сводится здесь просто к прибавлению одного нового члена. Разделенные разности (2) для формулы (3) удобно записывать в таблицу того же типа, что (20.4-5).

Нахождение разделенных разностей есть линейная операция (п. 15.2-7) над $y(x)$. Каждая функция (2) вполне симметрична по всем своим аргументам.

(c) Итерационно-интерполяционный метод Эйткена. Если требуется найти лишь значения интерполяционного многочлена $Y(x)$, а не его представление, то может быть применена следующая схема. Пусть $Y_{ijk\ldots}$ — интерполяционный многочлен, определяемый парами (x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k), ..., так что

$$Y_{012\ldots n} = Y(x).$$

Интерполяционные многочлены возрастающих степеней могут быть получены последовательно так:

$$Y_{01} = \frac{1}{x_1-x_0}\begin{vmatrix} x-x_0 & y_0 \\ x-x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \qquad Y_{12} = \frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix} x-x_1 & y_1 \\ x-x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \ldots$$

$$Y_{012} = \frac{1}{x_2-x_0}\begin{vmatrix} x-x_0 & Y_{01} \\ x-x_2 & Y_{12} \end{vmatrix}, \ldots, \quad Y_{0123} = \frac{1}{x_3-x_0}\begin{vmatrix} x-x_0 & Y_{012} \\ x-x_3 & Y_{123} \end{vmatrix}, \ldots$$

. . . .

Этот процесс можно закончить, когда у значений двух интерполяционных многочленов последовательных степеней совпадет требуемое количество знаков.

(d) Остаточные члены. Если $y(x)$ достаточное число раз дифференцируема, то для интерполяционной формулы, базирующейся на $n+1$ значениях функции $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$, **остаточный член** (ошибка интерполяции) может быть записан в виде

$$R_{n+1}(x) \equiv y(x) - Y(x) = \frac{1}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi)\prod_{k=0}^{n}(x-x_k), \qquad (20.5\text{-}4)$$

где ξ лежит в наименьшем интервале I, содержащем все точки $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ и x (см. также п. 4.10-4; вообще говоря, ξ зависит от x). Отсюда следует оценка

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \max_{X \in I} |y^{(n+1)}(X)| \prod_{k=0}^{n} |x-x_k|. \tag{20.5-5}$$

20.5-3. Интерполяционные формулы для равноотстоящих значений аргумента. Ромбовидные диаграммы. Пусть $y_k = y(x_k)$, $x_k = x_0 + k\,\Delta x$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, где Δx — фиксированное приращение, как в п. 20.4-1; введем обозначение

$$\frac{x-x_0}{\Delta x} = u.$$

(a) Интерполяционные формулы Ньютона. Если даны $y_0, y_1, y_2, \ldots$ или $y_0, y_{-1}, y_{-2}, \ldots$, то из формулы (3) получаем соответственно

$$\left.\begin{aligned} Y(x) &= y_0 + \frac{u}{1!}\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots, \\ Y(x) &= y_0 + \frac{u}{1!}\nabla y_0 + \frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{20.5-6}$$

Первая формула применяется для интерполирования «вперед», а вторая для интерполирования «назад».

(b) Интерполяционные формулы с центральными разностями. Табл. 20.5-1 дает наиболее употребительные интерполяционные формулы для того случая, когда заданы значения $y_0, y_1, y_2, \ldots$ и $y_{-1}, y_{-2}, \ldots$ (см. также рис. 20.5-1). Заметим, что формулы Эверетта и Стеффенсена удобны при работе с такими таблицами, для которых проще составлять таблицы разностей только четного или только нечетного порядков.

Коэффициенты всех указанных выше формул приведены в табл. 20.5-2.

(c) Применение ромбовидной диаграммы. Многие интерполяционные формулы можно получить с помощью ромбовидной диаграммы (диаграммы Фрезера), приведенной на рис. 20.5-1. Некоторые более сложные интерполяционные формулы (например, формулу Эверетта) можно получить, усредняя несколько эквивалентных интерполяционных многочленов.

20.5-4. Обратная интерполяция.

(a) По данным значениям

$$x_k = x_0 + k\Delta x, \quad y_k = y(x_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

требуется найти заключенное между x_0 и x_1 значение ξ аргумента x, соответствующее данному значению η функции $y(x)$; Δx предполагается настолько малым, чтобы ξ было единственным. Можно применить общую формулу (1) или (3), меняя ролями x и y. Вместо этого можно применить одну из итерационных схем п. 20.2-2 для решения уравнения

$$Y(\xi) - \eta = 0,$$

где $Y(x)$ — подходящий интерполяционный многочлен, аппроксимирующий $y(x)$; для первого шага итерации применяют линейную интерполяцию, для второго шага — квадратичную и т. д. Наиболее удобен итерационно-интерполяционный метод Эйткена (п. 20.5-2, с), в котором надо поменять местами x и y.

(b) Обратная интерполяция с помощью обращения рядов. Применяя любую подходящую интерполяционную формулу в виде степенного ряда

$$Y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \approx y,$$

получаем

$$\left.\begin{aligned} &x \approx \frac{y-a_0}{a_1} + C_2\left(\frac{y-a_0}{a_1}\right)^2 + \ldots, \\ &\text{где} \\ &C_2 = -\frac{a_2}{a_1}, \quad C_3 = -\frac{a_3}{a_1} + 2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2, \\ &C_4 = -\frac{a_4}{a_1} + 5\,\frac{a_2 a_3}{a_1^2} - 5\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{20.5-7}$$

Таблица 20.5-1

Интерполяционные формулы с центральными разностями

Дано нечетное число $n+1=2m+1$ значений функции $y_k = y(x_0 + k\,\Delta x)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m)$,

где Δx — фиксированное приращение; $u = \dfrac{x-x_0}{\Delta x}$

№	Название формулы	Интерполяционный многочлен $Y(x)$	Остаточный член [1] $R_{n+1}(x) \equiv R_{2m+1}(x)$
1	**Стирлинга** [2]	$y_0 + \sum\limits_{k=0}^{m-1} \binom{u+k}{2k+1} \dfrac{\delta^{2k+1}y_{-1/2} + \delta^{2k+1}y_{1/2}}{2} + \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{u}{2k} \binom{u+k-1}{2k-1} \delta^{2k} y_0$	$\binom{u+m}{2m+1} y^{(2m+1)}(\xi)\,\Delta x^{2m+1}$
2	**Бесселя** [3]	$\dfrac{y_0+y_1}{2} + \sum\limits_{k=0}^{m-1} \dfrac{u-1/2}{2k+1} \binom{u+k-1}{2k} \delta^{2k+1} y_{1/2} + \sum\limits_{k=1}^{m-1} \binom{u+k-1}{2k} \dfrac{\delta^{2k}y_0 + \delta^{2k}y_1}{2}$	$\binom{u+m-1}{2m} y^{(2m)}(\xi)\,\Delta x^{2m}$
3	**Эверетта** [2]	$(1-u)\,y_0 + uy_1 + \sum\limits_{k=1}^{m-1} \left\{ \binom{u+k}{2k+1} \delta^{2k} y_1 - \binom{u+k-1}{2k+1} \delta^{2k} y_0 \right\}$	$\binom{u+m-1}{2m} y^{(2m)}(\xi)\,\Delta x^{2m}$
4	**Стеффенсена**	$y_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} \left\{ \binom{u+k}{2k} \delta^{2k-1} y_{1/2} - \binom{k-u}{2k} \delta^{2k-1} y_{-1/2} \right\}$	$\binom{u+m}{2m+1} y^{(2m+1)}(\xi)\,\Delta x^{2m+1}$

[1]) ξ лежит в наименьшем интервале, содержащем x и все применяемые узлы интерполяции.

[2]) Заметим, что $\binom{u+k}{2k+1} = \dfrac{u(u^2-1)(u^2-2^2)\ldots(u^2-k^2)}{(2k+1)!}$.

[3]) *Модифицированная формула Бесселя* дает простейший многочлен, учитывающий влияние разностей до 6-го порядка:

$$Y(x) = y_0 + u\delta y_{1/2} + \frac{u(u-1)}{2}\,\frac{\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1}{2} + \frac{u(u-1/2)(u-1)}{6}\left(\delta^3 y_{1/2} - \frac{13}{120}\,\delta^5 y_{1/2}\right) + \frac{(u+2)(u^2-1)\,u}{24}\left(\frac{\delta^4 y_0 + \delta^4 y_1}{2} - \frac{191}{924}\,\frac{\delta^6 y_0 + \delta^6 y_1}{2}\right).$$

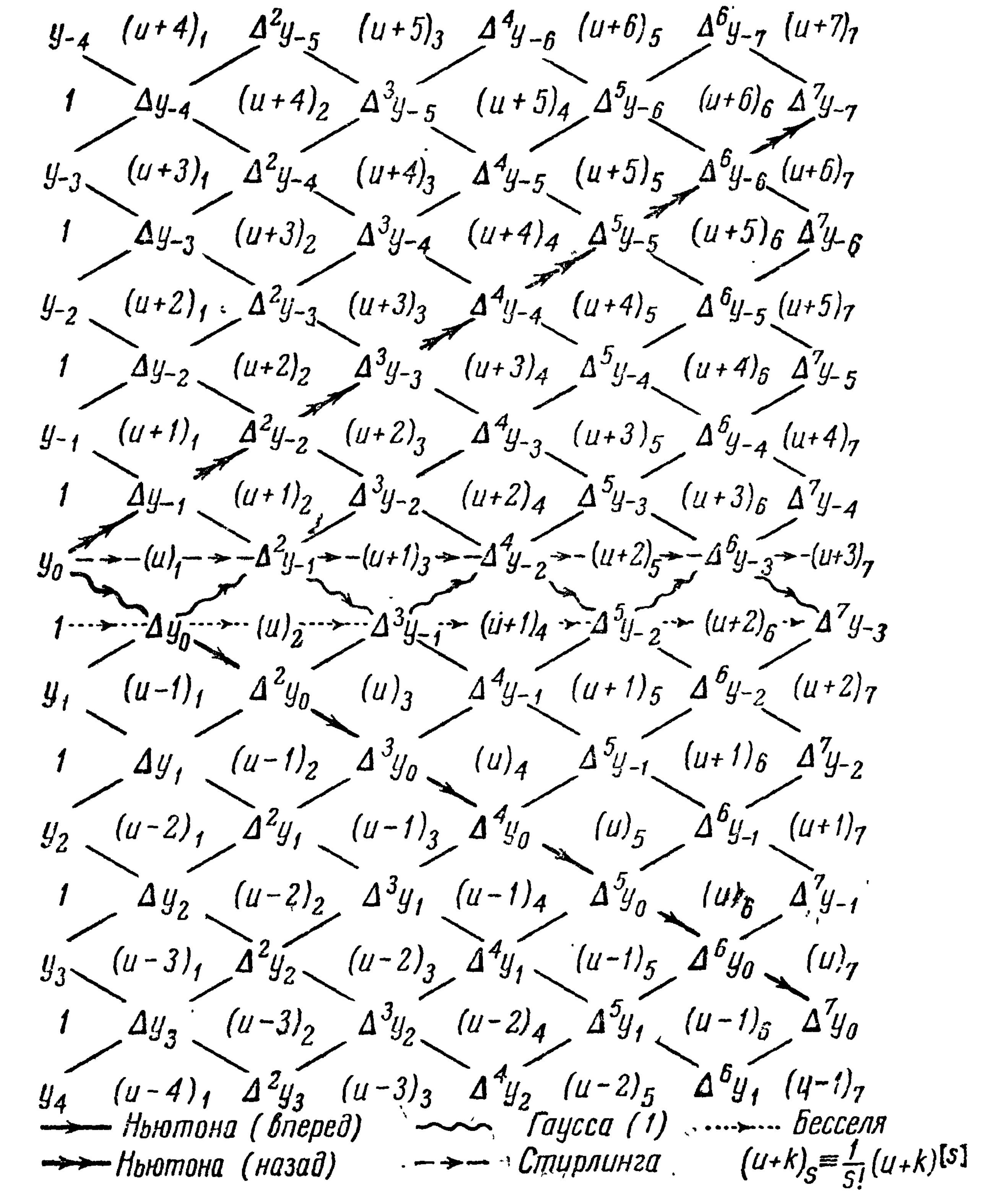


Рис. 20.5-1. Ромбовидная диаграмма для интерполяционных формул. Сокращенное обозначение

$$(u+k)_s \equiv \frac{1}{s!}(u+k)^{[s]} = \binom{u+k}{s}.$$

Для получения интерполяционной формулы вдоль некоторого пути диаграммы применяются следующие правила:

1. Когда столбец разностей пересекается слева направо, добавляется один член.
2. Если путь входит (слева) в некоторый столбец разностей с положительным наклоном, то добавочный член равен произведению разности, стоящей на пересечении пути и столбца, скажем, $\Delta^k y_{-p}$, на коэффициент $(u+p-1)_k$, лежащий точно *под* этой разностью.
3. Если путь входит (слева) в некоторый столбец разностей с отрицательным наклоном, то добавочный член равен произведению разности, стоящей на пересечении пути и столбца, скажем, $\Delta^k y_{-p}$, на коэффициент $(u+p)_k$, лежащий точно *над* этой разностью.
4. Если путь входит (слева) в некоторый столбец разностей горизонтально, то добавочный член равен произведению разности, стоящей на пересечении пути и столбца, скажем, $\Delta^k y_{-p}$, на среднее арифметическое двух коэффициентов $(u+p)_k$ и $(u+p-1)_k$, лежащих соответственно точно *над* и *под* этой разностью.
5. Если путь пересекает (слева направо) столбец разностей между двумя разностями, скажем, $\Delta^k y_{-(p+1)}$ и $\Delta^k y_{-p}$, то добавочный член равен произведению среднего арифметического этих двух разностей на коэффициент $(u+p)_k$, стоящий на пересечении пути и столбца.
6. Каждая часть пути, проходимая справа налево, вызывает те же самые члены, что и при прохождении слева направо, но с противоположным знаком.
7. Со столбцом табличных значений функции можно обращаться, как со столбцом разностей нулевого порядка, по тем же правилам, что и с остальными столбцами разностей, если только ромб входит точно в этот столбец (левым концом). Таким образом, этот столбец может пересекаться путем, образующим положительный, отрицательный или нулевой наклон, как и с остальными столбцами.

Таблица 20.5-2

Коэффициенты интерполяционных формул

Интерполяционная формула Лагранжа по пяти точкам

$$f_s \approx L_{-2}(s)\, f_{-2} + L_{-1}(s)\, f_{-1} + L_0(s)\, f_0 + L_1(s)\, f_1 + L_2(s)\, f_2.$$

Для отрицательных s обозначения столбцов указаны внизу

s	$L_{-2}(s)$	$L_{-1}(s)$	$L_0(s)$	$L_1(s)$	$L_2(s)$	
0,0	0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,0
0,1	0,007838	—0,059850	0,987525	0,073150	—0,008663	—0,1
0,2	0,014400	—0,105600	0,950400	0,158400	—0,017600	—0,2
0,3	0,019338	—0,136850	0,889525	0,254150	—0,026163	—0,3
0,4	0,022400	—0,153600	0,806400	0,358400	—0,033600	—0,4
0,5	0,023438	—0,156250	0,703125	0,468750	—0,039063	—0,5
0,6	0,022400	—0,145600	0,582400	0,582400	—0,041600	—0,6
0,7	0,019338	—0,122850	0,447525	0,696150	—0,040163	—0,7
0,8	0,014400	—0,089600	0,302400	0,806400	—0,033600	—0,8
0,9	0,007838	—0,047850	0,151525	0,909150	—0,020663	—0,9
1,0	0,000000	0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	—1,0
1,1	—0,008663	0,051150	—0,146475	1,074150	0,029838	—1,1
1,2	—0,017600	0,102400	—0,281600	1,126400	0,070400	—1,2
1,3	—0,026163	0,150150	—0,398475	1,151150	0,123338	—1,3
1,4	—0,033600	0,190400	—0,489600	1,142400	0,190400	—1,4
1,5	—0,039063	0,218750	—0,546875	1,093750	0,273438	—1,5
1,6	—0,041600	0,230400	—0,561600	0,998400	0,374400	—1,6
1,7	—0,040163	0,220150	—0,524475	0,849150	0,495338	—1,7
1,8	—0,033600	0,182400	—0,425600	0,638400	0,638400	—1,8
1,9	—0,020663	0,111150	—0,254475	0,358150	0,805838	—1,9
2,0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	1,000000	—2,0
	$L_2(s)$	$L_1(s)$	$L_0(s)$	$L_{-1}(s)$	$L_{-2}(s)$	s

Примечание. Все коэффициенты становятся точными, если заменить каждую конечную цифру 8 на 75, а 3 на 25.

Интерполяционная формула Стирлинга

$$f_s \approx f_0 + s\mu\delta f_0 + C_2(s)\, \delta^2 f_0 + C_3(s)\, \mu\delta^3 f_0 + C_4(s)\, \delta^4 f_0$$

s	$C_2(s)$	$C_3(s)$	$C_4(s)$	s
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,0
0,1	0,00500	—0,01650 *)	—0,00041	—0,1
0,2	0,02000	—0,03200 *)	—0,00160	—0,2
0,3	0,04500	—0,04550 *)	—0,00341	—0,3
0,4	0,08000	—0,05600 *)	—0,00560	—0,4
0,5	0,12500	—0,06250 *)	—0,00781	—0,5
0,6	0,18000	—0,06400 *)	—0,00960	—0,6
0,7	0,24500	—0,05950 *)	—0,01041	—0,7
0,8	0,32000	—0,04800 *)	—0,00960	—0,8
0,9	0,40500	—0,02850 *)	—0,00641	—0,9
1,0	0,50000	0,00000	0,00000	—1,0

*) Для s из правого столбца надо изменить знак.

Таблица 20.5-2 (*продолжение*)

Интерполяционная формула Ньютона

$$f_s \approx f_0 + s\,\Delta f_0 + C_2(s)\,\Delta^2 f_0 + C_3(s)\,\Delta^3 f_0 + C_4(s)\,\Delta^4 f_0 + C_5(s)\,\Delta^5 f_0,$$

$$f_{n-s} \approx f_n - s\nabla f_n + C_2(s)\,\nabla^2 f_n - C_3(s)\,\nabla^3 f_n + C_4(s)\,\nabla^4 f_n - C_5(s)\,\nabla^5 f_n$$

(для интерполяции надо брать положительные s)

s	$C_2(s)$	$C_3(s)$	$C_4(s)$	$C_5(s)$
−1,0	1,00000	−1,00000	1,00000	−1,00000
−0,9	0,85500	−0,82650	0,80584	−0,78972
−0,8	0,72000	−0,67200	0,63840	−0,61286
−0,7	0,59500	−0,53550	0,49534	−0,46562
−0,6	0,48000	−0,41600	0,37440	−0,34445
−0,5	0,37500	−0,31250	0,27344	−0,24609
−0,4	0,28000	−0,22400	0,19040	−0,16755
−0,3	0,19500	−0,14950	0,12334	−0,10607
−0,2	0,12000	−0,08800	0,07040	−0,05914
−0,1	0,05500	−0,03850	0,02984	−0,02447
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	−0,04500	0,02850	−0,02066	0,01612
0,2	−0,08000	0,04800	−0,03360	0,02554
0,3	−0,10500	0,05950	−0,04016	0,02972
0,4	−0,12000	0,06400	−0,04160	0,02995
0,5	−0,12500	0,06250	−0,03906	0,02734
0,6	−0,12000	0,05600	−0,03360	0,02285
0,7	−0,10500	0,04550	−0,02616	0,01727
0,8	−0,08000	0,03200	−0,01760	0,01126
0,9	−0,04500	0,01650	−0,00866	0,00537
1,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Интерполяционная формула Бесселя

$$f_s \approx \mu f_{1/2} + \left(s - \frac{1}{2}\right)\delta f_{1/2} + C_2(s)\,\mu\delta^2 f_{1/2} + C_3(s)\,\delta^3 f_{1/2} + C_4(s)\,\mu\delta^4 f_{1/2} + C_5(s)\,\delta^5 f_{1/2}$$

s	$C_2(s)$	$C_3(s)$	$C_4(s)$	$C_5(s)$	s
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,0
0,1	−0,04500	0,00600 *)	0,00784	−0,00063 *)	0,9
0,2	−0,08000	0,00800 *)	0,01440	−0,00086 *)	0,8
0,3	−0,10500	0,00700 *)	0,01934	−0,00077 *)	0,7
0,4	−0,12000	0,00400 *)	0,02240	−0,00045 *)	0,6
0,5	−0,12500	0,00000	0,02344	0,00000	0,5

*) Для s из правого столбца надо изменить знак.

Таблица 20.5-2 (*продолжение*)

Интерполяционная формула Эверетта

$$f_s \approx (1-s) f_0 + C_2(s)\,\delta^2 f_0 + C_4(s)\,\delta^4 f_0 + s f_1 + C_2(1-s)\,\delta^2 f_1 + C_4(1-s)\,\delta^4 f_1$$

s	$C_2(s)$	$C_4(s)$	s	$C_2(s)$	$C_4(s)$
0,0	0,00000	0,00000	0,6	—0,05600	0,01075
0,1	—0,02850	0,00455	0,7	—0,04550	0,00890
0,2	—0,04800	0,00806	0,8	—0,03200	0,00634
0,3	—0,05950	0,01044	0,9	—0,01650	0,00329
0,4	—0,06400	0,01165	1,0	0,00000	0,00000
0,5	—0,06250	0,01172			

Интерполяционная формула Стеффенсена

$$f_s \approx f_0 + C_1(s)\,\delta f_{1/2} + C_3(s)\,\delta^3 f_{1/2} - C_1(-s)\,\delta f_{-1/2} - C_3(-s)\,\delta^3 f_{-1/2}$$

s	$C_1(s)$	$C_3(s)$	s	$C_1(s)$	$C_3(s)$
—0,5	—0,12500	0,02344	0,1	0,05500	—0,00866
—0,4	—0,12000	0,02240	0,2	0,12000	—0,01760
—0,3	—0,10500	0,01934	0,3	0,19500	—0,02616
—0,2	—0,08000	0,01440	0,4	0,28000	—0,03360
—0,1	—0,04500	0,00784	0,5	0,37500	—0,03906
0,0	0,00000	0,00000			

20.5-5. Интерполяция с оптимальным выбором узлов (см. также п. 20.7-3). Многочлен $Y(x)$ степени n, который совпадает с $y(x)$ в $n+1$ точках $x = x_j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ на $[a, b]$ таких, что $\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \prod\limits_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|$ будет иметь наименьшее значение, приближенно минимизирует максимум абсолютной величины ошибки интерполяции (4) на $[a, b]$. Такой многочлен $Y(x)$ дается формулой

$$\left.\begin{aligned} Y(x) &= \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k T_k\left(\frac{2x-b-a}{b-a}\right), \\ &\text{где} \\ A_k &= \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^{n} y(x_j) \cos\frac{(2j+1)k\pi}{2n+2} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{20.5-8a}$$

$T_k(\xi)$ — многочлен Чебышева степени k (п. 21.7-4),

$$x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\frac{(2j+1)\pi}{2n+2} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{20.5-8b}$$

20.5-6. Интерполяция функций нескольких переменных. Для аппроксимации функции $z = z(x, y)$ многочленом $Z(x, y)$, удовлетворяющим условию $Z(x, y) = z(x, y)$ на заданном множестве точек (x_i, y_k), можно сначала интерполировать по x функцию $z(x, y_k)$ при фиксированных y_k, а затем интерполировать относительно x, что даст $Z(x, y)$.

Другой путь заключается в подстановке в интерполяционную формулу по y интерполяционной формулы относительно x. Если $\Delta x = \Delta y = h$ — фиксированное приращение и

$$\left.\begin{aligned} &z(x_0 + j\,\Delta x,\ y_0 + k\,\Delta y) = z_{jk} \quad (j,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \\ &u = \frac{x - x_0}{\Delta x}, \quad v = \frac{y - y_0}{\Delta y}, \end{aligned}\right\} \tag{20.5-9}$$

то, дважды применяя интерполяционную формулу Бесселя из табл. 20.5-1, получаем формулу Бесселя интерполяции по двум переменным:

$$Z(x, y) = \frac{1}{4}(z_{00} + z_{10} + z_{01} + z_{11}) + \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{2}\right)(z_{10} - z_{00} + z_{11} - z_{01}) + \\ + \frac{1}{2}\left(v - \frac{1}{2}\right)(z_{01} - z_{00} + z_{11} - z_{10}) + \left(u - \frac{1}{2}\right)\left(v - \frac{1}{2}\right)(z_{11} - z_{10} - z_{01} + z_{00}) + \ldots \tag{20.5-10}$$

Аналогичные методы применяются для функций трех и более переменных. См. также [20.1].

20.5-7. **Обратные разности и интерполяция рациональными дробями.** Пусть $y(x_k) = y_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, где $x_0, x_1, x_2, \ldots$ — произвольные узлы интерполяции; определим обратные разности:

$$\left.\begin{aligned} &\rho_1(x_0, x_1) = \frac{x_0 - x_1}{y_0 - y_1}, \qquad \rho_2(x_0, x_1, x_2) = \frac{x_0 - x_2}{\rho_1(x_0, x_1) - \rho_1(x_1, x_2)} + y_1, \\ &\rho_r(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r) = \\ &= \frac{x_0 - x_r}{\rho_{r-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}) - \rho_{r-1}(x_1, x_2, \ldots, x_r)} + \rho_{r-2}(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}) \\ &(r = 3, 4, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{20.5-11}$$

Функция $y(x)$ для узлов $x_1, x_2, x_3, \ldots$ аппроксимируется рациональной функцией, которая получается из разложения в непрерывную дробь вида

$$Y(x) = y_1 + \frac{x - x_1}{\rho_1(x, x_1)}, \tag{20.5-12a}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\rho_1(x, x_1) = \rho_1(x_1, x_2) + \frac{x - x_2}{\rho_2(x, x_1, x_2) - y_1}, \\ &\rho_2(x, x_1, x_2) = \rho_2(x_1, x_2, x_3) + \frac{x - x_3}{\rho_3(x, x_1, x_2, x_3) - \rho_1(x_1, x_2)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{20.5-12b}$$

Если $y(x)$ — рациональная функция, то непрерывная дробь обрывается.

20.6. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ, ОТРЕЗКАМИ РЯДА ФУРЬЕ И ДРУГИМИ МЕТОДАМИ

20.6-1. Вводные замечания. Параболическая интерполяция на практике хороша лишь для аналитических функций и только тогда, когда их значения не искажены шумом (случайными ошибками). Случайные ошибки в значениях функции сильно искажают интерполяционные многочлены высоких степеней, а при интерполяции многочленами низких степеней теряется существенная информация. Поэтому при наличии случайных ошибок предпочитают применять «сглаживающую» аппроксимацию такими многочленами или рациональными дробями, которые минимизируют либо взвешенную среднюю квадратическую ошибку аппроксимации, либо максимум абсолютной ошибки на всем выбранном интервале (a, b). Отметим, что разложения в ряд Тейлора аппроксимируют аналитическую функцию лишь в непосредственной близости от одной выбранной точки и поэтому редко применяются в численной аппроксимации (только при условии сверхбыстрой сходимости).

20.6-2. Приближения функций многочленами по методу наименьших квадратов на интервале (см. также п. 15.2-6). Для данной функции $f(x)$ требуется построить функцию $F(x)$ вида

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) \tag{20.6-1}$$

так, чтобы минимизировать взвешенную среднюю квадратическую ошибку на интервале (a, b):

$$\sigma^2 = \int_a^b \gamma(x) [F(x) - f(x)]^2 dx, \tag{20.6-2}$$

где $\gamma(x)$ — заданная неотрицательная весовая функция.

Если функции $\varphi_k(x)$ действительны и попарно ортогональны с весом $\gamma(x)$ на интервале (a, b), т. е. если

$$\int_a^b \gamma(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0 \qquad (i \neq j), \tag{20.6-3}$$

то искомые коэффициенты a_i определяются по формулам

$$a_i = \frac{\int_a^b \gamma(x) f(x) \varphi_i(x) dx}{\int_a^b \gamma(x) \varphi_i^2(x) dx} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{20.6-4}$$

Аппроксимация ортогональными функциями, например, ортогональными многочленами (пп. 20.6-2 — 20.6-4) или тригонометрическими полиномами (п.20.6-6), имеет то замечательное преимущество, что *улучшение аппроксимации путем добавления нового члена $a_{n+1}\varphi_{n+1}(x)$ не меняет ранее вычисленных коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

Подстановка $x = \alpha z + \beta$, $dx = \alpha\, dz$ в формулах (1) — (4) позволяет изменить масштаб или сдвинуть рассматриваемый интервал.

Заметим, что вычисление коэффициентов по формуле (4) требует знания функции $f(x)$ на всем рассматриваемом интервале (a, b).

20.6-3. Приближения функций многочленами по методу наименьших квадратов на дискретном множестве точек. Если функция $f(x)$ задана только на дискретном множестве $(m+1)$ точек $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$, то приближение (1) по методу наименьших квадратов принимает другой вид. Здесь надо минимизировать взвешенную среднюю квадратическую ошибку вида

$$\sigma'^2 = \sum_{k=0}^{m} \gamma_k [F(x_k) - f(x_k)]^2, \tag{20.6-5}$$

где γ_k — заданные положительные веса. Это опять-таки проще всего сделать в том случае, когда функции $\varphi_r(x)$ представляют собой многочлены степени r, попарно ортогональные с весами γ_k на заданном множестве точек, т. е. когда

$$\sum_{k=0}^{m} \gamma_k \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k) = 0 \qquad (i \neq j). \tag{20.6-6}$$

Такие многочлены можно получить из последовательности $1, x, x^2, \ldots$ методом ортогонализации Шмидта, п. 14.7-4. Коэффициенты a_i определяются по формулам

$$a_i = \frac{\sum_{k=0}^{m} \gamma_k f(x_k) \varphi_i(x_k)}{\sum_{k=0}^{m} \gamma_k \varphi_i^2(x_k)} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n;\ n \leqslant m). \tag{20.6-7}$$

При $n=m$ получающийся многочлен совпадает с интерполяционным многочленом; если $n<m$, то добавление нового члена $a_{n+1}\varphi_{n+1}(x)$ оставляет предыдущие члены без изменения. Особый интерес представляют указанные ниже два частных случая.

(a) Многочлены Чебышева. Если значения аргумента x_0, x_1, $x_2, \ldots, x_m$ можно свободно выбирать, скажем, в интервале $(-1, 1)$, то целесообразно в качестве этих значений взять корни многочлена Чебышева $T_{m+1}(x)$ (п. 21.7-4), т. е. положить

$$x_k=\cos\frac{2k+1}{2m+2}\pi \qquad (k=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ m). \tag{20.6-8}$$

Тогда при единичных весах $\gamma_k=1$ *ортогональные многочлены, определяемые соотношением* (6), *совпадают с многочленами Чебышева* $T_i(x)$ (см. также п. 20.5-5).

(b) Равноотстоящие точки. Если $m+1=2M+1$ точек x_k делят отрезок $[a, b]$ на $2M$ равных частей, так что

$$x_k=\frac{a+b}{2}+k\,\Delta x \qquad \left(\Delta x=\frac{b-a}{2M},\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots,\ \pm M\right), \tag{20.6-9}$$

то ортогональные многочлены $\varphi_i(x)$, определяемые соотношением (6) при единичных весах $\gamma_k=1$, имеют вид

$$\varphi_i(x)\equiv p_i\left(\frac{2x-a-b}{b-a}M,\ 2M\right) \qquad (i=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 2M;\ M=1,\ 2, \ldots), \tag{20.6-10}$$

где

$$p_i(t,\ 2M)=\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k}\frac{(i+k)^{[2k]}\,(M+t)^{[k]}}{(k!)^2\,(2M)^{[k]}}, \tag{20.6-11a}$$

$$\left.\begin{aligned} &z^{[k]}=z(z-1)(z-2)\ldots(z-k+1) \quad (k=1,\ 2, \ldots),\\ &z^{[0]}=1\ (z\geqslant 0),\ 0^{[k]}=0\ (k=1,\ 2, \ldots);\end{aligned}\right\} \tag{20.6-11b}$$

при этом

$$\sum_{k=-M}^{M}p_i^2(k,\ 2M)=\frac{(2M+i+1)!\,(2M-i)!}{(2i+1)\,[(2M)!]^2} \qquad (i=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 2M;\ M=1,\ 2, \ldots) \tag{20.6-12}$$

(встречаются и другие нормировки ортогональных многочленов).

Ортогональные многочлены до пятой степени:

$$\left.\begin{aligned} &p_0(t,\ 2M)=1,\quad p_1(t,\ 2M)=\frac{t}{M},\\ &p_2(t,\ 2M)=\frac{3t^2-M(M+1)}{M(2M-1)},\\ &p_3(t,\ 2M)=\frac{5t^3-(3M^2+3M-1)t}{M(M-1)(2M-1)},\\ &p_4(t,\ 2M)=\frac{35t^4-5(6M^2+6M-5)t^2+3M(M^2-1)(M+2)}{2M(M-1)(2M-1)(2M-3)},\\ &p_5(t,\ 2M)=\\ &=\frac{63t^5-35(2M^2+2M-3)t^3+(15M^4+30M^3-35M^2-50M+12)t}{2M(M-1)(2M-1)(2M-3)(M-2)},\end{aligned}\right\} \tag{20.6-13}$$

В частности, при $M=2$ (пять точек):

$$\left.\begin{aligned} &p_0(t)=1,\quad p_1(t)=\frac{1}{2}t,\quad p_2(t)=\frac{1}{2}(t^2-2),\\ &p_3(t)=\frac{1}{6}(5t^3-17t),\quad p_4(t)=\frac{1}{12}(35t^4-155t^2+72).\end{aligned}\right\} \tag{20.6-14}$$

Если обозначить значения функции $f(x_k)$ через f_k, то аппроксимация многочленами до третьей степени при $M=2$ дает следующие сглаженные значения:

$$\left.\begin{aligned} F_{-2}&=\frac{1}{70}(69f_{-2}+4f_{-1}-6f_0+4f_1-f_2)=f_{-2}-\frac{1}{70}\delta^4 f_0,\\ F_{-1}&=\frac{1}{35}(2f_{-2}+27f_{-1}+12f_0-8f_1+2f_2)=f_{-1}+\frac{2}{35}\delta^4 f_0,\\ F_0&=\frac{1}{35}(-3f_{-2}+12f_{-1}+17f_0+12f_1-3f_2)=f_0-\frac{3}{35}\delta^4 f_0,\\ F_1&=\frac{1}{35}(2f_{-2}-8f_{-1}+12f_0+27f_1+2f_2)=f_1+\frac{2}{35}\delta^4 f_0,\\ F_2&=\frac{1}{70}(-f_{-2}+4f_{-1}-6f_0+4f_1+69f_2)=f_2-\frac{1}{70}\delta^4 f_0.\end{aligned}\right\}\qquad(20.6\text{-}15)$$

20.6-4. Равномерные приближения.

(a) Равномерные приближения минимизируют *наибольшее значение абсолютной ошибки* $|F(x)-f(x)|$ либо на всем отрезке $[a, b]$, либо на дискретном множестве точек. Вычисление коэффициентов a_i многочлена (1), дающего равномерное приближение к функции $f(x)$, весьма трудоемко.

На практике при использовании в формуле (1) в качестве $\varphi_k(x)$ многочленов Чебышева (возможно, с изменением начала отсчета и масштаба, см. также п. 20.6-4, b) равномерные приближения оказываются близкими к приближениям по методу наименьших квадратов. Это имеет место тогда, когда приближение многочленами Чебышева

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k T_k(\alpha x)\qquad [T_k(x)=\cos k\vartheta,\ \cos\vartheta=x]$$

имеет ошибку того же порядка, что и первый отбрасываемый член $a_{n+1}T_{n+1}(\alpha x)$ для всех $x\in[a, b]$. Так как многочлен $T_{n+1}(\alpha x)$ в рассматриваемом интервале колеблется с амплитудой 1, то наибольшее значение абсолютной ошибки приближенно равно $|a_{n+1}|$.

(b) Иногда удобно применять **смещенные многочлены Чебышева** $T_n^*(x)$, определяемые на отрезке [0, 1] формулами

$$T_n^*(x)=T_n(2x-1)=\cos n\vartheta\quad(\cos\vartheta=2x-1;\ n=0, 1, 2, \ldots)\qquad(20.6\text{-}16)$$

или

$$T_0^*(x)=1,\quad T_1^*(x)=2x-1,\quad T_{n+1}^*(x)=2(2x-1)T_n^*(x)-T_{n-1}^*(x)$$
$$(n=1, 2, \ldots).\qquad(20.6\text{-}17)$$

(c) Таблица 20.6-1 дает несколько первых многочленов $T_n(x)$ и $T_n^*(x)$, а также разложения степеней 1, x, x^2, ..., x^5 по этим многочленам (см. также п. 21.7-4). Таблицы 20.6-2—20.6-4 дают некоторые полезные приближения трансцендентных функций многочленами.

20.6-5. Экономизация степенных рядов. Если вычисление коэффициентов разложения по ортогональным функциям значительно сложнее, чем вычисление отрезков степенного ряда для функции $f(x)$, то с небольшой потерей точности можно понизить степени этих отрезков, выразив высшие степени x через низшие степени и многочлены Чебышева. Например, из табл. 20.6-1 находим

$$x^9=\frac{1}{256}(-9x+120x^3-432x^5+576x^7)+\frac{1}{256}T_9(x).$$

Последний член на отрезке $[-1, 1]$ колеблется с относительно малой амплитудой $\frac{1}{256}$. Отбрасывая этот член, мы получаем представление x^9 через многочлен седьмой степени; далее эту процедуру можно повторить с x^7 и т. д.

Вместо этого можно все степени выразить через многочлены Чебышева и пренебречь теми из них, которые будут иметь малые коэффициенты.

Таблица 20.6-1

Многочлены Чебышева $T_n(x)$ и $T_n^*(x)$ и степени x

$T_0 = 1$	$1 = T_0$
$T_1 = x$	$x = T_1$
$T_2 = 2x^2 - 1$	$x^2 = \frac{1}{2}(T_0 + T_2)$
$T_3 = 4x^3 - 3x$	$x^3 = \frac{1}{4}(3T_1 + T_3)$
$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$	$x^4 = \frac{1}{8}(3T_0 + 4T_2 + T_4)$
$T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x$	$x^5 = \frac{1}{16}(10T_1 + 5T_3 + T_5)$
$T_6 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$	$x^6 = \frac{1}{32}(10T_0 + 15T_2 + 6T_4 + T_6)$
$T_7 = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$	$x^7 = \frac{1}{64}(35T_1 + 21T_3 + 7T_5 + T_7)$
$T_8 = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$	$x^8 = \frac{1}{128}(35T_0 + 56T_2 + 28T_4 + 8T_6 + T_8)$
$T_9 = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$	$x^9 = \frac{1}{256}(126T_1 + 84T_3 + 36T_5 + 9T_7 + T_9)$
$T_0^* = 1$	$1 = T_0^*$
$T_1^* = 2x - 1$	$x = \frac{1}{2}(T_0^* + T_1^*)$
$T_2^* = 8x^2 - 8x + 1$	$x^2 = \frac{1}{8}(3T_0^* + 4T_1^* + T_2^*)$
$T_3^* = 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1$	$x^3 = \frac{1}{32}(10T_0^* + 15T_1^* + 6T_2^* + T_3^*)$
$T_4^* = 128x^4 - 256x^3 + 160x^2 - 32x + 1$	$x^4 = \frac{1}{128}(35T_0^* + 56T_1^* + 28T_2^* + 8T_3^* + T_4^*)$

20.6-6. Численный гармонический анализ и тригонометрическая интерполяция (см. также пп. 4.11-4, b и 20.5-1).

(а) Даны m значений функции $y(x_k) = y_k$ при $x_k = k\frac{T}{m}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, m-1$); требуется аппроксимировать $y(x)$ на интервале $(0, T)$ тригонометрическим полиномом

$$Y(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{j=1}^{n}\left(A_j \cos j\frac{2\pi x}{T} + B_j \sin j\frac{2\pi x}{T}\right) \qquad \left(n < \frac{m}{2}\right) \qquad (20.6\text{-}18)$$

так, чтобы минимизировать сумму квадратов отклонений $\sum_{k=0}^{m-1}[Y(x_k) - y_k]^2$. Искомые коэффициенты A_j, B_j определяются по формулам

$$A_j = \frac{2}{m}\sum_{k=0}^{m-1} y_k \cos j\frac{2\pi k}{m}, \qquad B_j = \frac{2}{m}\sum_{k=0}^{m-1} y_k \sin j\frac{2\pi k}{m} \qquad \left(0 \leqslant j < \frac{m}{2}\right). \qquad (20.6\text{-}19)$$

В частном случае $n = m/2$ формулы (18) и (19) вместе с

$$A_n = A_{m/2} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k y_k \qquad (20.6\text{-}20)$$

дают $Y(x_k) = y(x_k)$ (*тригонометрическая интерполяция*) при произвольном B_n.

Аналогичные формулы для неравноотстоящих x_k, а также численные методы для многомерного анализа и синтеза см. в [20.11].

Таблица 20.6-2

Приближения некоторых функций многочленами

$f(x)$	Приближение $F(x)$	Коэффициенты a_i		Наибольшая абсолютная ошибка
e^{-x} $(0 \leqslant x \leqslant \ln 2)$	$1 + a_1x + a_2x^2$	$a_1 = -0{,}9664$	$a_2 = 0{,}3536$	$3 \cdot 10^{-3}$
	$1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_4x^4$	$a_1 = -0{,}99986\ 84$ $a_3 = -0{,}15953\ 32$	$a_2 = 0{,}49829\ 26$ $a_4 = 0{,}02936\ 41$	$3 \cdot 10^{-5}$
	$1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_7x^7$	$a_1 = -0{,}99999\ 99995$ $a_3 = -0{,}16666\ 53019$ $a_5 = -0{,}00830\ 13598$ $a_7 = -0{,}00014\ 13161$	$a_2 = 0{,}49999\ 99206$ $a_4 = 0{,}04165\ 73475$ $a_6 = 0{,}00132\ 98820$	$2 \cdot 10^{-10}$
$\ln(1 + x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$	$a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_5x^5$	$a_1 = 0{,}99949\ 556$ $a_3 = 0{,}28947\ 478$ $a_5 = 0{,}03215\ 845$	$a_2 = -0{,}49190\ 896$ $a_4 = -0{,}13606\ 275$	10^{-5}
	$a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_8x^8$	$a_1 = 0{,}99999\ 64239$ $a_3 = 0{,}33179\ 90258$ $a_5 = 0{,}16765\ 40711$ $a_7 = 0{,}03608\ 84937$	$a_2 = -0{,}49987\ 41238$ $a_4 = -0{,}24073\ 38084$ $a_6 = -0{,}09532\ 93897$ $a_8 = -0{,}00645\ 35442$	$3 \cdot 10^{-8}$
10^x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$	$(1 + a_1x + \ldots + a_4x^4)^2$	$a_1 = 1{,}14991\ 96$ $a_3 = 0{,}20800\ 30$	$a_2 = 0{,}67743\ 23$ $a_4 = 0{,}12680\ 89$	$7 \cdot 10^{-4}$
	$(1 + a_1x + \ldots + a_7x^7)^2$	$a_1 = 1{,}15129\ 27760$ $a_3 = 0{,}25439\ 35748$ $a_5 = 0{,}01742\ 11199$ $a_7 = 0{,}00093\ 26427$	$a_2 = 0{,}66273\ 08843$ $a_4 = 0{,}07295\ 17367$ $a_6 = 0{,}00255\ 49180$	$5 \cdot 10^{-8}$
$\dfrac{\sin x}{x}$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$	$1 + a_2x^2 + a_4x^4$	$a_2 = -0{,}16605$	$a_4 = 0{,}00761$	$2 \cdot 10^{-4}$
	$1 + a_2x^2 + \ldots + a_{10}x^{10}$	$a_2 = -0{,}16666\ 66664$ $a_6 = -0{,}00019\ 84090$ $a_{10} = -0{,}00000\ 00239$	$a_4 = 0{,}00833\ 33315$ $a_8 = 0{,}00000\ 27526$	$2 \cdot 10^{-9}$
$\cos x$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$	$1 + a_2x^2 + a_4x^4$	$a_2 = -0{,}49670$	$a_4 = 0{,}03705$	$9 \cdot 10^{-4}$
	$1 + a_2x^2 + \ldots + a_{10}x^{10}$	$a_2 = -0{,}49999\ 99963$ $a_6 = -0{,}00138\ 88397$ $a_{10} = -0{,}00000\ 02605$	$a_4 = 0{,}04166\ 66418$ $a_8 = 0{,}00002\ 47609$	$2 \cdot 10^{-9}$

Таблица 20.6-2 *(продолжение)*

$f(x)$	Приближение $F(x)$	Коэффициенты a_i		Наибольшая абсолютная ошибка
$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$	$1 + a_2x^2 + a_4x^4$	$a_2 = 0,31755$	$a_4 = 0,20330$	10^{-3}
	$1 + a_2x^2 + \ldots + a_{12}x^{12}$	$a_2 = 0,33333\ 14036$ $a_6 = 0,05337\ 40603$ $a_{10} = 0,00290\ 05250$	$a_4 = 0,13339\ 23995$ $a_8 = 0,02456\ 50893$ $a_{12} = 0,00951\ 68091$	$2 \cdot 10^{-8}$
$x \operatorname{ctg} x$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$	$1 + a_2x^2 + a_4x^4$	$a_2 = -0,33286\ 7$	$a_4 = -0,02436\ 9$	$3 \cdot 10^{-5}$
	$1 + a_2x^2 + \ldots + a_{10}x^{10}$	$a_2 = -0,33333\ 33410$ $a_6 = -0,00211\ 77168$ $a_{10} = -0,00002\ 62619$	$a_4 = -0,02222\ 20287$ $a_8 = -0,00020\ 78504$	$4 \cdot 10^{-10}$
$\arcsin x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$	$\frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x}\,(a_0 + a_1x + \ldots + a_3x^3)$	$a_0 = 1,57072\ 88$ $a_2 = 0,07426\ 10$	$a_1 = -0,21211\ 44$ $a_3 = -0,01872\ 93$	$5 \cdot 10^{-5}$
	$\frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x}\,(a_0 + a_1x + \ldots + a_7x^7)$	$a_0 = 1,57079\ 63050$ $a_2 = 0,08897\ 89874$ $a_4 = 0,03089\ 18810$ $a_6 = 0,00667\ 00901$	$a_1 = -0,21459\ 88016$ $a_3 = -0,05017\ 43046$ $a_5 = -0,01708\ 81256$ $a_7 = -0,00126\ 24911$	$2 \cdot 10^{-8}$
$\operatorname{arctg} x$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$	$a_1x + a_3x^3 + \ldots + a_9x^9$	$a_1 = 0,99986\ 60$ $a_5 = 0,18014\ 10$ $a_9 = 0,02083\ 51$	$a_3 = -0,33029\ 95$ $a_7 = -0,08513\ 30$	10^{-5}
$\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$	$1 + a_2x^2 + \ldots + a_{16}x^{16}$	$a_2 = -0,33333\ 14528$ $a_6 = -0,14208\ 89944$ $a_{10} = -0,07528\ 96400$ $a_{14} = -0,01616\ 57367$	$a_4 = 0,19993\ 55085$ $a_8 = 0,10656\ 26393$ $a_{12} = 0,04290\ 96138$ $a_{16} = 0,00286\ 62257$	$2 \cdot 10^{-8}$
$\Gamma(x+1) = x!$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$	$1 + a_1x + \ldots + a_5x^5$	$a_1 = -0,57486\ 46$ $a_3 = -0,69985\ 88$ $a_5 = -0,10106\ 78$	$a_2 = 0,95123\ 63$ $a_4 = 0,42455\ 49$	$5 \cdot 10^{-5}$
	$1 + a_1x + \ldots + a_8x^8$	$a_1 = -0,57719\ 1652$ $a_3 = -0,89705\ 6937$ $a_5 = -0,75670\ 4078$ $a_7 = -0,19352\ 7818$	$a_2 = 0,98820\ 5891$ $a_4 = 0,91820\ 6857$ $a_6 = 0,48219\ 9394$ $a_8 = 0,03586\ 8343$	$3 \cdot 10^{-7}$

Таблица 20.6-3

Некоторые приближения цилиндрических функций

Функция	Приближения	Коэффициенты		Наибольшая абсолютная ошибка
$I_0(x)$ $(-3 \leqslant x \leqslant 3)$	$1 + a_2\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \ldots + a_{12}\left(\frac{x}{3}\right)^{12}$	$a_2 = -2{,}24999\ 97$ $a_6 = -0{,}31638\ 66$ $a_{10} = -0{,}00394\ 44$	$a_4 = 1{,}26562\ 08$ $a_8 = 0{,}04444\ 79$ $a_{12} = 0{,}00021\ 00$	$5 \cdot 10^{-8}$
$I_0(x) = \frac{f_0}{\sqrt{x}} \cos \vartheta_0$ $N_0(x) = \frac{f_0}{\sqrt{x}} \sin \vartheta_0$ $(3 \leqslant x < \infty)$	$f_0 = a_0 + a_1\left(\frac{3}{x}\right) + \ldots + a_6\left(\frac{3}{x}\right)^6$	$a_0 = 0{,}79788\ 456$ $a_2 = -0{,}00552\ 740$ $a_4 = 0{,}00137\ 237$ $a_6 = 0{,}00014\ 476$	$a_1 = -0{,}00000\ 077$ $a_3 = -0{,}00009\ 512$ $a_5 = -0{,}00072\ 805$	$1{,}6 \cdot 10^{-8}$ (для f_0)
	$\vartheta_0 = x + b_0 + b_1\left(\frac{3}{x}\right) + \ldots + b_6\left(\frac{3}{x}\right)^6$	$b_0 = -0{,}78539\ 816$ $b_2 = -0{,}00003\ 954$ $b_4 = -0{,}00054\ 125$ $b_6 = 0{,}00013\ 558$	$b_1 = -0{,}04166\ 397$ $b_3 = 0{,}00262\ 573$ $b_5 = -0{,}00029\ 333$	$7 \cdot 10^{-8}$ (для ϑ_0)
$\frac{I_1(x)}{x}$ $(-3 \leqslant x \leqslant 3)$	$\frac{1}{2} + a_2\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \ldots + a_{12}\left(\frac{x}{3}\right)^{12}$	$a_2 = -0{,}56249\ 985$ $a_6 = -0{,}03954\ 289$ $a_{10} = -0{,}00031\ 761$	$a_4 = 0{,}21093\ 573$ $a_8 = 0{,}00443\ 319$ $a_{12} = 0{,}00001\ 109$	$1{,}3 \cdot 10^{-8}$
$N_0(x)$ $(0 < x \leqslant 3)$	$\frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2} I_0(x) + a_0 + a_2\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \ldots$ $\ldots + a_{12}\left(\frac{x}{3}\right)^{12}$	$a_0 = 0{,}36746\ 691$ $a_4 = -0{,}74350\ 384$ $a_8 = -0{,}04261\ 214$ $a_{12} = -0{,}00024\ 846$	$a_2 = 0{,}60559\ 366$ $a_6 = 0{,}25300\ 117$ $a_{10} = 0{,}00427\ 916$	$1{,}4 \cdot 10^{-8}$
$I_1(x) = \frac{f_1}{\sqrt{x}} \cos \vartheta_1$ $N_1(x) = \frac{f_1}{\sqrt{x}} \sin \vartheta_1$ $(3 \leqslant x < \infty)$	$f_1 = a_0 + a_1\left(\frac{3}{x}\right) + \ldots + a_6\left(\frac{3}{x}\right)^6$	$a_0 = 0{,}79788\ 456$ $a_2 = 0{,}01659\ 667$ $a_4 = -0{,}00249\ 511$ $a_6 = -0{,}00020\ 033$	$a_1 = 0{,}00000\ 156$ $a_3 = 0{,}00017\ 103$ $a_5 = 0{,}00113\ 653$	$4 \cdot 10^{-8}$ (для f_1)
	$\vartheta_1 = x + b_0 + b_1\left(\frac{3}{x}\right) + \ldots + b_6\left(\frac{3}{x}\right)^6$	$b_0 = -2{,}35619\ 449$ $b_2 = 0{,}00005\ 650$ $b_4 = 0{,}00074\ 348$ $b_6 = -0{,}00029\ 166$	$b_1 = 0{,}12499\ 612$ $b_3 = -0{,}00637\ 879$ $b_5 = 0{,}00079\ 824$	$9 \cdot 10^{-8}$ (для ϑ_1)
$x N_1(x)$ $(0 < x \leqslant 3)$	$\frac{2}{\pi} x \ln \frac{x}{2} I_1(x) + a_0 + a_2\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \ldots$ $\ldots + a_{12}\left(\frac{x}{3}\right)^{12}$	$a_0 = -0{,}63661\ 98$ $a_4 = 2{,}16827\ 09$ $a_8 = 0{,}31239\ 51$ $a_{12} = 0{,}00278\ 73$	$a_2 = 0{,}22120\ 91$ $a_6 = -1{,}31648\ 27$ $a_{10} = -0{,}04009\ 76$	$1{,}1 \cdot 10^{-7}$

Таблица 20.6-4.

Приближения многочленами Чебышева $T_n^*(x) = \cos n\vartheta$, где $\cos\vartheta = 2x - 1$

$f(x)$	Приближение	n	A_n	n	A_n
e^{-x} $(0 \leqslant x \leqslant 1)$	$\sum_{n=0}^{7} A_n T_n^*(x)$	0	0,64503 5270	4	0,00019 9919
		1	−0,31284 1606	5	−0,00000 9975
		2	0,03870 4116	6	0,00000 0415
		3	−0,00320 8683	7	−0,00000 0015
e^{x} $(0 \leqslant x \leqslant 1)$	$\sum_{n=0}^{8} A_n T_n^*(x)$	0	1,75338 7654	4	0,00054 3437
		1	0,85039 1654	5	0,00002 7115
		2	0,10520 8694	6	0,00000 1128
		3	0,00872 2105	7	0,00000 0040
				8	0,00000 0001
$\ln(1+x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$	$\sum_{n=0}^{11} A_n T_n^*(x)$	0	0,37645 2813	6	−0,00000 8503
		1	0,34314 5750	7	0,00000 1250
		2	−0,02943 7252	8	−0,00000 0183
		3	0,00336 7089	9	0,00000 0029
		4	−0,00043 3276	10	−0,00000 0004
		5	0,00005 9471	11	0,00000 0001
$\cos\frac{\pi x}{2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$	$\sum_{n=0}^{5} A_n T_n^*(x^2)$	0	0,47200 1216	3	−0,00059 6695
		1	−0,49940 3258	4	0,00000 6704
		2	0,02799 2080	5	−0,00000 0047
$\sin\frac{\pi x}{2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$	$x \sum_{n=0}^{5} A_n T_n^*(x^2)$	0	1,27627 8962	3	−0,00013 6587
		1	−0,28526 1569	4	0,00000 1185
		2	0,00911 8016	5	−0,00000 0007
$\operatorname{arctg} x$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$	$x \sum_{n=0}^{10} A_n T_n^*(x^2)$	0	0,88137 3587	6	0,00000 3821
		1	−0,10589 2925	7	−0,00000 0570
		2	0,01113 5843	8	0,00000 0086
		3	−0,00138 1195	9	−0,00000 0013
		4	0,00018 5743	10	0,00000 0002
		5	−0,00002 6215		
	При $\lvert x\rvert > 1$ полагают $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$				
$\arcsin x$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$x \sum_{n=0}^{9} A_n T_n^*(2x^2)$	0	1,05123 1959	5	0,00000 5881
		1	0,05494 6487	6	0,00000 0777
		2	0,00408 0631	7	0,00000 0107
		3	0,00040 7890	8	0,00000 0015
		4	0,00004 6985	9	0,00000 0002
	Замечание: $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. При $\sqrt{2/2} \leqslant x \leqslant 1$ полагают $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$; $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2}$.				

(b) **Схема на 12 ординат.** Вычисление сумм (19) упрощается, если m делится на 4. Удобная расчетная схема при $m = 12$ приведена в табл. 20.6-5.

Таблица 20.6-5

Схема гармонического анализа на 12 ординат

$$y_k = y\left(\frac{kT}{12}\right)$$

Строка	Действие и результат							
1	Данные значения функции	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
2		—	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	—
3	Сумма 1 и 2	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
4	Разность 1 и 2	—	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	—
5	Перестановка	s_0	s_1	s_2	s_3	d_1	d_2	d_3
6		s_6	s_5	s_4	—	d_5	d_4	—
7	Сумма 5 и 6	s'_0	s'_1	s'_2	s'_3	s''_1	s''_2	s''_3
8	Разность 5 и 6	d_0	d'_1	d'_2	—	d''_1	d''_2	—

Строка	Действие и результат														
9	Перестановка и умножение на коэффициенты $\pm 1/2$; $\sqrt{3}/2$	s'_0	s'_1	d'_0	—	s'_0	$-s'_3$	d'_0	d'_2	s''_3	—	—	—	s_1	s''_3
10		s'_2	s'_3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11		—	—	$\frac{1}{2}d'_2$	—	$-\frac{1}{2}s'_2$	$\frac{1}{2}s'_1$	—	—	$\frac{1}{2}s''_1$	—	—	—	—	—
12		—	—	—	$\frac{\sqrt{3}}{2}d'_1$	—	—	—	—	—	$\frac{\sqrt{3}}{2}s''_2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}d''_1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}d''_2$	—	—
13	Сумма (с 9 по 12)	S_1	T_1	S_2	T_2	S_3	T_3	S_4	T_4	S_5	T_5	S_6	T_6	S_7	T_7
14	$S_i + T_i$	$6A_0$		$6A_1$		$6A_2$		—		$6B_1$		$6B_2$		—	
15	$S_i - T_i$	$12A_6$		$6A_5$		$6A_4$		$6A_3$		$6B_5$		$6B_4$		$6B_3$	

Отметим более простые формулы для случая, когда нужны гармоники не выше третьего порядка:

$$\left.\begin{aligned} 6A_0 &= y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{11}, & 6A_3 &= y_0 - y_2 + y_4 - y_6 + y_8 - y_{10},\\ 4A_2 &= y_0 - y_3 + y_6 - y_9, & 6B_3 &= y_1 - y_3 + y_5 - y_7 + y_9 - y_{11},\\ A_1 &= \frac{1}{2}(y_0 - y_6) + A_3, & B_1 &= \frac{1}{2}(y_3 - y_9) + B_3, \end{aligned}\right\} \quad (20.6\text{-}21)$$

$$4B_2 = y\left(\frac{T}{8}\right) - y\left(\frac{3T}{8}\right) + y\left(\frac{5T}{8}\right) - y\left(\frac{7T}{8}\right). \quad (20.6\text{-}22)$$

Четыре добавочных значения функции для формулы (22) часто можно снять непосредственно с графика функции $y(x)$.

(c) Отыскание неизвестных периодических компонент. Если для функции вида

$$f(u) = A_1 \cos\omega_1 u + B_1 \sin\omega_1 u + A_2 \cos\omega_2 u + B_2 \sin\omega_2 u + \ldots + B_m \sin\omega_m u$$

известны из опыта N $(N \geqslant 3m+1)$ значений

$$f_0 = f(0),\; f_1 = f(1),\; f_2 = f(2),\; \ldots;\; f_{N-1} = f(N-1),$$

то

$$\cos\omega_1,\; \cos\omega_2,\; \ldots,\; \cos\omega_m$$

определяются как корни (алгебраического) уравнения

$$\cos m\omega - \alpha_1 \cos(m-1)\omega - \ldots - \alpha_{m-1}\cos\omega - \frac{1}{2}\alpha_m = 0,$$

коэффициенты которого α_k должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\varepsilon_i \equiv \sum_{k=1}^{m-1} (f_{i+k-1} + f_{2m+i-k-1})\,\alpha_k + f_{m+i-1}\alpha_m - f_{i-1} - f_{2m+i-1} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N-2m).$$

Для нахождения m коэффициентов α_k по методу наименьших квадратов надо решить систему m линейных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_k} \sum_{i=1}^{N-2m} \varepsilon_i^2 = 0.$$

После того как ω_k найдены, относительно легко найти A_k и B_k методом, указанным в п. 20.6-6, а.

20.6-7. Разные приближения.

(a) Более общие методы приближений не ограничиваются линейными агрегатами вида (1), но используют рациональные или другие легко вычислимые аппроксимирующие функции $F(x) \equiv F(x;\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ с параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, которые определяются так, чтобы минимизировать взвешенную среднюю квадратическую ошибку или наибольшую абсолютную ошибку аппроксимации.

(b) Метод Падэ дает приближения достаточное число раз дифференцируемой функции $f(x)$ с помощью рациональных дробей

$$R_{mn}(x) \equiv \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{1 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots), \quad (20.6\text{-}23)$$

коэффициенты которых определяются из тождества

$$\left[f(0) + f'(0)\,x + \ldots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(0)\,x^m\right](1 + b_1 x + \ldots + b_n x^n) \equiv$$
$$\equiv a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m. \quad (20.6\text{-}24)$$

Отсюда получается система $m+n+1$ линейных уравнений с $m+n+1$ неизвестными коэффициентами a_i и b_k. Предполагается, что дробь (20.6-23) несократима. При $n = 0$ функция $R_{m0}(x)$ дает просто отрезок ряда Тейлора (п. 4.10-4).

Таблица 20.6-6.

Разные приближения

$f(x)$	Приближение	Коэффициенты		Наибольшая абсолютная ошибка
$\lg x$ $\left(\frac{1}{\sqrt{10}} \leq x \leq \sqrt{10}\right)$	$a_1 t + a_3 t^3,\ t = \frac{x-1}{x+1}$	$a_1 = 0{,}86304$	$a_3 = 0{,}36415$	$6 \cdot 10^{-4}$
	$a_1 t + a_3 t^3 + \ldots + a_9 t^9$ $t = \frac{x-1}{x+1}$	$a_1 = 0{,}86859\ 1718$ $a_5 = 0{,}17752\ 2071$ $a_9 = 0{,}19133\ 7714$	$a_3 = 0{,}28933\ 5524$ $a_7 = 0{,}09437\ 6476$	10^{-7}
$\operatorname{arctg} x$ $(-1 \leq x \leq 1)$	$\frac{x}{1 + 0{,}28x^2}$			$5 \cdot 10^{-3}$
$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\lambda^2} d\lambda$ $(0 \leq x < \infty)$	$1 - (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3)\, e^{-x^2}$ $t = \frac{1}{1 + px}$	$p = 0{,}47047$ $a_2 = -0{,}09587\ 98$	$a_1 = 0{,}34802\ 42$ $a_3 = 0{,}74785\ 56$	$2{,}5 \cdot 10^{-5}$
	$1 - (a_1 t + \ldots + a_5 t^5)\, e^{-x^2}$ $t = \frac{1}{1 + px}$	$p = 0{,}32759\ 11$ $a_2 = -0{,}28449\ 6736$ $a_4 = -1{,}45315\ 2027$	$a_1 = 0{,}25482\ 9592$ $a_3 = 1{,}42141\ 3741$ $a_5 = 1{,}06140\ 5429$	$1{,}5 \cdot 10^{-7}$
	$1 - \frac{1}{(1 + a_1 x + \ldots + a_4 x^4)^4}$	$a_1 = 0{,}278393$ $a_3 = 0{,}000972$	$a_2 = 0{,}230389$ $a_4 = 0{,}078108$	$5 \cdot 10^{-4}$
	$1 - \frac{1}{(1 + a_1 x + \ldots + a_6 x^6)^{16}}$	$a_1 = 0{,}07052\ 3078$ $a_3 = 0{,}00927\ 0527$ $a_5 = 0{,}00027\ 6567$	$a_2 = 0{,}04228\ 2012$ $a_4 = 0{,}00015\ 2014$ $a_6 = 0{,}00004\ 3064$	$3 \cdot 10^{-7}$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(-\infty < x < \infty)$	$(a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6)^{-1}$	$a_0 = 2{,}490895$ $a_4 = -0{,}024393$	$a_2 = 1{,}466003$ $a_6 = 0{,}178257$	$2{,}7 \cdot 10^{-3}$
	$(a_0 + a_2 x^2 + \ldots + a_{10} x^{10})^{-1}$	$a_0 = 2{,}50523\ 67$ $a_4 = 0{,}22647\ 18$ $a_8 = -0{,}02024\ 90$	$a_2 = 1{,}28312\ 04$ $a_6 = 0{,}13064\ 69$ $a_{10} = 0{,}00391\ 32$	$2{,}3 \cdot 10^{-4}$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda$ $(0 \leq x < \infty)$	$1 - \frac{1}{2}(1 + c_1 x + \ldots + c_4 x^4)^{-4}$	$c_1 = 0{,}196854$ $c_3 = 0{,}000344$	$c_2 = 0{,}115194$ $c_4 = 0{,}019527$	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$
	$1 - \frac{1}{2}(1 + c_1 x + \ldots + c_6 x^6)^{-16}$	$c_1 = 0{,}04986\ 7347$ $c_3 = 0{,}00327\ 7626$ $c_5 = 0{,}00004\ 8891$	$c_2 = 0{,}02114\ 1006$ $c_4 = 0{,}00003\ 8004$ $c_6 = 0{,}00000\ 5383$	$1{,}5 \cdot 10^{-7}$

Пример. Для $f(x)=e^x$ имеем $R_{nm}(x)=\dfrac{1}{R_{mn}(-x)}$ и

$$R_{40}(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4,$$

$$R_{31}(x)=\frac{24+18x+6x^2+x^3}{24-6x},$$

$$R_{22}(x)=\frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}.$$

(c) В последние годы разработано много методов аппроксимации в связи с цифровыми ЭВМ. Оптимальная форма аппроксимации выбирается в зависимости не только от вида аппроксимируемой функции, но и от применяемой машины. Некоторое количество примеров различных типов приведено в табл. 20.6-6.

20.7. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

20.7-1. Численное дифференцирование. Численное дифференцирование чувствительно к ошибкам, вызванным неточностью исходных данных, отбрасыванием членов ряда и т. д., и поэтому должно применяться с осторожностью.

(a) Применение таблицы разностей для равноотстоящих значений аргумента (см. также п. 20.4-1). Для дифференцируемой достаточное число раз функции $y(x)$

$$\frac{d^r}{dx^r}=\mathrm{D}^r=\left[\frac{1}{\Delta x}\ln(1+\Delta)\right]^r=\frac{1}{(\Delta x)^r}\left(\Delta-\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{3}\Delta^3-\ldots\right)^r, \tag{20.7-1}$$

так что если $x_k=x_0+k\Delta x$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$, то

$$\left.\begin{aligned} y'_k&=y'(x_k)=\mathrm{D}y_k=\frac{1}{\Delta x}\left(\Delta y_k-\frac{1}{2}\Delta^2 y_k+\frac{1}{3}\Delta^3 y_k-\ldots\right),\\ y''_k&=y''(x_k)=\mathrm{D}^2 y_k=\frac{1}{(\Delta x)^2}\left(\Delta^2 y_k-\Delta^3 y_k+\frac{11}{12}\Delta^4 y_k-\frac{5}{6}\Delta^5 y_k+\ldots\right).\end{aligned}\right\} \tag{20.7-2}$$

Дифференцирование интерполяционных формул Стирлинга и Бесселя дает соответственно

$$\left.\begin{aligned} y'_k&=\frac{\mu}{\Delta x}\left(\delta y_k-\frac{1}{6}\delta^3 y_k+\frac{1}{30}\delta^5 y_k-\ldots\right),\\ y''_k&=\frac{1}{(\Delta x)^2}\left(\delta^2 y_k-\frac{1}{12}\delta^4 y_k+\frac{1}{90}\delta^6 y_k-\ldots\right),\end{aligned}\right\} \tag{20.7-3}$$

$$\left.\begin{aligned} y'_k&=\frac{1}{\Delta x}\left(\delta y_k-\frac{1}{24}\delta^3 y_k+\ldots\right),\\ y''_k&=\frac{\mu}{(\Delta x)^2}\left(\delta^2 y_k-\frac{5}{24}\delta^4 y_k+\ldots\right).\end{aligned}\right\} \tag{20.7-4}$$

Многие подобные формулы, а также и формулы для аппроксимации производных высших порядков, могут быть выведены путем дифференцирования подходящих интерполяционных формул (см. также рис. 20.9-1).

Приведем еще *явные трехточечные формулы дифференцирования с остаточными членами*:

$$\left.\begin{aligned} y'_{-1}&=\frac{1}{2\Delta x}(-3y_{-1}+4y_0-y_1)+\frac{\Delta x^2}{3}y'''(\xi),\\ y'_0&=\frac{1}{2\Delta x}(-y_{-1}+y_1)-\frac{\Delta x^2}{6}y'''(\xi),\\ y'_1&=\frac{1}{2\Delta x}(y_{-1}-4y_0+3y_1)+\frac{\Delta x^2}{3}y'''(\xi),\end{aligned}\right\} \tag{20.7-5}$$

где $x_{-1}<\xi<x_1$.

(b) Применение разделенных разностей (см. также п. 20.5-2, b). Дифференцирование интерполяционной формулы Ньютона (20.5-3) для произвольных узлов интерполяции $x_0, x_1, x_2, \ldots$ дает

$$\left.\begin{aligned} &y^{(r)}(x) \approx F_r^{(r)}(x)\,\Delta_r\left(x_0, x_1, \ldots, x_r\right) + \\ &+ F_{r+1}^{(r)}(x)\,\Delta_{r+1}\left(x_0, x_1, \ldots, x_{r+1}\right) + \ldots \quad (r = 1, 2, \ldots), \\ &\text{где} \\ &F_j(x) \equiv \sum_{k=0}^{j-1} (x - x_k) \qquad (j = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{20.7-6}$$

(c) Численное дифференцирование после сглаживания. Следующие формулы получаются путем дифференцирования многочленов наилучшего среднеквадратического приближения, и поэтому на них меньше сказываются случайные ошибки опытных данных

$$y'_k \approx \frac{1}{\Delta x}\,\frac{3}{n(n+1)(2n+1)} \sum_{j=-n}^{n} j y_{k+j}. \tag{20.7-7}$$

При $n = 2$ это дает

$$y'_k \approx \frac{1}{10\Delta x}\left(-2y_{k-2} - y_{k-1} + y_{k+1} + 2y_{k+2}\right). \tag{20.7-8}$$

Вот еще несколько формул:

$$\left.\begin{aligned} &y'_k \approx \frac{1}{12\Delta x}\left(3y_{k+1} + 10y_k - 18y_{k-1} + 6y_{k-2} - y_{k-3}\right), \\ &y'_k \approx \frac{1}{12\Delta x}\left[\left(y_{k-2} - y_{k+2}\right) - 8\left(y_{k-1} - y_{k+1}\right)\right], \\ &y'_k \approx \frac{1}{12\Delta x}\left(y_{k+3} - 6y_{k+2} + 18y_{k+1} - 10y_k - 3y_{k-1}\right). \end{aligned}\right\} \tag{20.7-9}$$

(d) Численное дифференцирование по отрезку ряда Фурье. Если функция $y(x)$ аппроксимирована тригонометрическим полиномом $Y(x)$ (20.6-18), то для производной $y'(x)$ можно получить оценку

$$y'(x) \approx \frac{Y\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - Y\left(x - \frac{\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}. \tag{20.7-10}$$

20.7-2. Численное интегрирование для равноотстоящих узлов.

(a) Квадратурные формулы Ньютона — Котеса. Квадратурные формулы Ньютона — Котеса замкнутого типа (табл. 20.7-1) основаны на аппроксимации

$$\left.\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_0 + n\Delta x} y(x)\,dx \approx a_0 y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n, \\ &\text{где} \\ &a_k = \frac{(-1)^{n-k}\,\Delta x}{k!\,(n-k)!} \int_0^n \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n)}{(\lambda-k)}\,d\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{20.7-11}$$

$y_k = y(x_k)$ — данные значения функции для $n+1$ равноотстоящих значений аргумента $x_k = x_0 + k\Delta x$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Формулы являются точными, если $y(x)$ — многочлен степени не выше чем n. Вместо того чтобы применять зна-

Таблица 20.7-1

Квадратурные формулы Ньютона — Котеса, замкнутый тип

№		$I' \approx \int_{x_0}^{x_0+n\,\Delta x} y(x)\,dx = I$	Погрешность $I - I'$ $(x_0 < \xi < x_0 + n\,\Delta x)$
1	**Правило трапеций** ($n = 1$)	$\frac{\Delta x}{2}(y_0 + y_1)$	$-\frac{1}{12}\Delta x^3 y''(\xi)$
2	**Правило Симпсона** ($n = 2$)	$\frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$	$-\frac{1}{90}\Delta x^5 y^{(4)}(\xi)$
3	**Правило Уэддля** ($n = 6$) *)	$\frac{3}{10}\Delta x(y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6)$	$-\frac{\Delta x^7}{1400}[10y^{(6)}(\xi) + 9\Delta x^2 y^{(8)}(\xi')]$

*) При выводе правила Уэддля точный коэффициент 41/140 при $\Delta^6 y_0$ заменен на 3/10.

чения $n > 6$, складывают m сумм вида (11) при $n \leqslant 6$ для последовательных подынтервалов:

$$\int_{x_0}^{x_0+mn\,\Delta x} y(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+n\,\Delta x} y(x)\,dx + \int_{x_0+n\,\Delta x}^{x_0+2n\,\Delta x} y(x)\,dx + \ldots + \int_{x_0+(m-1)n\,\Delta x}^{x_0+mn\,\Delta x} y(x)\,dx. \quad (20.7\text{-}12)$$

(b) Формула Грегори. Симметричная квадратурная формула Грегори

$$\int_{x_0}^{x_0+n\,\Delta x} y(x)\,dx \approx \Delta x\left[\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) + \frac{1}{2}(\Delta y_0 - \Delta y_{n-1}) - \frac{1}{24}(\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_{n-2}) + \frac{19}{720}(\Delta^3 y_0 + \Delta^3 y_{n-3}) - \frac{3}{160}(\Delta^4 y_0 + \Delta^4 y_{n-4}) + \ldots\right] \quad (20.7\text{-}13)$$

дает поправочные члены к правилу трапеций (табл. 20.7-1). Если эта формула доведена до разностей порядка $2m$, то она является точной для многочленов $y(x)$ степени не выше $(2m+1)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$.

В частности, отбрасывание всех разностей дает правило трапеций

$$\int_{x_0}^{x_0+n\,\Delta x} y(x)\,dx \approx \Delta x\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right), \quad (20.7\text{-}14)$$

точное для линейных функций. Отбрасывание разностей третьего порядка и выше дает формулу

$$\int_{x_0}^{x_0+n\,\Delta x} y(x)\,dx \approx \Delta x\left(\frac{9}{24}y_0 + \frac{28}{24}y_1 + \frac{23}{24}y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-3} + \frac{23}{24}y_{n-2} + \frac{28}{24}y_{n-1} + \frac{9}{24}y_n\right), \quad (20.7\text{-}15)$$

точную для многочленов $y(x)$ третьей степени.

(c) Применение формулы Эйлера — Маклорена. Формула суммирования Эйлера — Маклорена (4.8-10) дает ряд квадратурных формул, содержащих, кроме значений $y(x)$, также и значения ее *производных* $y'_k = y'(x_k)$, $y''_k = y''(x_k), \ldots$ Получающиеся квадратурные формулы

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} y(x)\,dx = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + y_1) - \frac{\Delta x^2}{12}(y'_1 - y'_0) + \frac{\Delta x^4}{720}(y'''_1 - y'''_0) - \ldots \qquad (20.7\text{-}16)$$

дают поправочные члены к правилу трапеций (табл. 20.7-1).

20.7-3. Квадратурные формулы Гаусса и Чебышева

(a) Интеграл $\int_a^b y(x)\,dx$ с помощью замены переменных

$$x = \frac{b-a}{2}\xi + \frac{a+b}{2}, \qquad \eta(\xi) = \frac{b-a}{2}y(x) \qquad (20.7\text{-}17)$$

приводится сначала к виду $\int_{-1}^{1} \eta(\xi)\,d\xi$. *Квадратурная формула Гаусса*:

$$\int_{-1}^{1} \eta(\xi)\,d\xi \approx \sum_{k=1}^{n} a_k \eta(\xi_k), \qquad a_k = \frac{2}{(1-\xi_k^2)\,[P'_n(\xi_k)]^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad (20.7\text{-}18)$$

где n значений аргумента ξ_k являются корнями многочлена Лежандра $P_n(\xi)$ (п. 21.7-1). Абсциссы ξ_k и веса a_k для некоторых значений n приведены в табл. 20.7-2.

Погрешность квадратурной формулы Гаусса (18) равна

$$E = \frac{(n!)^4 (b-a)^{2n+1}}{(2n+1)\,[(2n)!]^3}\, y^{(2n)}(X) \qquad (a < X < b). \qquad (20.7\text{-}19)$$

(b) *Квадратурные формулы Чебышева* применяются тоже после предварительной замены переменных (17); они имеют вид

$$\int_{-1}^{1} \eta(\xi)\,d\xi \approx \frac{2}{n}[\eta(\xi_1) + \eta(\xi_2) + \ldots + \eta(\xi_n)] \qquad (n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9). \quad (20.7\text{-}20)$$

Абсциссы ξ_k приведены в табл. 20.7-2. Применение равных весов минимизирует вероятную ошибку, если значения $y(x)$ подвержены нормально распределенным случайным ошибкам.

При $n = 3$ погрешность квадратурной формулы (20) равна $\frac{1}{360}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 y^{(4)}(X)$ $(a < X < b)$.

(c) Отметим еще *квадратурную формулу Лагерра*

$$\int_0^\infty e^{-\xi}\eta(\xi)\,d\xi \approx \sum_{k=1}^{n} a_k \eta(\xi_k), \qquad a_k = \frac{(n!)^2}{\xi_k\,[L'_n(\xi_k)]^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (20.7\text{-}21)$$

где ξ_k — корни многочлена Лагерра $L_n(\xi)$ (п. 21.7-1), и *квадратурную формулу Эрмита*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\eta(\xi)\,d\xi \approx \sum_{k=1}^{n} a_k \eta(\xi_k), \qquad a_k = \frac{2^{n+1} n!\,\sqrt{\pi}}{[H'_n(\xi_k)]^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (20.7\text{-}22)$$

где ξ_k — корни многочлена Эрмита $H_n(\xi)$ (п. 21.7-1).

Абсциссы ξ_k и веса a_k для формул (21) и (22) приведены в табл. 20.7-2.

Таблица 20.7-2

Абсциссы и веса для квадратурных формул.
(a) Абсциссы ξ_k и веса a_k для квадратурной формулы Гаусса (18)

n	Абсциссы	Веса	n	Абсциссы	Веса
2	$\pm$ 0,577350	1	4	$\pm$ 0,339981	0,652145
				$\pm$ 0,861136	0,347855
3	0	$\frac{8}{9}$	5	0	0,568889
	$\pm$ 0,774597	$\frac{5}{9}$		$\pm$ 0,538469	0,478629
				$\pm$ 0,906180	0,236927

(b) Абсциссы ξ_k для квадратурной формулы Чебышева (20)

n	Абсциссы	n	Абсциссы
2	$\pm$ 0,577350	7	0
3	0		$\pm$ 0,323912
	$\pm$ 0,707107		$\pm$ 0,529657
4	$\pm$ 0,187592		$\pm$ 0,883862
	$\pm$ 0,794654	9	0
5	0		$\pm$ 0,167906
	$\pm$ 0,374541		$\pm$ 0,528762
	$\pm$ 0,832497		$\pm$ 0,601019
6	$\pm$ 0,266635		$\pm$ 0,911589
	$\pm$ 0,422519		
	$\pm$ 0,866247		

(c) Абсциссы ξ_k и веса a_k для квадратурной формулы Лагерра (21)

n	Абсциссы	Веса
2	0,585786	0,853553
	3,414214	0,146447
3	0,415775	0,711093
	2,294280	0,278518
	6,289945	0,0103893
4	0,322548	0,603154
	1,745761	0,357419
	4,536620	0,0388879
	9,395071	0,000539295
5	0,263560	0,521756
	1,413403	0,398667
	3,596426	0,0759424
	7,085810	0,00361176
	12,640801	0,0000233700

(d) Абсциссы ξ_k и веса a_k для квадратурной формулы Эрмита (22)

n	Абсциссы	Веса
2	$\pm$ 0,707107	0,886227
3	0	1,181636
	$\pm$ 1,224745	0,295409
4	$\pm$ 0,524648	0,804914
	$\pm$ 1,650680	0,0813128
5	0	0,945309
	$\pm$ 0,958572	0,393619
	$\pm$ 2,020183	0,0199532

Отметим также *квадратурную формулу Гаусса — Чебышева*

$$\int_{-1}^{1} \frac{\eta(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi \approx \sum_{k=1}^{n} a_k \eta(\xi_k), \qquad a_k = \frac{\pi}{n}, \quad \xi_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{20.7-23}$$

где ξ_k — корни многочлена Чебышева $T_n(x)$ (п. 21.7-4).

20.7-4. Построение и сравнение квадратурных формул.

(a) Коэффициенты a_k и абсциссы x_k квадратурной формулы

$$\int_a^b y(x)\,\gamma(x)\,dx \approx a_0 y(x_0) + a_1 y(x_1) + \ldots + a_n y(x_n) \tag{20.7-24}$$

можно получить разными способами.

1. Можно потребовать, чтобы формула была *точной* для $y(x) = 1, x, x^2, \ldots$ $\ldots, x^m$ $(m < 2n)$. Это дает $m+1$ уравнений для неизвестных a_k и x_k:

$$\int_a^b x^r \gamma(x)\,dx = a_0 x_0^r + a_1 x_1^r + \ldots + a_n x_n^r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, m;\ m < 2n). \tag{20.7-25}$$

2. Можно *предписать* некоторые или все абсциссы x_k (формулы Ньютона — Котеса, Грегори) или все a_k (формулы Чебышева). При этом некоторые абсциссы могут находиться вне области интегрирования.

3. Можно наложить на веса a_k условия симметрии (формула Грегори) или *условия минимизации влияния ошибок округления*. Для последнего условия все веса a_k должны быть положительны.

Относительная ценность этих требований зависит от области применения.

(b) Формулы интегрирования типа Гаусса, например, (18), точны для многочленов степени $\leqslant 2n-1$, в то время как формулы Ньютона — Котеса точны лишь для многочленов степени $\leqslant n$. В этом смысле формулы Гаусса лучше для функций, имеющих производные высоких порядков. Если же функция имеет только кусочно-непрерывную первую производную, то лучшей может оказаться формула трапеций. Имеются обобщения квадратурных формул Гаусса, которые оказываются точными для тригонометрических полиномов и других специальных функций.

20.7-5. Вычисление кратных интегралов. Кратные интегралы можно вычислять повторным применением методов, описанных в пп. 20.7-2 и 20.7-3. Для двойных интегралов можно пользоваться формулами

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{2h^2}{3}\left(2f_{00} + f_{10} + f_{01} + f_{-1,0} + f_{0,-1}\right) \tag{20.7-26}$$

или (*Симпсона*)

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{h^2}{9}\left[16f_{00} + 4\left(f_{10} + f_{01} + f_{-1,0} + f_{0,-1}\right) + \right.$$
$$\left. + f_{11} + f_{1,-1} + f_{-1,1} + f_{-1,-1}\right], \tag{20.7-27}$$

где

$$f_{jk} = f(j\,\Delta x,\ k\,\Delta y), \qquad \Delta x = \Delta y = h \qquad (j, k = 0, \pm 1).$$

Для тройных интегралов:

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \approx \frac{4}{3}h^3\left(f_{100} + f_{010} + f_{001} + f_{-1,00} + f_{0,-1,0} + f_{00,-1}\right), \tag{20.7-28}$$

где

$$f_{ijk}=f(i\,\Delta x,\ j\,\Delta y,\ k\,\Delta z),\qquad \Delta x=\Delta y=\Delta z=h\qquad (i,\ j,\ k=0,\ \pm 1).$$

При этом область интегрирования разбивают на части с помощью декартовой сетки координатных линий или поверхностей.

Простейшая *двумерная формула интегрирования гауссова типа* есть

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,\ y)\,dx\,dy\approx\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ik}f(\lambda_i,\ \lambda_k),$$

где

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1=-\sqrt{3/5},\quad \lambda_2=0,\quad \lambda_3=\sqrt{3/5},\\ &a_1=5/9,\quad a_2=8/9,\quad a_3=5/9;\quad a_{ik}=a_ia_k.\end{aligned}\right\}\qquad (20.7\text{-}29)$$

Для многомерных интегралов больший интерес представляют методы Монте-Карло, п. 20.10-1.

20.8. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

20.8-1. Вводные замечания. Численному интегрированию иногда целесообразно предпослать грубое графическое решение (п. 9.5-2) для ориентировки. Решение начальных задач (Коши) рассматривается в пп. 20.8-2—20.8-8, решение краевых задач—в пп. 20.9-1 и 20.9-3.

При численном интегрировании дифференциального уравнения первого порядка

$$y'=f(x,\ y)\qquad (20.8\text{-}1)$$

с данным начальным условием $y(x_0)=y_0$ выберем фиксированное приращение $\Delta x=h$ независимого переменного x и введем следующие обозначения:

$$x_k=x_0+k\,\Delta x\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

вычисленные (вообще говоря, приближенные) значения решения $y(x)$ и производной $y'(x)$:

$$\left.\begin{aligned}&y_k\approx y(x_k)=y(x_0+k\,\Delta x),\\ &y'_k=f_k=f(x_k,\ y_k)\approx y'(x_k)\end{aligned}\right\}\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).\qquad (20.8\text{-}2)$$

Отвлекаясь от ошибок округления, разность $y_{k+1}-y(x_{k+1})$ между вычисленным и точным значениями решения назовем **ошибкой усечения**. Если в формуле численного интегрирования заменить точные значения $y(x_k)$, $y(x_{k-1})$, ... на y_k, y_{k-1}, ..., то разность $y_{k+1}-y(x_{k+1})$ даст **локальную ошибку усечения.** Полная ошибка усечения вызывается не только локальной ошибкой, но и распространением ошибок от более ранних шагов интегрирования (п. 20.8-5).

20.8-2. Одношаговые методы решения задачи Коши. Методы Эйлера и Рунге — Кутта.

(a) Метод Эйлера состоит в пошаговом применении простой формулы

$$y_{k+1}=y_k+f_k\,\Delta x\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).\qquad (20.8\text{-}3)$$

Он дает хорошее приближение решения только при достаточно малом $\Delta x=h$ и только для нескольких первых точек. *Модификации* этого метода определяются формулами:

$$y_{k+1}=y_k+f\left(x_k+\frac{\Delta x}{2},\ y_k+f_k\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x,\qquad (20.8\text{-}4)$$

$$y_{k+1}=y_k+\frac{1}{2}\,[f_k+f(x_{k+1},\ y_k+f_k\,\Delta x)]\,\Delta x.\qquad (20.8\text{-}5)$$

(b) Методы Рунге—Кутта различных порядков приведены в таблице 20.8-1. Методы (a) и (b) называют методами третьего порядка, так как

Таблица 20.8-1

Некоторые методы Рунге—Кутта для обыкновенных дифференциальных уравнений (п. 20.8-2) и систем таких уравнений (п. 20.8-6)

В каждой формуле $k_1 = f_k\,\Delta x = f(x_k, y_k)\,\Delta x$.

(a) $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$,

$$k_2 = f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2},\ y_k + \frac{k_1}{2}\right)\Delta x,$$

$$k_3 = f(x_k + \Delta x,\ y_k + 2k_2 - k_1)\,\Delta x;$$

(b) $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3)$,

$$k_2 = f\left(x_k + \frac{\Delta x}{3},\ y_k + \frac{k_1}{3}\right)\Delta x,$$

$$k_3 = f\left(x_k + \frac{2}{3}\Delta x,\ y_k + \frac{2}{3}k_2\right)\Delta x;$$

(c) $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$,

$$k_2 = f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2},\ y_k + \frac{k_1}{2}\right)\Delta x,$$

$$k_3 = f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2},\ y_k + \frac{k_2}{2}\right)\Delta x,$$

$$k_4 = f(x_k + \Delta x,\ y_k + k_3)\,\Delta x;$$

(d) $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$,

$$k_2 = f\left(x_k + \frac{\Delta x}{3},\ y_k + \frac{k_1}{3}\right)\Delta x,$$

$$k_3 = f\left(x_k + \frac{2}{3}\Delta x,\ y_k - \frac{k_1}{3} + k_2\right)\Delta x,$$

$$k_4 = f(x_k + \Delta x,\ y_k + k_1 - k_2 + k_3)\,\Delta x;$$

(e) $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}\left[k_1 + (2 - \sqrt{2})\,k_2 + (2 + \sqrt{2})\,k_3 + k_4\right]$,

$$k_2 = f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2},\ y_k + \frac{k_1}{2}\right)\Delta x,$$

$$k_3 = f\left[x_k + \frac{\Delta x}{2},\ y_k - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_2\right]\Delta x,$$

$$k_4 = f\left[x_k + \Delta x,\ y_k - \frac{1}{\sqrt{2}}k_2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_3\right]\Delta x.$$

формулы для y_{k+1} являются точными при $f(x, y)=1, x, x^2, x^3$; для достаточное число раз дифференцируемой функции $f(x, y)$ локальная ошибка усечения имеет порядок $O(\Delta x^4)$ при $\Delta x \to 0$ (п. 4.4-3). По аналогичным соображениям методы (c), (d), (e) называют методами четвертого порядка. Из них метод (c) является наиболее употребительным.

20.8-3. Многошаговые методы решения задачи Коши.

(a) Начало решения. Сверх заданного начального значения y_0 каждая из приведенных далее схем решения требует вычисления еще нескольких значений функции $y_1, y_2, \ldots$, что может быть сделано одним из методов пп. 9.2-5, 20.8-2 или 20.8-4. Это «начало решения» должно быть вычислено с большей точностью, чем требуется для всего решения, по крайней мере в 10 раз. Если для начала решения применяется метод Рунге — Кутта, то величину шага $\Delta x = h$ для него надо брать меньшую, чем для последующей схемы расчета.

(b) Простые экстраполяционные схемы. Если уже известны $y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots$, то для аппроксимации последующего значения решения

$$y(x_{k+1}) \approx y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)\,dx \tag{20.8-6}$$

интегрируют вместо $f(x, y)$ какой-либо интерполяционный многочлен, определяемый значениями $f_k, f_{k-1}, f_{k-2}, \ldots$ (экстраполяция). Применяя вторую интерполяционную формулу Ньютона (20.5-6), получают *формулу Адамса*

$$y_{k+1} = y_k + \left(f_k + \frac{1}{2}\nabla f_k + \frac{5}{12}\nabla^2 f_k + \frac{3}{8}\nabla^3 f_k + \frac{251}{720}\nabla^4 f_k + \frac{95}{288}\nabla^5 f_k + \ldots\right)\Delta x. \tag{20.8-7}$$

Обрывая общую формулу интегрирования (7) последовательно на разностях все более высоких порядков, получаем формулу Эйлера (3), *правило трапеций*

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}(3f_k - f_{k-1})\,\Delta x, \tag{20.8-8}$$

формулу третьего порядка

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{12}(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2})\,\Delta x \tag{20.8-9}$$

и формулу Адамса — Башфорта четвертого порядка, приведенную в табл. 20.8-2.

(c) Методы типа «прогноз — коррекция» и изменение величины шага. Обозначая «предсказанное» (прогнозированное) значение y_{k+1} по формуле (7) через $y_{k+1}^{\text{пред}}$ и соответствующее значение функции f через $f_{k+1}^{\text{пред}}$, можно с помощью значения $f_{k+1}^{\text{пред}} = f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{\text{пред}}\right)$ улучшить аппроксимацию $y(x_{k+1})$. При этом уточненное, скорректированное значение y_{k+1} использует предсказанное значение f_{k+1} в квадратурной формуле замкнутого типа

$$y_{k+1} = y_{k+1}^{\text{корр}} =$$
$$= y_k + \left(f_{k+1} - \frac{1}{2}\nabla f_{k+1} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_{k+1} - \frac{1}{24}\nabla^3 f_{k+1} - \frac{19}{720}\nabla^4 f_{k+1} - \frac{3}{160}\nabla^5 f_{k+1} - \ldots\right)\Delta x. \tag{20.8-10}$$

Формула коррекции (10) усекается подобно формуле (7) на разностях соответствующих порядков. Получающаяся разность $y_{k+1}^{\text{корр}} - y_{k+1}^{\text{пред}}$ между скорректированным и предсказанным значениями может служить для оценки локальной ошибки усечения; при подходящем выборе приращения $\Delta x = h$ эту ошибку можно сделать меньше заданного допуска.

Чтобы уменьшить вдвое величину шага расчета $h=\Delta x$, для формул четвертого порядка применяются следующие интерполяционные формулы:

$$\left.\begin{aligned} y_{k-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{128}\left[45y_k+72y_{k-1}+11y_{k-2}+(-9f_k+36f_{k-1}+3f_{k-2})\,\Delta x\right],\\ y_{k+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{128}\left[11y_k+72y_{k-1}+45y_{k-2}-(3f_k+36f_{k-1}-9f_{k-2})\,\Delta x\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (20.8\text{-}11)$$

Чтобы увеличить вдвое величину шага расчета, достаточно использовать найденные значения решения через одно.

20.8-4. Улучшенные многошаговые методы.

(a) Более общие формулы интегрирования открытого типа (используемые как предсказывающие) и замкнутого типа (используемые как формулы коррекции) можно записать соответственно в виде

$$\begin{aligned} y_{k+1} = {} & A_0y_k+A_1y_{k-1}+A_2y_{k-2}+A_3y_{k-3}+\\ & +(B_0f_k+B_1f_{k-1}+B_2f_{k-2}+B_3f_{k-3})\,\Delta x \ (\textit{предсказание}), \end{aligned} \qquad (20.8\text{-}12)$$

$$\begin{aligned} y_{k+1} = {} & a_0y_k+a_1y_{k-1}+a_2y_{k-2}+\\ & +(b_{-1}f_{k+1}+b_0f_k+b_1f_{k-1}+b_2f_{k-2})\,\Delta x \quad (\textit{коррекция}). \end{aligned} \qquad (20.8\text{-}13)$$

Обычно не принято определять все коэффициенты из условия, чтобы каждая формула была точной для функций $f(x, y)=1,\ x,\ x^2, \ldots$ Вместо этого требуют согласования лишь до членов четвертого порядка (т. е. до x^4 включительно), а остающиеся свободные коэффициенты выбирают так, чтобы уменьшить распространение ошибок или чтобы упростить вычисления (п. 20.8-5). В табл. 20.8-2 приведены некоторые наиболее употребительные формулы четвертого порядка.

(b) Применение модификаций. В каждом методе «предсказание — коррекция» разность $y_{k+1}^{\text{корр}}-y_{k+1}^{\text{пред}}$ почти пропорциональна локальной ошибке усечения. Поэтому можно уточнить решение с помощью следующей модификации. До подстановки предсказанного значения $y_{k+1}^{\text{пред}}$ в формулу коррекции к нему прибавляют поправку $\alpha\left(y_k^{\text{корр}}-y_k^{\text{пред}}\right)$, пропорциональную указанной разности на предыдущем шаге расчета, а затем от скорректированного значения $y_{k+1}^{\text{корр}}$ вычитают величину $(1-\alpha)\left(y_{k+1}^{\text{корр}}-y_{k+1}^{\text{пред}}\right)$ для получения окончательного значения y_{k+1} (табл. 20.8-2).

(c) В методе Димсдейла четвертого порядка производится итерация по формулам

$$\left.\begin{aligned} y_{k+1} &= \frac{1}{2}(y_k+y_{k+2})+\frac{1}{4}(f_k-f_{k+2})\,\Delta x,\\ y_{k+2} &= y_k+\frac{1}{3}(f_k+4f_{k+1}+f_{k+2})\,\Delta x, \end{aligned}\right\} \qquad (20.8\text{-}14)$$

начиная с некоторого выбранного значения y_{k+2}, например, $y_{k+2}\approx y_k+2f_k\,\Delta x$; при этом метод допускает изменение величины шага путем простой подстановки нового значения Δx. Этот метод не требует специального расчета начала решения, но после того, как решение начато, можно избежать итераций с помощью применения экстраполяции для предсказания y_{k+2}.

20.8-5. Сравнение различных методов решения. Контроль величины шага и устойчивость.

(a) Формулы интегрирования, выбранные из-за малой локальной ошибки усечения, могут способствовать накоплению ошибок в последовательности значений решения.

Выбор метода решения дифференциального уравнения требует некоторого компромисса между учетом локальной ошибки усечения, устойчивостью и вре-

Таблица 20.8-2

Некоторые методы четвертого порядка типа «предсказание — коррекция»

Каждая схема может быть использована как с модификацией, так и без нее. Модифицированные значения обозначены через $y_{k+1}^{\text{мод}}$, $f_{k+1}^{\text{мод}} = f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{\text{мод}}\right)$. Во всех случаях величина уточнения в последней строке дает верхнюю грань локальной ошибки усечения.

(a) Предсказание по Адамсу — Башфорту с коррекцией по Адамсу — Мултону и модификацией

$$y_{k+1}^{\text{пред}} = y_k + \frac{1}{24}\left(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}\right)\Delta x$$

$$y_{k+1}^{\text{мод}} = y_{k+1}^{\text{пред}} + \frac{251}{270}\left(y_k^{\text{корр}} - y_k^{\text{пред}}\right)$$

$$y_{k+1}^{\text{корр}} = y_k + \frac{1}{24}\left(9f_{k+1}^{\text{мод}} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}\right)\Delta x$$

$$y_{k+1} = y_{k+1}^{\text{корр}} - \frac{19}{270}\left(y_{k+1}^{\text{корр}} - y_{k+1}^{\text{пред}}\right)$$

(b) Метод Хемминга

$$y_{k+1}^{\text{пред}} = y_{k-3} + \frac{4}{3}\left(2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2}\right)\Delta x$$

$$y_{k+1}^{\text{мод}} = y_{k+1}^{\text{пред}} + \frac{112}{121}\left(y_k^{\text{корр}} - y_k^{\text{пред}}\right)$$

$$y_{k+1}^{\text{корр}} = \frac{1}{8}\left(9y_k - y_{k-2}\right) + \frac{3}{8}\left(f_{k+1}^{\text{мод}} + 2f_k - f_{k-1}\right)\Delta x$$

$$y_{k+1} = y_{k+1}^{\text{корр}} - \frac{9}{121}\left(y_{k+1}^{\text{корр}} - y_{k+1}^{\text{пред}}\right)$$

(c) Метод Милна, модифицированный Хеммингом, имеет относительно малую локальную ошибку усечения, но является неустойчивым, если $\partial f/\partial y$ отрицательна или представляет матрицу с отрицательными собственными значениями

$$y_{k+1}^{\text{пред}} = y_{k-3} + \frac{4}{3}\left(2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2}\right)\Delta x$$

$$y_{k+1}^{\text{мод}} = y_{k+1}^{\text{пред}} + \frac{28}{29}\left(y_k^{\text{корр}} - y_k^{\text{пред}}\right)$$

$$y_{k+1}^{\text{корр}} = y_{k-1} + \frac{1}{3}\left(f_{k+1}^{\text{мод}} + 4f_k + f_{k-1}\right)\Delta x$$

$$y_{k+1} = y_{k+1}^{\text{корр}} - \frac{1}{29}\left(y_{k+1}^{\text{корр}} - y_{k+1}^{\text{пред}}\right)$$

менем расчета. Сверх этого предпочтительнее те формулы, в которых слагаемые имеют одинаковые знаки и не слишком отличаются по абсолютной величине, так как при этом уменьшается влияние ошибок, вызванных округлением. Окончательный выбор зависит от области применения и от применяемых вычислительных средств. Часто применяется двойная точность вычисления значений переменных.

Если данная функция $f(x, y)$ очень сложная, то основное время расчета связано с вычислением ее значений. Для задачи Коши с умеренно гладкой функцией $f(x, y)$ *многошаговые схемы интегрирования* требуют относительно мало вычислений производных и допускают экономный автоматический контроль величины шага по величине $\left|y_{k+1}^{\text{корр}} - y_{k+1}^{\text{пред}}\right|$. *Методы Рунге — Кутта* очень устойчивы (п. 20.8-5) и не требуют отдельной программы для начала

решения; поэтому они предпочтительнее для задач, связанных с частым изменением шага. Но методы Рунге — Кутта требуют относительно большого количества вычислений производных на каждом шаге и для них весьма сложен эффективный контроль величины шага.

Чтобы оценить локальную ошибку усечения для контроля величины шага в методах Рунге — Кутта, можно сравнить результаты, полученные при разной величине шага (используя, по возможности, уже накопленные значения производных), или же исследовать подходящие функции от k_i. Для часто применяемого метода Рунге — Кутта (с) из табл. 20.8-1 величина

$$e = 3f_{k+1}\,\Delta x + k_1 - 2k_3 - 2k_4 \qquad (20.8\text{-}15)$$

дает грубую оценку локальной ошибки усечения.

(b) Устойчивость приближенного решения $y_0, y_1, y_2, \ldots$ уравнения (1), вычисленного с помощью многоточечной формулы

$$y_{k+1} = A_0 y_k + A_1 y_{k-1} + \ldots + A_r y_{k-r} + \\ + (B_{-1} f_{k+1} + B_0 f_k + B_1 f_{k-1} + \ldots + B_r f_{k-r})\,\Delta x, \qquad (20.8\text{-}16)$$

зависит от устойчивости соответствующего линеаризованного разностного уравнения для последовательности ошибок $e_0, e_1, e_2, \ldots$, а именно

$$e_{k+1} \approx A_0 e_k + A_1 e_{k-1} + \ldots + A_r e_{k-r} + \\ + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=x_k} (B_{-1} e_{k+1} + B_0 e_k + B_1 e_{k-1} + \ldots + B_r e_{k-r})\,\Delta x \qquad (20.8\text{-}17)$$

(п. 20.4-8). Отвечающее ему характеристическое уравнение

$$\left.\begin{aligned} &(-1 + B_{-1}Ah)\,z^{r+1} + (A_0 + B_0 Ah)\,z^r + (A_1 + B_1 Ah)\,z^{r-1} + \ldots \\ &\qquad \ldots + (A_r + B_r Ah) = 0, \\ &A = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x = x_k}, \qquad h = \Delta x, \end{aligned}\right\} \qquad (20.8\text{-}18)$$

будет иметь корень $z_1 \approx \exp Ah$ при малых значениях $|Ah|$. Если $A = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x = x_k} > 0$, то соответствующее собственное колебание последовательности ошибок будет неустойчивым; но таким же будет и точное решение $y(x)$ вблизи $x = x_k$, так что относительная ошибка может оказаться и незначительной при малых Δx.

При $r = 0$ (простой одношаговый метод) корень z_1 будет единственным. При $r > 0$ уравнение (18) будет иметь дополнительные корни, отвечающие *побочным колебаниям в вычисленном решении*, возникающим вследствие разностной аппроксимации высокого порядка. Для **относительной устойчивости** вычисленного решения требуется, чтобы все такие дополнительные корни при рассматриваемых значениях Δx лежали внутри единичного круга $|z| < 1$ (п. 20.4-8).

Наибольший риск существует при изменении шага (которое, подобно ошибкам округления, может вызвать побочные колебания) и вблизи границ устойчивости исходного дифференциального уравнения. Если есть подозрение в возникновении такой ситуации, то его можно проверить путем искусственного введения малого возмущения.

Устойчивость схем «прогноз — коррекция» зависит и от предсказывающей формулы и от формулы коррекции, но в большей степени от последней, если величина коррекции мала.

20.8-6. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков и системы дифференциальных уравнений.

(а) Каждое обыкновенное дифференциальное уравнение второго или более высокого порядка равносильно системе уравнений первого порядка (п. 9.1-3). Если записать последнюю в матричной форме п. 13.6-1, то кажый метод решения из пп. 20.8-2 — 20.8-4 дает аналогичный метод численного интегрирования системы.

(b) В частности, рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$y' = f(x, y, z, \ldots), \qquad z' = g(x, y, z, \ldots), \ldots \qquad (20.8\text{-}19)$$

с решением $y = y(x)$, $z = z(x), \ldots$

Интегрирование системы (19) *методом последовательных приближений Пикара* или с помощью *рядов Тейлора* по существу уже описано в п. 9.2-5.

Метод Рунге — Кутта применяется по схеме, подобной п. 20.8-2, b:

$$\left.\begin{aligned} &y_{k+1}=y_k+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4),\\ &z_{k+1}=z_k+\frac{1}{6}(m_1+2m_2+2m_3+m_4),\ \ldots,\\ &\text{где}\\ &k_1=f(x_k,\ y_k,\ z_k,\ldots)\Delta x,\\ &m_1=g(x_k,\ y_k,\ z_k,\ldots)\Delta x,\ \ldots,\\ &k_2=f\left(x_k+\frac{\Delta x}{2},\ y_k+\frac{k_1}{2},\ z_k+\frac{m_1}{2},\ldots\right)\Delta x,\\ &m_2=g\left(x_k+\frac{\Delta x}{2},\ y_k+\frac{k_1}{2},\ k+\frac{m_1}{2},\ldots\right)\Delta x,\ \ldots,\\ &k_3=f\left(x_k+\frac{\Delta x}{2},\ y_k+\frac{k_2}{2},\ z_k+\frac{m_2}{2},\ldots\right)\Delta x,\\ &m_3=g\left(x_k+\frac{\Delta x}{2},\ y_k+\frac{k_2}{2},\ z_k+\frac{m_2}{2},\ldots\right)\ x,\ \ldots,\\ &k_4=f(x_k+\Delta x,\ y_k+k_3,\ z_k+m_3,\ldots)\Delta x,\\ &m_4=g(x_k+\Delta x,\ y_k+k_3,\ z_k+m_3,\ldots)\Delta x,\ \ldots \end{aligned}\right\}\tag{20.8-20}$$

Любая разностная схема из п. 20.8-3 может быть применена к каждому из уравнений (19) с обозначениями

$$\left.\begin{aligned} y(x_k)=y_k,\qquad\qquad & z(x_k)=z_k,\ \ldots,\\ f(x_k,\ y_k,\ z_k,\ldots)=f_k,\quad & g(x_k,\ y_k,\ z_k,\ldots)=g_k,\ \ldots \end{aligned}\right\}\tag{20.8-21}$$

(c) Устойчивость точного решения $y=y(x)$ *системы в матричных обозначениях*

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)$$

зависит от *матрицы* $(\partial f/\partial y)$ (п. 13.6-5). Уравнение (17) становится матричным разностным уравнением; при исследовании относительной устойчивости собственные значения этого уравнения надо сравнивать с собственными значениями матрицы $(\partial f/\partial y)\,|_{x=x_k}$ [20.12].

20.8-7. Специальные формулы для уравнений второго порядка. Ввиду практической важности дифференциальных уравнений второго порядка представляют интерес приведенные ниже схемы численного интегрирования дифференциального уравнения

$$y''=f(x,\ y,\ y')\tag{20.8-22}$$

при начальных условиях $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$; в этих схемах введены обозначения:

$$x_0+k\,\Delta x=x_k,\quad y(x_k)=y_k,\quad y'(x_k)=y_k,\quad f(x_k,\ y_k,\ y'_k)=f_k$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots).\tag{20.8-23}$$

Приведенные ниже методы могут быть распространены на системы уравнений второго порядка так, как указано в п.20.8-6.

(a) Метод Рунге—Кутта для уравнения (22):

$$\left.\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + y'_k\,\Delta x + \frac{1}{6}(k_1+k_2+k_3)\,\Delta x,\\ y'_{k+1} &= y'_k + \frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4),\\ &\text{где}\\ k_1 &= f(x_k,\ y_k,\ y'_k)\,\Delta x,\\ k_2 &= f\left(x_k+\frac{\Delta x}{2},\ y_k+y'_k\frac{\Delta x}{2},\ y'_k+\frac{k_1}{2}\right)\Delta x,\\ k_3 &= f\left(x_k+\frac{\Delta x}{2},\ y_k+y'_k\frac{\Delta x}{2}+\frac{k_1}{4}\Delta x,\ y'_k+\frac{k_2}{2}\right)\Delta x,\\ k_4 &= f\left(x_k+\Delta x,\ y_k+y'_k\,\Delta x+\frac{k_2}{2}\Delta x,\ y'_k+k_3\right)\Delta x. \end{aligned}\right\} \qquad (20.8\text{-}24)$$

(b) Интерполяционно-итерационная схема. Начиная с некоторого пробного значения f_{k+1}, итерируют

$$\left.\begin{aligned} y_{k+1} &= 2y_k - y_{k-1} + \left(f_k + \frac{1}{12}\nabla^2 f_{k+1}\right)\Delta x^2,\\ y'_{k+1} &= y'_{k-1} + \left(2f_k + \frac{1}{3}\nabla^2 f_{k+1}\right)\Delta x. \end{aligned}\right\} \qquad (20.8\text{-}25)$$

(c) Схема «предсказание—коррекция»

$$\left.\begin{aligned} y'_{k+1} &= y'_{k-3} + \frac{4}{3}(2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2})\,\Delta x \quad (\text{«предсказание»}),\\ y_{k+1} &= y_{k-1} + \frac{1}{3}(y'_{k+1} + 4y'_k + y'_{k-1})\,\Delta x,\\ y'_{k+1} &= y'_{k-1} + \frac{1}{3}(f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1})\,\Delta x \quad (\text{«коррекция»}). \end{aligned}\right\} \qquad (20.8\text{-}26)$$

Если $f(x,\ y,\ y')$, не содержит явно y', то можно применять в качестве предсказывающей формулу

$$y_{k+1}^{\text{пред}} = 2y_{k-1} - y_{k-3} + \frac{4}{3}(f_k + f_{k-1} + f_{k-2})\,\Delta x^2, \qquad (20.8\text{-}27a)$$

а для уточнения формулу (*Штермера*)

$$y_{k+1}^{\text{корр}} = 2y_k - y_{k-1} + \frac{1}{12}\left(f_{k+1}^{\text{пред}} + 10f_k + f_{k-1}\right)\Delta x^2 \qquad (20.8\text{-}27b)$$

(см. также п. 9.1-5, b).

(d) Метод Нумерова для линейных уравнений (см. [20.12]). Линейное дифференциальное уравнение вида

$$y'' = f(x)\,y + g(x) \qquad (20.8\text{-}28)$$

можно решить с помощью одной лишь формулы коррекции (27b); подставляя в уравнение (28), получаем

$$\left.\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k - u_{k-1} + \left[f_k y_k + g_k + \frac{1}{12}(g_{k+1} - 2g_k + g_{k-1})\right]\Delta x^2,\\ &\text{где}\\ u_k &= y_k\left[1 - \frac{1}{12}f_k\,\Delta x^2\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (20.8\text{-}29)$$

20.8-8. Анализ частотных характеристик. Если дана устойчивая формула интегрирования (12), то синусоидальный ввод $f_k \equiv e^{i\omega x_k}$ вызовет синусоидальное решение

$y_k = H(i\omega)\, e^{i\omega x_k}$ (так же как в п. 9.4-6). Подстановка дает **частотную характеристику**

$$H(i\omega) \equiv G(z) \equiv \frac{B_0 z^{-1} + B_1 z^{-2} + \ldots}{1 - A_0 z^{-1} - A_1 z^{-2} - \ldots}\, \Delta x \qquad \left(z \equiv e^{i\omega\Delta x}\right). \tag{20.8-30}$$

Здесь формулы интегрирования можно толковать как приближения к идеальному оператору интегрирования $\frac{1}{i\omega}$ по амплитуде и фазе. Для уменьшения распространения ошибок округления надо, чтобы ошибка $\left| H(i\omega) - \frac{1}{i\omega} \right|$ убывала с частотой, см. [20.12].

20.9. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ; ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

20.9-1. Вводные замечания. В пп. 20.9-2 — 20.9-5 описываются разностные методы, применимые для численного решения краевых задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений с частными производными, а также и для численного интегрирования гиперболических и параболических уравнений с частными производными. Кроме описанных здесь методов имеются еще следующие методы решения.

Приведение уравнения с частными производными к обыкновенным дифференциальным уравнениям путем разделения переменных (пп. 10.1-3 и 10.4-9), решения характеристического уравнения (пп. 10.2-2 и 10.2-4) или метода характеристик (п. 10.3-2).

Приведение к вариационной задаче (пп. 11.6-9 и 15.4-7) и решение ее прямыми методами, например методом Ритца (п. 11.7-2).

Приведение к интегральному уравнению (п.15.5-2), которое можно решать прямыми методами или с помощью методов аппроксимации п. 20.9-10.

Методы возмущений для решения задачи о собственных значениях описаны в п. 15.4-11.

20.9-2. Двухточечная краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. также пп. 9.3-3, 15.4-5 и 15.5-2). Двухточечная краевая задача, т. е. задача нахождения решения обыкновенного дифференциального уравнения, удовлетворяющего краевым условиям на границе интервала (a, b), может быть сведена к задаче Коши методом п. 9.3-4. Более подходящим может оказаться следующий *разностный метод.*

Разделим данный интервал (a, b) на равные промежутки точками

$$x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_0 + 2\Delta x, \quad \ldots, \quad x_n = x_0 + n\Delta x = b$$

и заменим каждую производную и в дифференциальном уравнении и в краевых условиях соответствующим разностным отношением того же порядка (п. 20.7-1, а, рис. 20.9-1 и 20.9-6). Это позволяет аппроксимировать данное дифференциальное уравнение разностным уравнением того же порядка. Численное решение разностного уравнения сводится к решению системы уравнений относительно неизвестных значений функции $y_k = y(x_0 + k\Delta x)$ (пп. 20.2-5 — 20.3-2). При расчетах вручную особенно удобны релаксационные методы (п. 20.3-2, с).

Пример. Чтобы найти решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{5} y = 0$, удовлетворяющее краевым условиям $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, делим интервал (0, 1) на n промежутков длины $\Delta x = 1/n$ и, заменяя $\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, получаем разностное уравнение

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} + \frac{1}{5} \Delta x^2 y_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

с дополнительными условиями $y_0 = 1$, $y_n = 0$. При $n = 4$ ($k = 1, 2, 3$) получаем следующую систему относительно y_1, y_2, y_3:

$$\begin{cases} -1{,}99y_1 + y_2 = -1 \\ y_1 - 1{,}99y_2 + y_3 = 0, \\ y_2 - 1{,}99y_3 = 0. \end{cases}$$

20.9-3. Обобщенный метод Ньютона (квазилинеаризация). Хотя численные методы пп. 9.3-4 и 20.9-2 применимы как к линейным, так и к нелинейным двухточечным краевым задачам, эти методы легче применять к линейным задачам. Для решения важного класса нелинейных двухточечных краевых задач вида

$$\left.\begin{aligned} & y'' = f(x, y, y') \quad (a < x < b), \\ & \varphi[y(a), y'(a)] = 0, \quad \psi[y(b), y'(b)] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{20.9-1}$$

часто применяется **метод квазилинеаризации**. Начиная с пробного решения $y^{[0]}(x)$, которое удовлетворяет заданным краевым условиям, получают последовательные приближения $y^{[1]}(x)$, $y^{[2]}(x)$, ... путем решения линейных задач

$$\left.\begin{aligned} & y''^{[j+1]} = f(x, y^{[j]}, y'^{[j]}) + f_y(x, y^{[j]}, y'^{[j]})(y^{[j+1]} - y^{[j]}) + \\ & \qquad + f_{y'}(x, y^{[j]}, y'^{[j]})(y'^{[j+1]} - y'^{[j]}), \\ & \varphi_y[y^{[j]}(a), y'^{[j]}(a)][y^{[j+1]}(a) - y^{[j]}(a)] + \\ & \qquad + \varphi_{y'}[y^{[j]}(a), y'^{[j]}(a)][y'^{[j+1]}(a) - y'^{[j]}(a)] = 0, \\ & \psi_y[y^{[j]}(b), y'^{[j]}(b)][y^{[j+1]}(b) - y^{[j]}(b)] + \\ & \qquad + \psi_{y'}[y^{[j]}(b), y'^{[j]}(b)][y'^{[j+1]}(b) - y'^{[j]}(b)] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{20.9-2}$$

Этот метод без труда обобщается на системы дифференциальных уравнений с помощью матричных обозначений п. 13.6-1 и является обобщением метода Ньютона п. 20.2-8: подобно последнему, он может сходиться весьма быстро. Здесь можно сформулировать и общие условия сходимости, но удобнее проверять сходимость методом проб.

20.9-4. Разностные методы численного решения уравнений с частными производными для случая двух независимых переменных. Методы решения задач для уравнений с частными производными аналогичны изложенным в п. 20.9-2. Введем подходящую сетку значений координат $x_i = x_0 + i\Delta x$, $y_k = y_0 + k\Delta y$ ($i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); неизвестная функция $\Phi(x, y)$ будет представлена дискретным множеством своих значений $\Phi(x_i, y_k) = \Phi_{ik}$. Аппроксимируем каждый дифференциальный оператор соответствующим разностным оператором того же порядка так, что любая производная будет аппроксимирована соответствующим разностным отношением. Получаемое разностное уравнение будет давать систему уравнений для неизвестных значений Φ_{ik}.

Наиболее важные задачи приводят к следующим ситуациям.

1. *Краевая задача для эллиптического уравнения* (например, задача Дирихле для $\nabla^2\Phi = 0$, п. 15.6-2) приводит к системе N линейных уравнений относительно N неизвестных Φ_{ik}.

Большое число уравнений и неизвестных, связанное с такими разностными методами, затрудняет решение задач даже на больших ЭВМ. С другой стороны, характерные особенности разностных операторов, получающихся для обычных линейных уравнений с частными производными второго и четвертого порядков (табл. 10.4-1), приводят к системе линейных уравнений с «разреженными» матрицами, которые имеют мало ненулевых членов вдали от главной диагонали. Поэтому к таким задачам хорошо подходят итерационные методы п. 20.3-2.

2. *Линейная задача о собственных значениях* (например, $\nabla^2\Phi = \lambda\Phi$ с подходящими краевыми условиями, п. 15.4-1) приводит к задаче о собственных значениях некоторой матрицы.

3. *Задача Коши для параболического или гиперболического уравнения* (п. 10.3-4) приводит к системе уравнений, если выбранная схема сведе́ния к раз-

ностным уравнениям сопоставляет каждое неизвестное значение Φ_{ik} с другим неизвестным, так же как и с известным, значением функции (*неявные методы* решения задач Коши).

4. Если для производных по времени в задаче Коши применяется разностная аппроксимация (п. 20.7-1), то мы получаем рекуррентные формулы для последовательных значений Φ_{ik}, начинающихся от заданных начальных значений (*явные методы* решения задачи Коши).

Вообще говоря, явные методы решения задачи Коши требуют меньше вычислений, чем неявные методы, но в рекуррентных схемах распространение ошибок и вопросы устойчивости подобны тем, которые возникают при численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений. Как и в последнем случае, аппроксимация может быть улучшена с помощью метода «предсказание — коррекция», аналогичного рассмотренному в п. 20.8-3 (см.также п. 20.9-8).

20.9-5. Двумерные разностные операторы. На рис. 20.9-1 — 20.9-6 приведены часто встречающиеся линейные разностные операторы. В частности, каждая диаграмма на рис. с 20.9-1 по 20.9-5 дает центрально-разностное выражение для центра «звездочки» через взвешенную сумму значений функции «сверху», «снизу», «справа» и т. д. относительно центра; каждый весовой коэффициент помещен в соответствующем узле сетки. Например, рис. 20.9-1 надо понимать так:

$$h^2\nabla^2\Phi|_{(x_i,\, y_k)} \approx \Phi(x_i+h,\ y_k)+\Phi(x_i-h,\ y_k)+\Phi(x_i,\ y_k+h)+\Phi(x_i,\ y_k-h)-$$
$$-4\Phi(x_i,\ y_k)=\Phi_{i+1,k}+\Phi_{i-1,\,k}+\Phi_{i,\,k+1}+\Phi_{i,\,k-1}-4\Phi_{ik},$$

где $h=\Delta x=\Delta y$ есть шаг сетки по обоим переменным x и y.

Рис. 20.9-1 применяется для сетки прямоугольных декартовых координат при равных шагах по x и y. Рис. 20.9-3 применяется при изменении шага сетки, либо чтобы приспособить ее к неправильным границам, либо чтобы увеличить точность вычислений в некоторой области, представляющей особый интерес. В любом случае используемая сетка может быть уточнена после первых грубых подсчетов.

Рисунки 20.9-2, 20.9-4 и 20.9-5 демонстрируют разностные операторы для сеток, отличающихся от прямоугольных декартовых. На рис. 20.9-6 приведены разностные операторы для интерполирования вперед и назад.

Для расчетных целей сетка точек $(x_i,\ y_k)$ часто обозначается простой последовательностью 1, 2, ...; соответствующие значения Φ_{ik} обозначаются при этом через Φ_1, Φ_2, ... (см., например, рис. 20.9-7). В расчетах релаксационного типа (п.20.3-2) при решении линейных краевых задач вошло в обычай применять крупный план области и записывать значения функции и невязки непосредственно в каждой точке сетки. Значения функции и невязки от предшествующих шагов релаксационного процесса просто вычеркиваются или стираются.

Примечание. *Дифференциальный оператор в линейных краевых задачах нельзя заменять разностным оператором более высокого порядка,* так как это может вызвать ложные колебательные составляющие в решении получающегося разностного уравнения. С другой стороны, *в разностных схемах решения задач Коши* для гиперболических или параболических уравнений часто используют разностные операторы высших порядков, чем соответствующие производные, подобно тому как это сделано в пп. 20.8-1 — 20.8-5.

20.9-6. Представление краевых условий (рис. 20.9-7). Аппроксимируем данные границы линиями применяемой сетки; если нужно, вводим градуированную сетку (рис. 20.9-3). Тогда:

1. Если заданы краевые значения искомой функции Φ, то вписываем их в соответствующих точках границы (рис. 20.9-7, *a*).

2. Если заданы краевые значения производных (таких, как $\partial\Phi/\partial n$, п. 5.6-1, b), то продолжаем сетку за границу области и аппроксимируем краевые условия соответствующими разностными

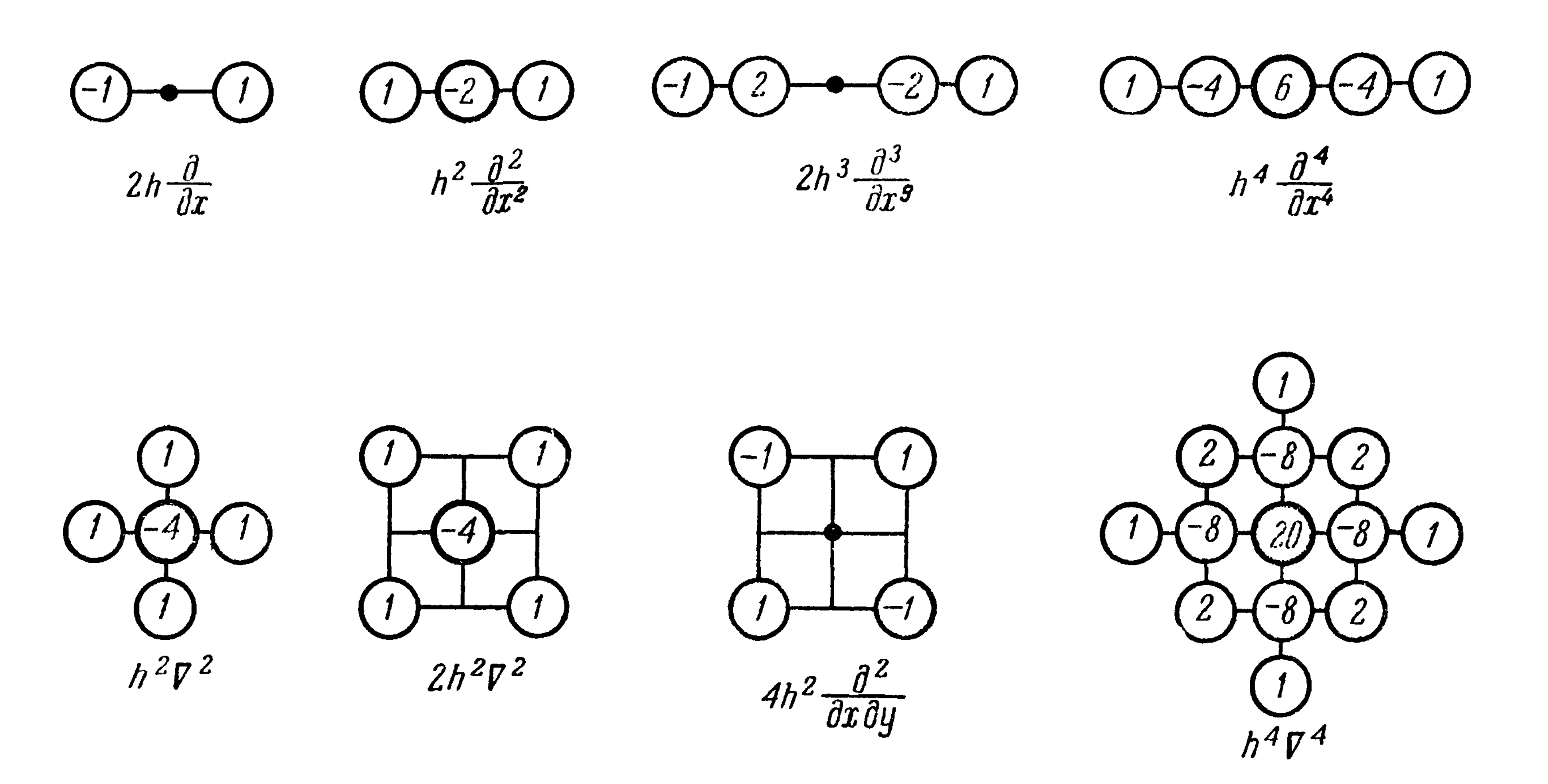


Рис. 20.9-1. Операторы для центрально-разностной аппроксимации (прямоугольная сетка декартовых координат: $\Delta x = \Delta y = h$). Относительная погрешность имеет порядок h^2.

Рис. 20.9-2. Центрально-разностная аппроксимация для сетки из правильных треугольников со стороной h. Относительная погрешность имеет порядок h^2.

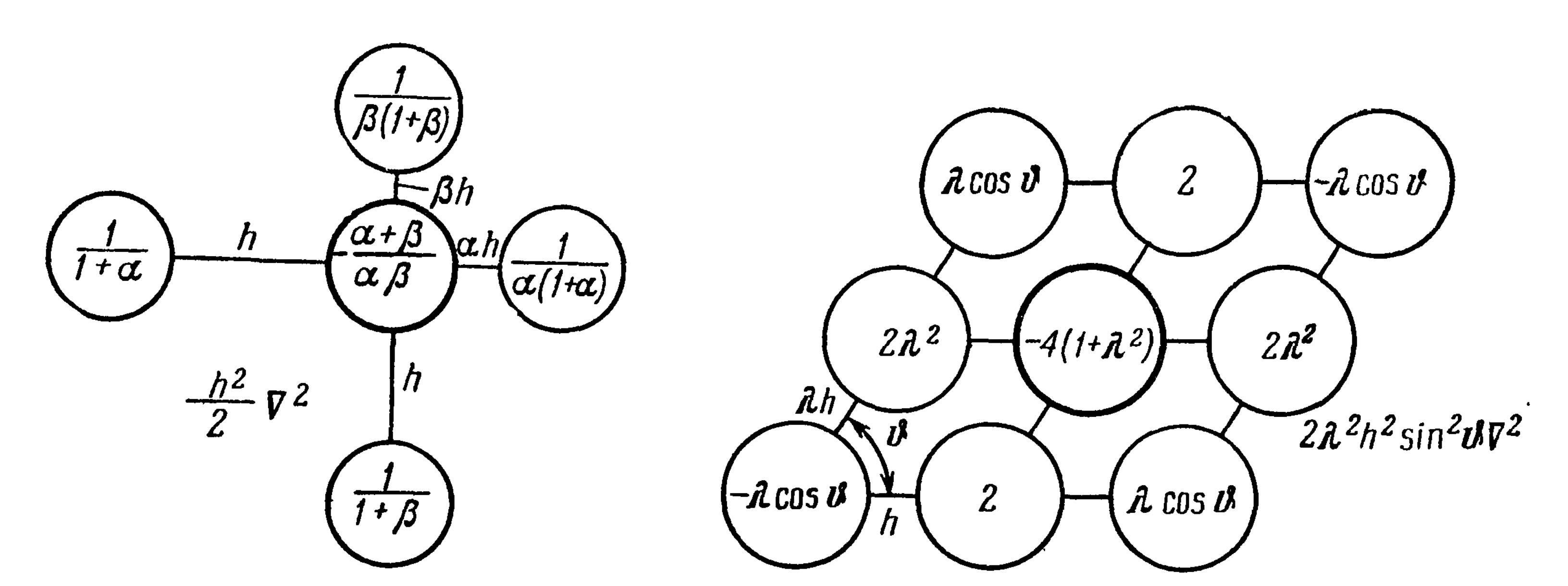


Рис. 20.9-3. Центрально-разностный оператор, применяемый для градуированной сетки или для аппроксимации вблизи границы. Относительная погрешность имеет порядок h.

Рис. 20.9-4. Центрально-разностный оператор, применяемый для косоугольной сетки декартовых координат. Относительная погрешность имеет порядок h^2.

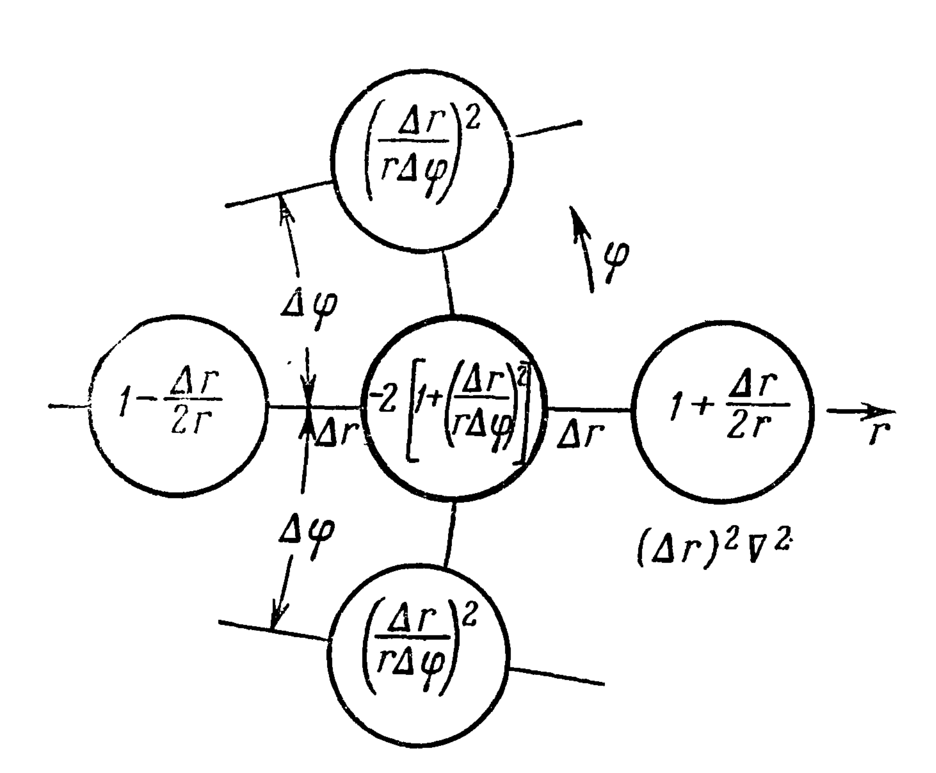


Рис. 20.9-5. Центрально-разностный оператор, применяемый для сетки полярных координат r, φ. Относительная погрешность имеет порядок $r\,\Delta r\Delta\varphi$. Удобна сетка, градуированная соотношением $\Delta r = r\Delta\varphi$.

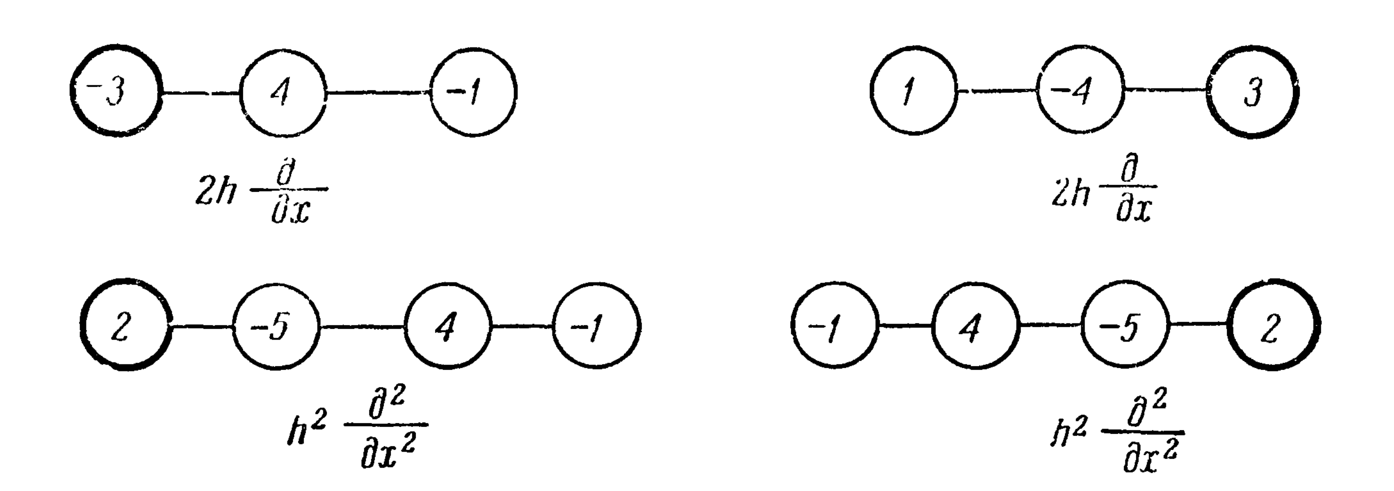


Рис. 20.9-6. Разностная аппроксимация для интерполирования вперед или назад (прямоугольная сетка декартовых координат $\Delta x = \Delta y = h$). Относительная погрешность имеет порядок h^2.

отношениями. Получающиеся уравнения, так же как и разностные отношения, аппроксимирующие само дифференциальное уравнение в точках вблизи границы, будут включать значения функции в точках, лежащих вне области; но все такие значения можно исключить алгебраическими преобразованиями.

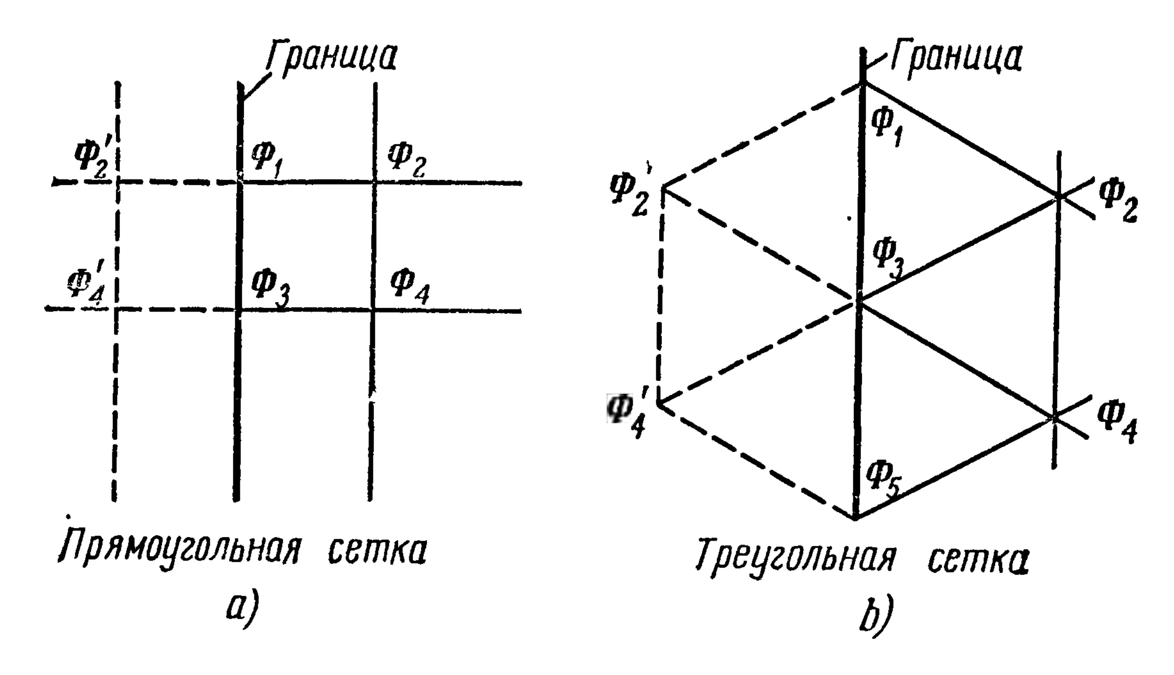


Рис. 20.9-7. Представление краевых условий для $\nabla^2\Phi = 0$ или $\nabla^4\Phi = 0$. Сетка продолжена влево от данной границы и введены «отраженные значения» $\Phi_2' = \Phi_2$, $\Phi_4' = \Phi_4$ для представления условия $\partial\Phi/\partial n = 0$ на границе разностным отношением. Краевое условие $\Phi = 0$, $\nabla^2\Phi = 0$ (например, свободный край упругой пластины) представляется подобным же образом через $\Phi_1 = \Phi_3 = 0$, $\Phi_2' = -\Phi_2$, $\Phi_4' = -\Phi_4$.

Пример. На рис. 20.9-7, *b* показано, как аппроксимируются краевые условия $\partial\Phi/\partial n=0$ путем «отражения» значений функции в границах так, что $\Phi_2' - \Phi_2 = 0$, $\Phi_4' - \Phi_4 = 0$. Для дифференциального уравнения $\nabla^2\Phi = 0$, применяя первый разностный оператор рис. 20.9-2, получаем

$$\Phi_2' + \Phi_4' + \Phi_5 + \Phi_4 + \Phi_2 + \Phi_1 - 6\Phi_3 = 0$$

или, так как из краевого условия вытекает $\Phi_2' = \Phi_2$, $\Phi_4' = \Phi_4$,

$$2\Phi_2 + 2\Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_1 - 6\Phi_3 = 0.$$

Последнее уравнение содержит только точки, лежащие внутри области или на границе.

20.9-7. Задачи, содержащие более двух независимых переменных. Аналогичные методы применимы к задачам, содержащим более двух независимых переменных. В частности,

$$h^2\nabla^2\Phi(x, y, z) \approx \Phi(x+h, y, z) + \Phi(x-h, y, z) + \Phi(x, y+h, z) + \Phi(x, y-h, z) + \Phi(x, y, z+h) + \Phi(x, y, z-h) - 6\Phi(x, y, z). \qquad (20.9\text{-}3)$$

Число независимых переменных часто может быть уменьшено путем разделения переменных (п.10.1-3).

20.9-8. Пригодность разностных схем. Условия устойчивости. Пригодность решения, полученного разностной аппроксимацией, требует исследования. Если дифференциальное уравнение аппроксимируется двумя различными разностными уравнениями, то даже при одном и том же шаге сетки мы можем получить значительное расхождение. Сверх того, не всегда возможно улучшить аппроксимацию путем уменьшения шага сетки, даже если разностное уравнение допускает точное решение. Пригодны только такие схемы, в которых при уменьшении шага сетки решение разностного уравнения сходится к решению рассматриваемого дифференциального уравнения. Для параболических и гиперболических уравнений с частными производными такая сходимость имеет место только тогда, когда шаги сетки по обеим координатам удовлетворяют некоторому *условию устойчивости*. Так, *решение разностного уравнения*

$$\frac{\Phi(x+\Delta x, t) - 2\Phi(x, t) + \Phi(x-\Delta x, t)}{\Delta x^2} = \frac{1}{a^2}\,\frac{\Phi(x, t+\Delta t) - \Phi(x, t)}{\Delta t}$$

сходится к решению уравнения теплопроводности (п. 10.4-1)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

при $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$, *если* $\Delta t < \frac{1}{2a^2} \Delta x^2$.

Решение разностного уравнения

$$\frac{\Phi(x+\Delta x,\ t) - 2\,\Phi(x,\ t) + \Phi(x-\Delta x,\ t)}{\Delta x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\Phi(x,\ t+\Delta t) - 2\,\Phi(x,\ t) + \Phi(x,\ t-\Delta t)}{\Delta t^2}$$

сходится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

при $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$, *если* $\Delta t < \frac{1}{c} \Delta x$.

Такие условия устойчивости обеспечивают также лучшую аппроксимацию при конечном шаге сетки.

Заметим, что *неявные* методы (п. 20.9-4) не требуют таких ограничений, как явные методы, приведенные выше. Например, неявный метод, основанный на *аппроксимации Никольсона*

$$-\frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2} [\Phi(x-\Delta x,\ t+\Delta t) + \Phi(x+\Delta x,\ t+\Delta t)] + \left(1 + \frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2}\right) \Phi(x,\ t+\Delta t) =$$
$$= \left(1 - \frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2}\right) \Phi(x,\ t) + \frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2} [\Phi(x-\Delta x,\ t) + \Phi(x+\Delta x,\ t)],$$

дает приближенное решение уравнения теплопроводности, которое сходится к точному решению, как только $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$.

20.9-9. Методы аппроксимирующих функций для численного решения краевых задач.

(а) Аппроксимация функциями, точно удовлетворяющими краевым условиям. Пусть переменное x одномерно или многомерно, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (п. 15.4-1). Требуется найти решение дифференциального уравнения обыкновенного или с частными производными

$$\mathsf{L}\,\Phi(x) = f(x) \qquad (x \in V), \tag{20.9-4a}$$

удовлетворяющее краевому условию

$$\mathsf{B}\,\Phi(x) = b(x) \qquad (x \in S) \tag{20.9-4b}$$

на границе S данной области V (п. 15.4-1). Аппроксимируем искомое решение $\Phi(x)$ некоторой *аппроксимирующей функцией*

$$\varphi = \varphi(x;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m), \tag{20.9-5a}$$

которая удовлетворяет краевым условиям и зависит от m параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Во многих приложениях уравнения (4) линейны и функцию $\Phi(x)$ аппроксимируют линейной комбинацией известных функций

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi_k(x), \tag{20.9-5b}$$

где $\varphi_1(x)$ удовлетворяет краевому условию (4, *b*), а $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ удовлетворяют однородному краевому условию $\mathsf{B}\,\Phi(x) = 0$ $(x \in S)$ (см. также п. 15.4-2). Ошибка аппроксимации (5*a*) или (5*b*) есть функция от $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$E(x;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \equiv \mathsf{L}\,\varphi(x;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) - f(x). \tag{20.9-6}$$

Неизвестные параметры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ выражения (5*a*) или (5*b*) определяют по одной из следующих схем.

1. Коллокация. Выбирают α_k так, чтобы $\varphi(x;\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m)$ точно удовлетворяла данному дифференциальному уравнению (4*a*) в m точках $x=X_1,\ x=X_2,\ \ldots,\ x=X_m$, т. е. чтобы

$$E(X_i;\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \qquad (20.9\text{-}7)$$

2. Средние квадратические приближения (см. также п. 20.6-2). Выбирают α_k так, чтобы минимизировать среднюю квадратическую ошибку

$$J(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m)\equiv\int\limits_V |E(\xi;\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m)|^2\,d\xi \qquad (20.9\text{-}8)$$

или величину

$$J'(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m)\equiv\sum_{h=1}^{N} b_h\,|E(X_h;\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)|^2, \qquad (20.9\text{-}9)$$

где b_h — подходящим образом определенные весовые коэффициенты, приданные N точкам $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_N$ из V. Например, можно взять равноотстоящие точки и положить

$$b_1=b_2=\ldots=b_N=1.$$

Коэффициенты α_k определяются из m условий

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha_k}=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial J'}{\partial\alpha_k}=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \qquad (20.9\text{-}10)$$

3. Метод Галеркина. Выбирают m линейно независимых «весовых функций» $\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_m(x)$ (часто применяют $\psi_k=\varphi_k$) и определяют α_k так, чтобы

$$\int\limits_V \psi_i(\xi)\,E(\xi;\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\alpha_m)\,d\xi=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \qquad (20.9\text{-}11)$$

Если данные уравнения (4) линейны (линейная краевая задача), то и получающиеся при аппроксимации вида (5*b*) уравнения (7), (10) или (11) будут *линейны*.

(b) Аппроксимация функциями, которые точно удовлетворяют дифференциальному уравнению. Часто предпочтительнее использовать аппроксимирующие функции (5), которые для всех x из V точно удовлетворяют дифференциальному уравнению (4*a*), и подбирать параметры α_k по краевым условиям одним из указанных выше методов.

20.9-10. Численное решение интегральных уравнений (см. также п. 15.3-2).

(a) Решение $\Phi(x)$ линейного интегрального уравнения

$$\Phi(x)-\lambda\int\limits_V K(x,\ \xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi=F(x) \qquad (20.9\text{-}12)$$

часто можно аппроксимировать *итерационным методом* п. 15.3-8, a, или же можно *аппроксимировать данное ядро* $K(x,\ \xi)$ многочленом или другим вырожденным ядром (п. 15.3-1, b), чтобы упростить решение. Задача о собственных значениях ($F\equiv 0$) часто может рассматриваться как вариационная задача (п. 15.3-6).

(b) *Метод аппроксимирующих функций* п. 20.9-9 примени́м также непосредственно к численному решению линейного интегрального уравнения (12). Выберем аппроксимирующую функцию вида (5*b*) и вычислим m функций

$$f_k(x)=\varphi_k(x)-\lambda\int\limits_V K(x,\ \xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \qquad (20.9\text{-}13)$$

Тогда

1. *Метод коллокации* дает m линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_k(X_i) = F(X_i) \qquad (i=1, 2, \ldots, m) \tag{20.9-14}$$

2. *Метод наименьших квадратов* приводит к системе линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m} A_{ik}\alpha_k = \beta_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m), \\ &\text{где} \\ &A_{ik} = \sum_{h=1}^{N} b_h f_i(X_h) f_k(X_h), \\ &\beta_i = \sum_{h=1}^{N} b_h f_i(X_h) F(X_h); \end{aligned}\right\} \tag{20.9-15}$$

b_h — весовые коэффициенты, определяемые так же, как в формуле (9).

3. *Метод Галеркина* приводит к системе линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m} A_{ik}\alpha_k = \beta_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m), \\ &\text{где} \\ &A_{ik} = \int_V \psi_i(\xi) f_k(\xi)\, d\xi, \quad \beta_i = \int_V \psi_i(\xi) F(\xi)\, d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{20.9-16}$$

20.10. МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО

20.10-1. Методы Монте-Карло. Каждый расчет методом Монте-Карло можно рассматривать как оценку некоторого интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)\, d\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \tag{20.10-1}$$

с помощью выборочного среднего значения

$$\overline{f(x_1, x_2, \ldots, x_N)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f({}^k x_1, {}^k x_2, \ldots, {}^k x_N), \tag{20.10-2}$$

где $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ — некоторая (вообще говоря, многомерная, $N > 1$) случайная величина с известной функцией распределения $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$.

Методы Монте-Карло широко применяются при исследовании явлений в случайных процессах, слишком сложных для явного решения методами теории вероятностей, а именно, в задачах диффузии нейтронов, задачах детектирования и связи и в разнообразных исследованиях операций. Сверх этого, часто имеет смысл преобразовать задачи других типов, особенно содержащие сложные многомерные интегралы, в такую форму, которая позволяет решать их методами Монте-Карло.

Для простоты ограничимся рассмотрением оценки методом Монте-Карло *одномерного* интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\Phi(\lambda) \tag{20.10-3}$$

с помощью среднего значения

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{n}\left[f({}^1x) + f({}^2x) + \ldots + f({}^nx)\right]. \tag{20.10-4}$$

Дисперсия этой оценки по случайной выборке $({}^1x,\ {}^2x,\ \ldots,\ {}^nx)$ равна

$$\mathrm{D}\,\overline{f(x)} = \frac{1}{n}\,\mathrm{D}\,f(x), \tag{20.10-5}$$

так что средняя квадратическая ошибка убывает только как $1/\sqrt{n}$ при возрастании n (п. 19.2-3). Дисперсия оценки вызвана случайными флуктуациями в распределении различных выборок, $({}^1x,\ {}^2x,\ \ldots,\ {}^nx)$.

20.10-2. Два метода уменьшения дисперсии оценки. Следующие методы «подправляют» выборку $({}^1x,\ {}^2x,\ \ldots,\ {}^nx)$ так, чтобы уменьшить дисперсию выборочной средней при условии сохранения соотношения

$$\mathrm{M}\,\overline{f(x)} = \mathrm{M}\,f(x) = I, \tag{20.10-6}$$

т. е. без смещения оценки.

(а) Метод расслоенной выборки. Диапазон изменения случайной величины x делят на некоторое число подходящим образом выбранных классовых интервалов $\xi_{j-1} < x \leqslant \xi_j$ и фиксируют число n_j в остальном независимых выборочных значений ${}^kx = {}^ix_j$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_j)$, попадающих в j-й классовый интервал. Предполагая заранее известными вероятности

$$P_j = \mathrm{P}\,\{\xi_{j-1} < x \leqslant \xi_j\} = \Phi(\xi_j) - \Phi(\xi_{j-1}) \tag{20.10-7}$$

попадания в j-й классовый интервал, можно в качестве несмещенной оценки I применить *среднее по расслоенной выборке*

$$\overline{f(x)}_{\text{рассл}} = \sum_j P_j \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} f({}^ix_j), \tag{20.10-8}$$

причем

$$\mathrm{D}\,\overline{f(x)}_{\text{рассл}} = \sum_j \frac{P_j^2}{n_j}\,\mathrm{D}\,f({}^ix_j). \tag{20.10-9}$$

Заметим, что повторные расслоенные выборки будут отличаться только внутри классовых интервалов. Дисперсия (9) может оказаться меньше дисперсии случайной выборки $\mathrm{D}\,f(x)/n$ при $n = \sum_j n_j$, если предварительная информация позволяет удачно выбрать значения ξ_j и n_j. Лучше всего было бы выбрать классовые интервалы с одинаковыми дисперсиями

$$\mathrm{D}\,f({}^ix_j) = \frac{1}{P_j}\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} f^2(\lambda)\, d\Phi(\lambda) - \left[\frac{1}{P_j}\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} f(\lambda)\, d\Phi(\lambda)\right]^2 \tag{20.10-10}$$

и затем назначить теоретически точные числа выборок в каждом классовом интервале по формуле

$$n_j = nP_j. \tag{20.10-11}$$

В этом идеальном случае будем иметь относительно малую дисперсию оценки

$$\mathrm{D}\,\overline{f(x)}_{\text{рассл}} = \frac{1}{n}\,\mathrm{D}\,f({}^ix_j). \tag{20.10-12}$$

При уменьшении величины классовых интервалов метод расслоенной выборки приводит к результатам, аналогичным тем, которые дают квадратурные формулы. Но обычно берут большие классовые интервалы; на практике особый интерес представляют многомерные интегралы, где простые соотношения симметрии могут помочь удачному выбору классовых интервалов.

(b) Применение коррелированных выборок. Если выборочные значения ${}^{k}x$ не являются независимыми (как это бывает в чисто случайной выборке), то выражение (5) для дисперсии оценки надо заменить на (см. также п. 19.8-1):

$$\mathsf{D}\,\overline{f(x)}_{\text{корр}} = \frac{1}{n}\,\mathsf{D}\,f(x) + \frac{2}{n^2}\sum_{i<k}\sum \operatorname{cov}\{f({}^{i}x),\ f({}^{k}x)\}. \qquad (20.10\text{-}13)$$

Разумно введенная *отрицательная корреляция* (т. е. корреляция с отрицательным коэффициентом корреляции) между выбранными парами выборочных значений ${}^{i}x$, ${}^{k}x$ будет приводить к отрицательным членам с ковариациями в формуле (13) и может уменьшить дисперсию по сравнению с дисперсией случайной выборки $\mathsf{D}\,f(x)/n$ без смещения оценки.

Приведем простой пример. Пусть величина x распределена равномерно в интервале $(0,\ 1)$ и пусть $f(x)$ есть монотонная функция $\frac{e^x-1}{e-1}$. Планируем выборку так, чтобы n было четным и ${}^{2}x = 1 - {}^{1}x$, ${}^{4}x = 1 - {}^{3}x$, ..., ${}^{n}x = 1 - {}^{n-1}x$; в остальном выборочные значения независимы. Так как $f(x)$ и $f(1-x)$ коррелированы отрицательно, то дисперсия средней уменьшается:

$$\mathsf{D}\,\overline{f(x)}_{\text{корр}} \approx \frac{1}{31}\,\mathsf{D}\,\overline{f(x)},$$

так что средняя квадратическая ошибка уменьшается примерно в 5, 6 раз. Кроме того, коррелированная выборка требует генерирования меньшего количества случайных чисел. С другой стороны, более интересны применения к многомерным задачам.

Заметим, что метод расслоенной выборки фактически также приводит к отрицательной корреляции между выборочными значениями: значение ${}^{k+1}x$ не может попасть в данный классовый интервал, если значение ${}^{k}x$ его уже заполнило.

20.10-3. Использование предварительной информации. Метод значимой выборки. Вычисления по методу Монте-Карло часто могут быть упрощены путем разумного использования предварительной информации о возможном результате. В методе значимой выборки пробуют оценить интеграл (1) с помощью выборочного среднего $\overline{f(y)/g(y)}$, где y — случайная величина с плотностью распределения вероятностей

$$\varphi_y(y) = g(y)\,\frac{d\Phi(y)}{dy}. \qquad (20.10\text{-}14)$$

Легко видеть, что такая оценка является несмещенной. Функция $g(y)$ выбирается так, чтобы дисперсия

$$\mathsf{D}\,\frac{f(y)}{g(y)} = \mathsf{M}\left[\frac{f(y)}{g(y)} - I\right]^2 \qquad (20.10\text{-}15)$$

была мала, при условии, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_y(y)\,dy = 1$.

В частности, выбор $g(y) = f(y)/I$ уменьшает дисперсию (15) до нуля, но для этого надо знать неизвестное значение I.

Значимая выборка позволяет «сконцентрировать» выбор вблизи нужных значений y, например, там, где $f(y)$ быстрее изменяется.

20.10-4. Некоторые методы генерирования случайных чисел. Проверка случайности. В **методах сравнения** для генерирования псевдослучайных чисел x_i, меньших данного положительного **модуля** m, начинают с некоторого неотрицательного числа $x_0 < m$ и вычисляют последовательные значения

$$x_i = [ax_{i-1} + c]_{\operatorname{mod} m} \quad (i = 1, 2, \ldots;\ 0 < a < m,\ 0 \leqslant c < m), \qquad (20.10\text{-}16)$$

где сложение по модулю m определено в п. 12.2-10. В двоичной вычислительной машине модуль m удобно выбирать равным 2^l, где l — длина машинного слова (число разрядов). При $c = 0$ генератор называется **мультипликативным генератором сравнения**, в противном случае — **смешанным генератором сравнения**.

Последовательности, получаемые этим способом, не вполне случайны, но имеют такие «псевдослучайные» свойства, как равномерное распределение в интервале $(0,\ m)$, некоррелированность различных x_i, случайно выступающий ряд четных и нечетных чисел и т. д. Равномерность распределения может быть проверена по критерию согласия χ^2 (п. 19.6-7), а порядковая (сериальная) корреляция — так, как указано в п. 19.7-4. Заметим, однако, что даже при отсутствии корреляции выборки $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, образованные при помощи последовательности псевдослучайных чисел, могут *не* быть независимыми, что может привести к неприятным сюрпризам. Может оказаться разумным получить вполне случайные выборки с помощью цифрового преобразования белого шума.

Псевдослучайные числа с распределением, отличным от равномерного, легко получить как функцию $F(x_i)$ от равномерно распределенных случайных величин.

ГЛАВА 21

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

21.1. ВВЕДЕНИЕ

21.1-1. Вводные замечания. Глава 21 представляет по существу собрание формул, связывающих специальные функции. Отсылаем к гл. 7 для связи с теорией функций комплексного переменного и к гл. 9, 10 и 15 для применений к дифференциальным уравнениям. Гораздо более подробное изложение, а также сведения о реже встречающихся специальных функциях можно найти в книгах [21.1] и [21.3]. В книгах [21.5] содержится перечень числовых таблиц специальных функций.

21.2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

21.2-1. Тригонометрические функции (см. также табл. 7.2-1).

(а) **Тригонометрические функции** $w=\sin z$, $w=\cos z$ могут быть определены при помощи степенных рядов (п. 21.2-12), как решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2}+w=0,$$

как $z=\arcsin w$, $z=\arccos w$ (интегральные представления, п. 21.2-4) или, для действительных z, в геометрических терминах (гониометрия, рис. 21.2-1). Остальные тригонометрические функции определяются как

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \operatorname{ctg} z=\frac{1}{\operatorname{tg} z}=\frac{\cos z}{\sin z}, \tag{21.2-1}$$

$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \operatorname{cosec} z=\frac{1}{\sin z}. \tag{21.2-2}$$

Таблица 21.2-1

Специальные значения тригонометрических функций

A (градусы)	0° 360°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
A (рацианы)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} A$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\operatorname{ctg} A$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\pm\infty$	0

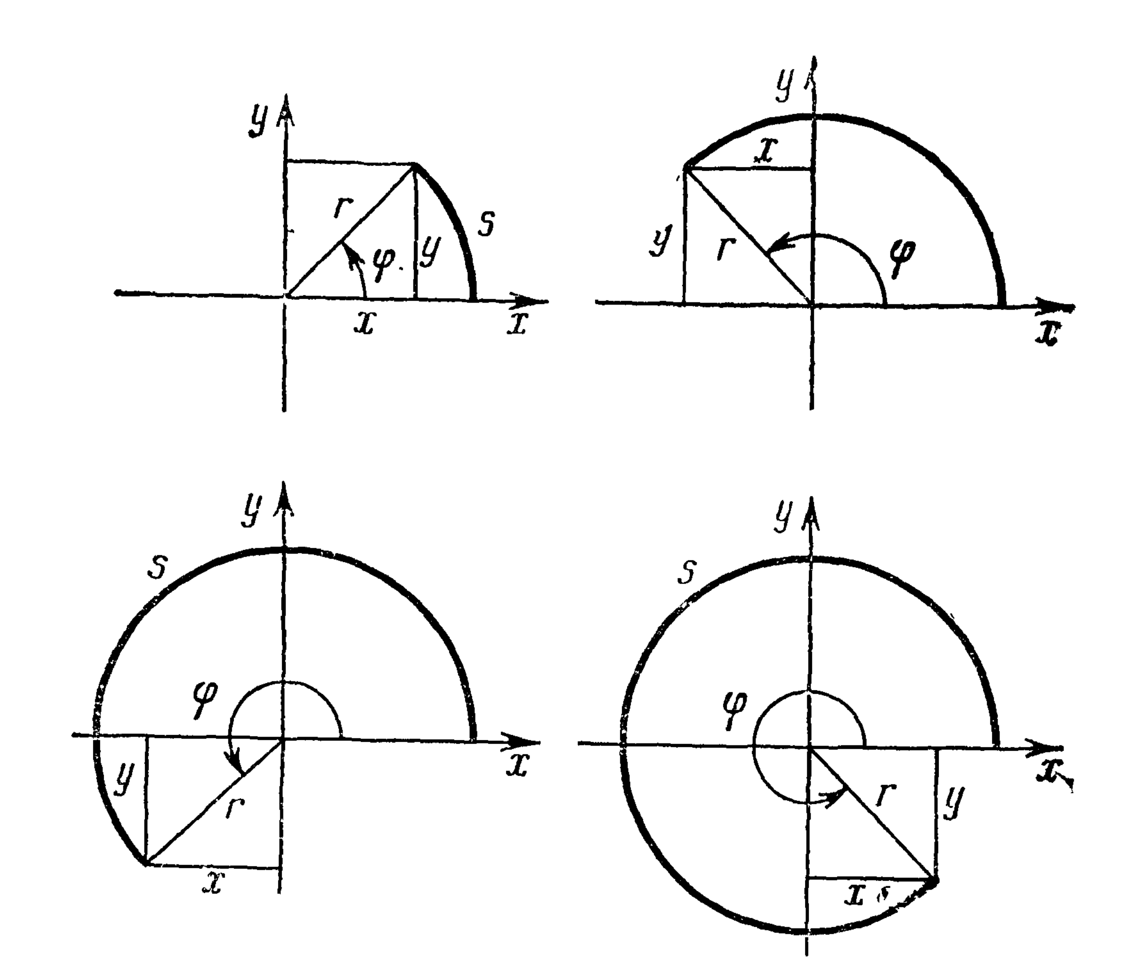


Рис. 21.2-1. Определения тригонометрических функций для данного угла φ:

$$\varphi = \frac{s}{r} \quad \text{(в радианах)},$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{x}{y} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\sec\varphi = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{cosec}\varphi = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin\varphi}.$$

Рис. 21.2-2. Графики тригонометрических функций для действительного аргумента $z = \varphi$.

(b) $\sin z$ и $\cos z$ — периодические функции с периодом 2π; $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ периодичны и имеют период π; $\sin z$, $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ — нечетные функции, а $\cos z$ — четная функция.

На рис. 21.2-2 изображены графики $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ для действительного аргумента.

На рис. 21.2-3 показаны прямоугольные треугольники, которые облегчают запоминание значений тригонометрических функций для $z=\pi/6(=30°)$, $z=\pi/4(=45°)$ и $z=\pi/3(=60°)$ (см. также табл. 21.2-1).

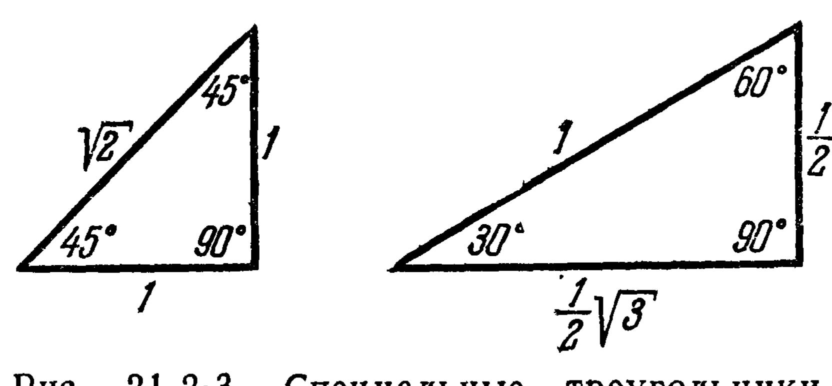


Рис. 21.2-3. Специальные треугольники для вычисления значений тригонометрических функций углов 30°, 45°, 60°.

(c) Соотношения

$$\left.\begin{aligned} \sin z &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right), \\ \cos z &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right), \\ \operatorname{tg} z &= \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-z\right), \\ \operatorname{ctg} z &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-z\right), \end{aligned}\right\} \qquad (21.2\text{-}3)$$

позволяют выражать значения тригонометрических функций любого действительного аргумента через значения функций для аргумента, заключенного между 0 и $\pi/2$ *рад*$(=90°)$ (табл. 21.2-2 и рис. 21.2-1).

Таблица 21.2-2

Соотношения между тригонометрическими функциями различных аргументов

	$-A$	$\frac{\pi}{2}\pm A$	$\pi\pm A$	$\frac{3\pi}{2}\pm A$	$2\pi\pm A$
sin	$-\sin A$	$\cos A$	$\mp\sin A$	$-\cos A$	$\pm\sin A$
cos	$\cos A$	$\mp\sin A$	$-\cos A$	$\pm\sin A$	$\cos A$
tg	$-\operatorname{tg} A$	$\mp\operatorname{ctg} A$	$\pm\operatorname{tg} A$	$\mp\operatorname{ctg} A$	$\pm\operatorname{tg} A$
ctg	$-\operatorname{ctg} A$	$\mp\operatorname{tg} A$	$\pm\operatorname{ctg} A$	$\mp\operatorname{tg} A$	$\pm\operatorname{ctg} A$

21.2-2. Соотношения между тригонометрическими функциями (см. также п. 21.2-6). Основные соотношения

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1, \quad \frac{\sin z}{\cos z}=\operatorname{tg} z=\frac{1}{\operatorname{ctg} z} \qquad (21.2\text{-}4)$$

имеют следствиями формулы:

$$\left.\begin{aligned} \sin z &= \sqrt{1-\cos^2 z}=\frac{\operatorname{tg} z}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 z}}, \\ \cos z &= \sqrt{1-\sin^2 z}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}}=\frac{\operatorname{ctg} z}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 z}}, \\ \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\sqrt{1-\sin^2 z}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 z}}{\cos z}=\frac{1}{\operatorname{ctg} z}, \\ \operatorname{ctg} z &= \frac{\sqrt{1-\sin^2 z}}{\sin z}=\frac{\cos z}{\sqrt{1-\cos^2 z}}=\frac{1}{\operatorname{tg} z}. \end{aligned}\right\} \qquad (21.2\text{-}5)$$

21.2-3. Теоремы сложения и формулы для кратных углов.

(a) Из основного соотношения

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A \tag{21.2-6}$$

следуют:

$$\left.\begin{array}{l}\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\sin B\cos A,\\ \cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B,\\ \operatorname{tg}(A\pm B)=\dfrac{\operatorname{tg}A\pm\operatorname{tg}B}{1\mp\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B},\quad \operatorname{ctg}(A\pm B)=\dfrac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B\mp 1}{\operatorname{ctg}B\pm\operatorname{ctg}A};\end{array}\right\} \tag{21.2-7}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin 2A=2\sin A\cos A,\\ \cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A,\\ \operatorname{tg}2A=\dfrac{2\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}^2 A},\\ \operatorname{ctg}2A=\dfrac{\operatorname{ctg}^2 A-1}{2\operatorname{ctg}A}=\dfrac{1}{2}(\operatorname{ctg}A-\operatorname{tg}A);\end{array}\right\} \tag{21.2-8}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}},\quad \cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}},\\ \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sin A}{1+\cos A}=\dfrac{1-\cos A}{\sin A},\\ \operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sin A}{1-\cos A}=\dfrac{1+\cos A}{\sin A};\end{array}\right\} \tag{21.2-9}$$

$$\left.\begin{array}{l}a\sin A+b\cos A=r\sin(A+B)=r\cos(90^\circ-A-B),\\ r=+\sqrt{a^2+b^2},\quad \operatorname{tg}B=\dfrac{b}{a};\end{array}\right\} \tag{21.2-10}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin A\pm\sin B=2\sin\dfrac{A\pm B}{2}\cos\dfrac{A\mp B}{2},\\ \cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2},\\ \cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2},\\ \operatorname{tg}A\pm\operatorname{tg}B=\dfrac{\sin(A\pm B)}{\cos A\cos B},\quad \operatorname{ctg}A\pm\operatorname{ctg}B=\dfrac{\sin(B\pm A)}{\sin A\sin B};\end{array}\right\} \tag{21.2-11}$$

$$\left.\begin{array}{l}2\cos A\cos B=\cos(A-B)+\cos(A+B),\\ 2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B),\\ 2\sin A\cos B=\sin(A-B)+\sin(A+B),\\ 2\cos^2 A=1+\cos 2A,\quad 2\sin^2 A=1-\cos 2A.\end{array}\right\} \tag{21.2-12}$$

(b) Если n — целое положительное число, то

$$\left.\begin{array}{l}\sin nz=\dbinom{n}{1}\cos^{n-1}z\sin z-\dbinom{n}{3}\cos^{n-3}z\sin^3 z+\\ \qquad\qquad+\dbinom{n}{5}\cos^{n-5}z\sin^5 z\mp\ldots,\\ \cos nz=\cos^n z-\dbinom{n}{2}\cos^{n-2}z\sin^2 z+\\ \qquad\qquad+\dbinom{n}{4}\cos^{n-4}z\sin^4 z\mp\ldots\end{array}\right\} \tag{21.2-13}$$

Если n — нечетное целое число, то

$$\left.\begin{aligned} \sin^n z &= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} \left[\sin nz - \binom{n}{1} \sin (n-2) z + \binom{n}{2} \sin (n-4) z - \right. \\ &\left. - \binom{n}{3} \sin (n-6) z + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \sin z \right], \\ \cos^n z &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[\cos nz + \binom{n}{1} \cos (n-2) z + \binom{n}{2} \cos (n-4) z + \right. \\ &\left. + \binom{n}{3} \cos (n-6) z + \ldots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \cos z \right]. \end{aligned}\right\} \qquad (21.2\text{-}14)$$

Если n — четное целое число, то

$$\left.\begin{aligned} \sin^n z &= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \left[\cos nz - \binom{n}{1} \cos (n-2) z + \binom{n}{2} \cos (n-4) z - \right. \\ &\left. - \ldots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{\frac{n-2}{2}} \cos 2z \right] + \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n}, \\ \cos^n z &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[\cos nz + \binom{n}{1} \cos (n-2) z + \binom{n}{2} \cos (n-4) z + \right. \\ &\left. + \ldots + \binom{n}{\frac{n-2}{2}} \cos 2z \right] + \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n}. \end{aligned}\right\} \qquad (21.2\text{-}15)$$

21.2-4. Обратные тригонометрические функции (см. также табл. 7.2-1).
(а) Обратные тригонометрические функции

$$w = \arcsin z, \quad w = \arccos z, \quad w = \operatorname{arctg} z; \quad w = \operatorname{arcctg} z \, ^{1)}$$

определяются как обратные соответственно к функциям

$$z = \sin w, \quad z = \cos w, \quad z = \operatorname{tg} w, \quad z = \operatorname{ctg} w$$

или как

$$\left.\begin{aligned} \arcsin z &= \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \arccos z = -\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \\ \operatorname{arctg} z &= \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}, \quad \operatorname{arcctg} z = -\int_{-\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (21.2\text{-}16)$$

---

[1]) В английской литературе эти функции иногда обозначаются через $\sin^{-1} z$, $\cos^{-1} z$, $\operatorname{tg}^{-1} z$, $\operatorname{ctg}^{-1} z$.

На рис. 21.2-4 изображены графики обратных тригонометрических функций для действительного аргумента; заметим, что $\arcsin z$ и $\arccos z$ действительны только при z действительном и $|z| \leqslant 1$. Все четыре обратные тригонометрические функции бесконечнозначны, потому что тригонометрические функции — периодические. Для действительного аргумента **главные значения** $\arcsin z$ и $\operatorname{arctg} z$ заключены между $-\pi/2$ и $\pi/2$ (см. рис. 21.2-4); главное значение $\arccos z$ и $\operatorname{arcctg} z$ заключено между 0 и π.

(b) Отметим формулы

$$\left.\begin{aligned} \arcsin a \pm \arcsin b &= \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} \pm b\sqrt{1-a^2}\right) = \\ &= \arccos\left(\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2} \mp ab\right), \\ \arccos a \pm \arccos b &= \arccos\left(ab \mp \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\right) = \\ &= \arcsin\left(b\sqrt{1-a^2} \pm a\sqrt{1-b^2}\right), \\ \operatorname{arctg} a \pm \operatorname{arctg} b &= \operatorname{arctg}\frac{a \pm b}{1 \mp ab}. \end{aligned}\right\} \quad (21.2\text{-}17)$$

21.2-5. Гиперболические функции (см. также табл. 7.2-1). **Гиперболические функции** $w = \operatorname{sh} z$, $w = \operatorname{ch} z$ определяются степенными рядами (п. 21.2-12),

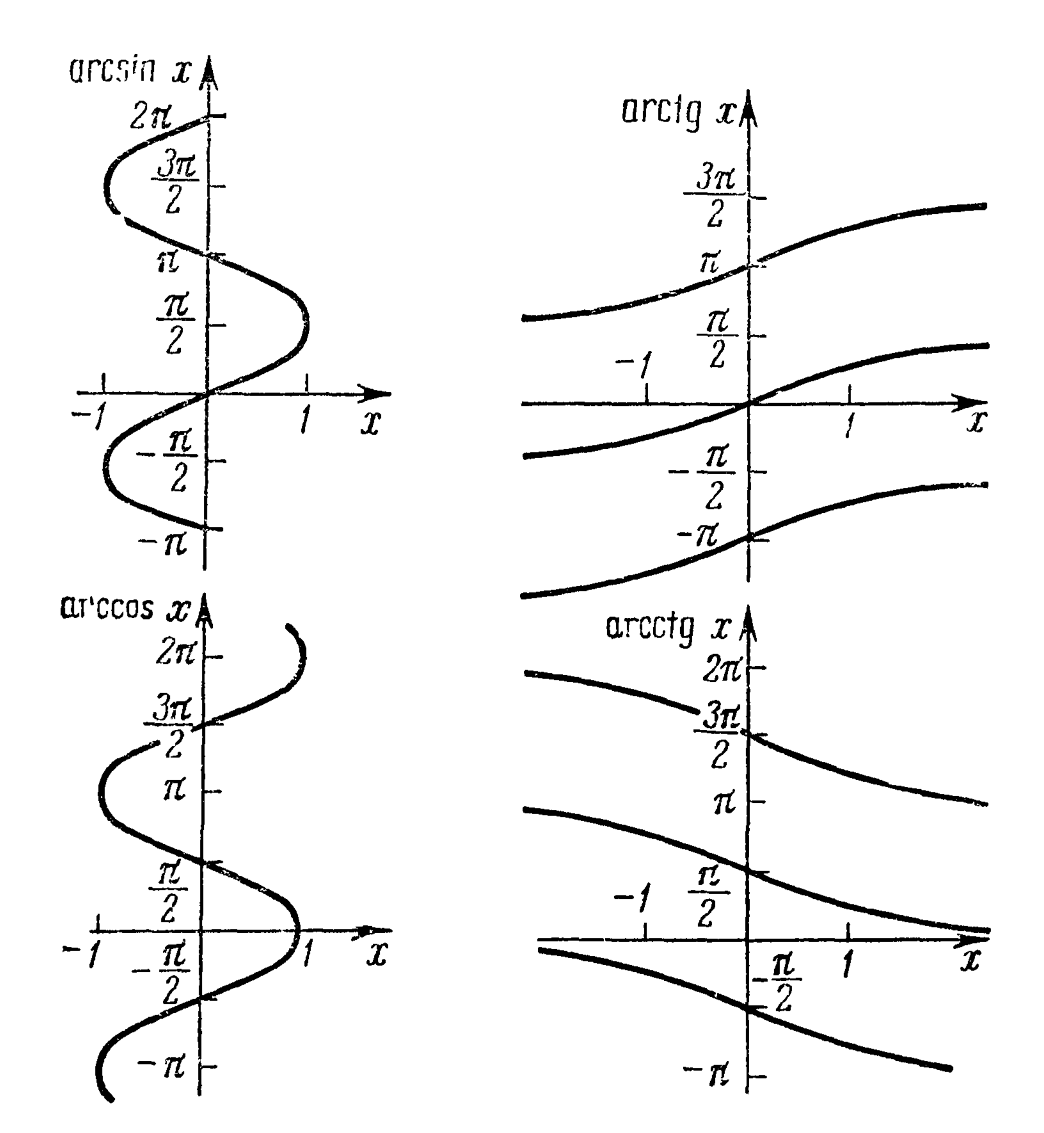


Рис. 21.2-4. Графики обратных тригонометрических функций.

как решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2} - w = 0,$$

или просто соотношениями

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \qquad (21.2\text{-}18)$$

Четыре дополнительные гиперболические функции определяются как

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, & \operatorname{cth} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}, \\ \operatorname{sech} z &= \frac{1}{\operatorname{ch} z}, & \operatorname{cosech} z &= \frac{1}{\operatorname{sh} z}. \end{aligned}\right\} \quad (21.2\text{-}19)$$

На рис. 21.2-5 изображены графики $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$ для действительного аргумента.

Функция $\operatorname{ch} z$ — четная, а $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{th} z$ — нечетные.

Геометрическая интерпретация $\operatorname{sh} t$ *и* $\operatorname{ch} t$ *для действительных* t. Если $t/2$ — площадь, ограниченная равносторонней гиперболой (п. 2.5-2, b) $x^2 - y^2 = 1$, осью x и радиусом-вектором точки (x, y) гиперболы, то $y = \operatorname{sh} t$, $x = \operatorname{ch} t$. Заметим, что если гиперболу заменить окружностью $x^2 + y^2 = 1$, то $y = \sin t$, $x = \cos t$.

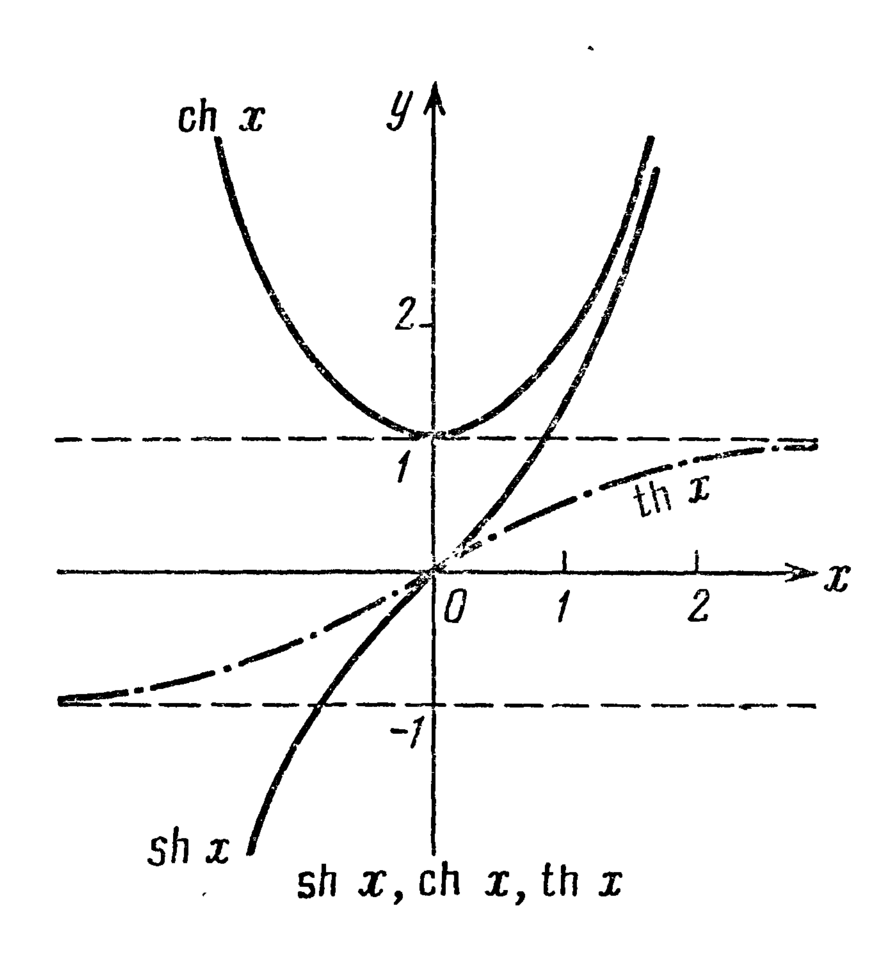


Рис. 21.2-5. Гиперболические функции.

21.2-6. Соотношения между гиперболическими функциями (см. также п. 21.2-8). Из основных соотношений

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1, \qquad \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \operatorname{th} z = \frac{1}{\operatorname{cth} z} \quad (21.2\text{-}20)$$

следуют

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 z - 1} = \frac{\operatorname{th} z}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 z}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 z - 1}}, \\ \operatorname{ch} z &= \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 z} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 z}} = \frac{\operatorname{cth} z}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 z - 1}}, \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 z}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 z - 1}}{\operatorname{ch} z}, \\ \operatorname{cth} z &= \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 z}}{\operatorname{sh} z} = \frac{\operatorname{ch} z}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 z - 1}}. \end{aligned}\right\} \quad (21.2\text{-}21)$$

21.2-7. Формулы сложения для гиперболических функций (эти формулы могут быть получены из соответствующих формул для тригонометрических

функций применением соотношений п. 21.2-9).

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{sh}(A\pm B)=\operatorname{sh}A\operatorname{ch}B\pm\operatorname{ch}A\operatorname{sh}B,\\&\operatorname{ch}(A\pm B)=\operatorname{ch}A\operatorname{ch}B\pm\operatorname{sh}A\operatorname{sh}B,\\&\operatorname{th}(A\pm B)=\frac{\operatorname{th}A\pm\operatorname{th}B}{1\pm\operatorname{th}A\operatorname{th}B},\quad\operatorname{cth}(A\pm B)=\frac{\operatorname{cth}A\operatorname{cth}B\pm 1}{\operatorname{cth}B\pm\operatorname{cth}A};\end{aligned}\right\}\tag{21.2-22}$$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{sh}2A=2\operatorname{ch}A\operatorname{sh}A,\qquad \operatorname{ch}2A=\operatorname{ch}^2A+\operatorname{sh}^2A,\\&\operatorname{th}2A=\frac{2\operatorname{th}A}{1+\operatorname{th}^2A},\qquad \operatorname{cth}2A=\frac{\operatorname{cth}^2A+1}{2\operatorname{cth}A};\end{aligned}\right\}\tag{21.2-23}$$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{sh}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}A-1}{2}},\qquad \operatorname{ch}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}A+1}{2}},\\&\operatorname{th}\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{sh}A}{\operatorname{ch}A+1}=\frac{\operatorname{ch}A-1}{\operatorname{sh}A},\qquad \operatorname{cth}\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{sh}A}{\operatorname{ch}A-1}=\frac{\operatorname{ch}A+1}{\operatorname{sh}A};\end{aligned}\right\}\tag{21.2-24}$$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{sh}A\pm\operatorname{sh}B=2\operatorname{sh}\frac{A\pm B}{2}\operatorname{ch}\frac{A\mp B}{2},\\&\operatorname{ch}A+\operatorname{ch}B=2\operatorname{ch}\frac{A+B}{2}\operatorname{ch}\frac{A-B}{2},\\&\operatorname{ch}A-\operatorname{ch}B=2\operatorname{sh}\frac{A+B}{2}\operatorname{sh}\frac{A-B}{2},\\&\operatorname{th}A\pm\operatorname{th}B=\frac{\operatorname{sh}(A\pm B)}{\operatorname{ch}A\operatorname{ch}B},\\&\operatorname{cth}A\pm\operatorname{cth}B=\frac{\operatorname{sh}(B\pm A)}{\operatorname{sh}A\operatorname{sh}B};\end{aligned}\right\}\tag{21.2-25}$$

$$\left.\begin{aligned}&2\operatorname{ch}A\operatorname{ch}B=\operatorname{ch}(A+B)+\operatorname{ch}(A-B),\\&2\operatorname{sh}A\operatorname{sh}B=\operatorname{ch}(A+B)-\operatorname{ch}(A-B),\\&2\operatorname{sh}A\operatorname{ch}B=\operatorname{sh}(A+B)+\operatorname{sh}(A-B),\\&2\operatorname{ch}^2A=1+\operatorname{ch}2A,\quad 2\operatorname{sh}^2A=2\operatorname{ch}2A-1.\end{aligned}\right\}\tag{21.2-26}$$

21.2-8. Обратные гиперболические функции (см. также п. 21.2-4). Обратные гиперболические функции [1]) $w=\operatorname{arsh}z$, $w=\operatorname{arch}z$, $w=\operatorname{arth}z$ определяются соответственно как $z=\operatorname{sh}w$, $z=\operatorname{ch}w$, $z=\operatorname{th}w$.

Отметим соотношения

$$\operatorname{arsh}a\pm\operatorname{arsh}b=\operatorname{arsh}\left(a\sqrt{b^2+1}\pm b\sqrt{a^2+1}\right)=\operatorname{arch}\left(\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}\pm ab\right),$$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{arch}a\pm\operatorname{arch}b=\operatorname{arch}\left(ab\pm\sqrt{a^2-1}\sqrt{b^2-1}\right)=\\&\qquad=\operatorname{arsh}\left(b\sqrt{a^2-1}\pm a\sqrt{b^2-1}\right),\\&\operatorname{arth}a\pm\operatorname{arth}b=\operatorname{arth}\frac{a\pm b}{1\pm ab}.\end{aligned}\right\}\tag{21.2-27}$$

[1]) В английской литературе применяются также символы $\operatorname{sh}^{-1}z$, $\operatorname{ch}^{-1}z$, $\operatorname{th}^{-1}z$ (см. сноску на стр. 724).

21.2-9. Соотношения между показательной, тригонометрическими и гиперболическими функциями (см. также пп. 1.2-3 и 21.2-12 и табл. 7.2-1).

$$\left.\begin{aligned} &e^{iz}=\cos z+i\sin z,\\ &\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}; \end{aligned}\right\} \tag{21.2-28}$$

$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z; \tag{21.2-29}$$

$$e^{z}=\operatorname{ch} z+\operatorname{sh} z, \qquad e^{-z}=\operatorname{ch} z-\operatorname{sh} z; \tag{21.2-30}$$

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}; \tag{21.2-31}$$

$$\left.\begin{aligned} &\cos z=\operatorname{ch} iz, && \operatorname{ch} z=\cos iz,\\ &\sin z=-i\operatorname{sh} iz, && \operatorname{sh} z=-i\sin iz,\\ &\operatorname{tg} z=-i\operatorname{th} iz, && \operatorname{th} z=-i\operatorname{tg} iz,\\ &\operatorname{ctg} z=i\operatorname{cth} iz, && \operatorname{cth} z=i\operatorname{ctg} iz; \end{aligned}\right\} \tag{21.2-32}$$

$$\left.\begin{aligned} &a^{ix}=e^{ix\ln a}=\cos(x\ln a)+i\sin(x\ln a),\\ &x^{i}=e^{i\ln x}=\cos(\ln x)+i\sin(\ln x),\\ &i^{x}=e^{x\ln i}=\cos\frac{\pi x}{2}+i\sin\frac{\pi x}{2}\ \text{(главное значение)},\\ &e^{2n\pi i}=1, \qquad e^{(2n+1)\pi i}=-1 \qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),\\ &i^{i}=e^{i\ln i}=e^{-\pi/2}\ \text{(главное значение)}. \end{aligned}\right\} \tag{21.2-33}$$

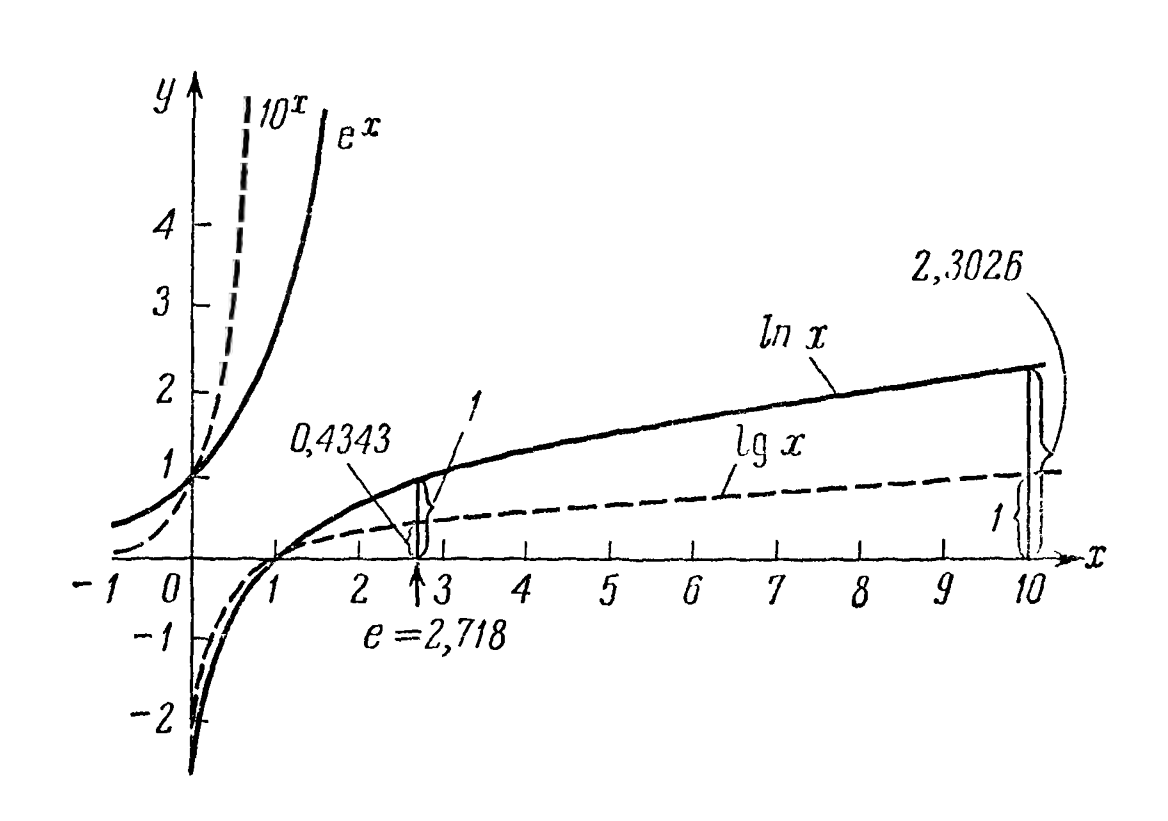


Рис. 21.2-6. Показательная и логарифмическая функции.

21.2-10. Определение логарифма (см. также пп. 1.2-3 и 21.2-12, табл. 7.2-1 и рис. 21.2-6).

$$\ln z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z; \tag{21.2-34}$$

$$\left.\begin{aligned} &\ln(ix)=\ln x+\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i,\\ &\ln(-x)=\ln x+(2n+1)\pi i \end{aligned}\right\} \quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ \ldots). \tag{21.2-35}$$

21.2-11. Соотношения между обратными тригонометрическими, обратными гиперболическими и логарифмической функциями.

$$\left.\begin{aligned} &\arccos z = i \operatorname{arch} z, && \operatorname{arch} z = i \arccos z,\\ &\arcsin z = -i \operatorname{arsh} iz, && \operatorname{arsh} z = -i \arcsin iz,\\ &\operatorname{arctg} z = -i \operatorname{arth} iz, && \operatorname{arth} z = -i \operatorname{arctg} iz,\\ &\operatorname{arcctg} z = i \operatorname{arcth} iz, && \operatorname{arcth} z = i \operatorname{arcctg} iz; \end{aligned}\right\} \tag{21.2-36}$$

$$\left.\begin{aligned} &\arccos z = -i \ln\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right), && \operatorname{arch} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),\\ &\arcsin z = -i \ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right), && \operatorname{arsh} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right),\\ &\operatorname{arctg} z = -\frac{i}{2} \ln\frac{1+iz}{1-iz}, && \operatorname{arth} z = \frac{1}{2} \ln\frac{1+z}{1-z},\\ &\operatorname{arcctg} z = -\frac{i}{2} \ln\frac{iz-1}{iz+1}, && \operatorname{arcth} z = \frac{1}{2} \ln\frac{z+1}{z-1}. \end{aligned}\right\} \tag{21.2-37}$$

21.2-12. Разложения в степенные ряды (см. также пп. 4.10-1—4.10-4).

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots \quad (|z| < 1; \text{ геометрическая прогрессия, п. 1.2-7}); \tag{21.2-38}$$

$$(1+z)^p = 1 + \binom{p}{1} z + \binom{p}{2} z^2 + \ldots \quad (|z| < 1; \text{ биномиальный ряд, см. также пп. 1.4-1 и 21.5-1}); \tag{21.2-39}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \qquad (|z| < \infty); \tag{21.2-40}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \ldots, \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \mp \ldots \qquad |z| < \infty; \tag{21.2-41}$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots, \qquad \operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \qquad |z| < \infty; \tag{21.2-42}$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \pm \ldots \qquad (|z| < 1), \tag{21.2-43}$$

$$\left.\begin{aligned} \arcsin z &= z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{z^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{z^7}{7} + \ldots,\\ \operatorname{arsh} z &= z - \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{z^5}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{z^7}{7} \pm \ldots, \end{aligned}\right\} \quad (|z| < 1); \tag{21.2-44}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{arctg} z &= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \mp \ldots,\\ \operatorname{arth} z &= \frac{1}{2} \ln\frac{1+z}{1-z} = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (|z| < 1). \tag{21.2-45}$$

В терминах чисел Бернулли (п. 21.5-2)

$$\operatorname{tg} z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right) B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1} = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \frac{17}{315} z^7 + \ldots \quad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right), \tag{21.2-46}$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \frac{2}{945} z^5 - \ldots \quad (|z| < \pi). \tag{21.2-47}$$

Из разложений (46) и (47) можно получить разложения для функций $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ с помощью формул (32).

21.2-13. Разложения в бесконечные произведения (см. также п. 7.6-6).

$$\sin z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{z}{k\pi}\right)^2\right],\quad \cos z=\prod_{k=0}^{\infty}\left\{1-\left[\frac{2z}{\pi(2k+1)}\right]^2\right\},\quad |z|<\infty. \qquad (21.2\text{-}48)$$

Аналогичные разложения для функций $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ могут быть получены с помощью формул (32).

21.2-14. Некоторые полезные неравенства.

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \qquad (0<x<\pi/2), \qquad (21.2\text{-}49)$$

$$\sin x > 2x/\pi \qquad (-\pi/2<x<\pi/2), \qquad (21.2\text{-}50)$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (-\pi<x<\pi); \qquad (21.2\text{-}51)$$

$$\left.\begin{aligned} &e^x > 1+x, \\ &e^x < \frac{1}{1-x} \qquad (x<1), \\ &e^{-\frac{x}{1-x}} < 1-x < e^{-x} \qquad (x<1); \end{aligned}\right\} \qquad (21.2\text{-}52)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \qquad (x>-1), \\ &x < -\ln(1-x) < \frac{x}{1-x} \qquad (x<1), \\ &|\ln(1-x)| < 3x/2 \qquad (0<x<0{,}5828). \end{aligned}\right\} \qquad (21.2\text{-}53)$$

Приведенные неравенства обращаются в равенства при $x=0$.

21.3. НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

21.3-1. Интегральные синус, косинус, логарифм и показательная функция. По определению

$$\operatorname{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}-\int_x^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}+\operatorname{si}(x)=x-\frac{1}{3!}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{5!}\frac{x^5}{5}\mp\ldots$$

(*интегральный синус*). (21.3-1)

Значения интегрального синуса приведены в табл. 21.3-1; см. также рис. 21.3-1.

$$\operatorname{Ci}(x)=-\int_x^{\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx=C+\ln x-\int_0^x\frac{1-\cos x}{x}\,dx=C+\ln x-\frac{1}{2!}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4!}\frac{x^4}{4}\mp\ldots$$

$(x>0)$ (*интегральный косинус*), (21.3-2)

где $C\approx 0{,}577216$ — постоянная Эйлера — Маскерони, определенная в п. 21.4-1.

Значения интегрального косинуса находятся при помощи табл. 21.3-2.

$$\operatorname{Ei}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^x}{x}\,dx \quad (x<0) \quad (\textit{интегральная показательная функция}), \qquad (21.3\text{-}3)$$

$$\operatorname{li}(x)=\int_0^x\frac{dx}{\ln x} \quad (x>0) \quad (\textit{интегральный логарифм}). \qquad (21.3\text{-}4)$$

*При $x>1$ функция $\operatorname{li}(x)$ определяется как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\ln x}+\int\limits_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dx}{\ln x}\right]$ (главное значение интеграла в смысле Коши).

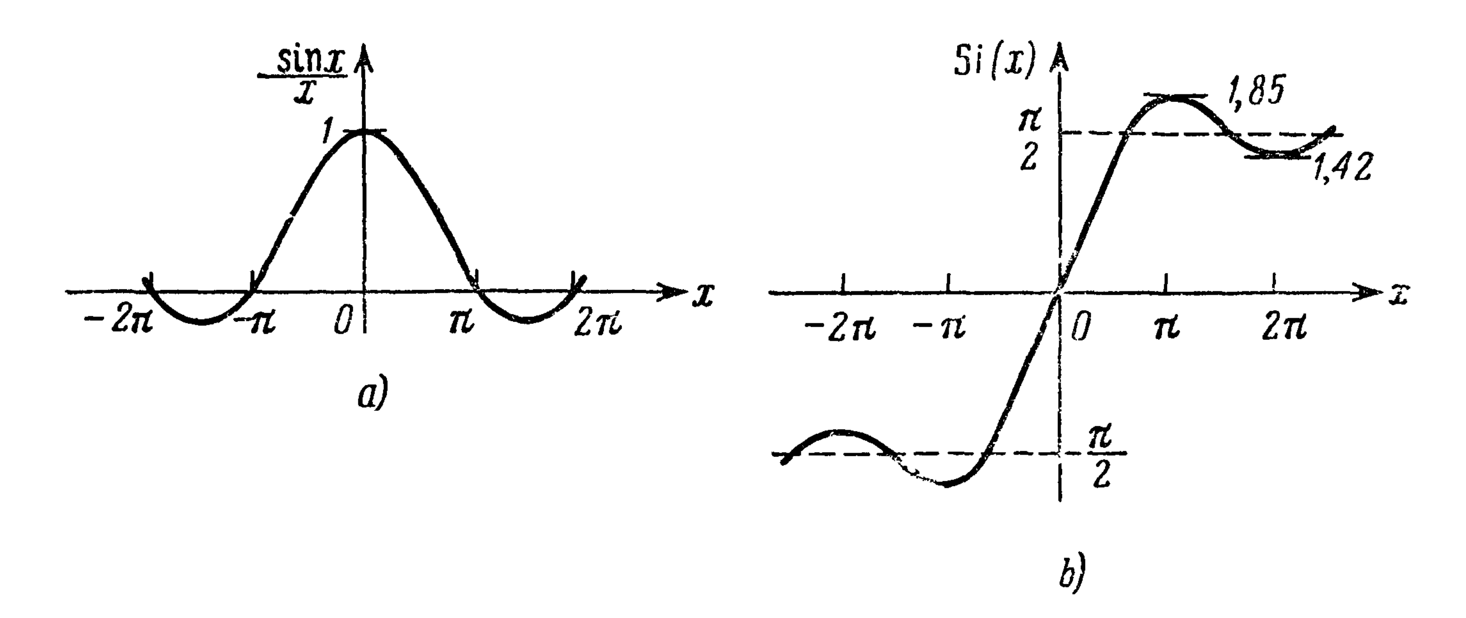


Рис. 21.3-1. Графики функций $\frac{\sin x}{x}$ и $\operatorname{Si}(x)$.

Функция $\operatorname{Ei}(x)$ представляется в виде ряда

$$\operatorname{Ei}(x)=C+\ln(-x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!\,k}\qquad (x<0),$$

с помощью которого она продолжается на всю комплексную плоскость z с разрезом вдоль положительной части действительной оси *):

$$\operatorname{Ei}(z)=C+\ln(-z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!\,k}\qquad (|\arg(-z)|<\pi).$$

Если $z=x>0$, то $\operatorname{Re}\operatorname{Ei}(x)=\overline{\operatorname{Ei}}(x)=C+\ln x+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!\,k}$ называется **модифицированной интегральной показательной функцией.** При приближении точки $z=x+iy$ к разрезу $(x>0)$ имеют место соотношения

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ (y>0)}}\operatorname{Ei}(x\pm iy)=\overline{\operatorname{Ei}}(x)\mp\pi i. *$$

Отметим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{Ei}(x)=\operatorname{li}(e^x)\qquad (x<0),\\ &\operatorname{Ei}(\ln x)=\operatorname{li}(x)\qquad (x<1),\\ &\operatorname{Ei}(\pm ix)=\operatorname{Ci}(x)\pm i\operatorname{Si}(x)\mp\frac{\pi i}{2}\qquad (x>0).\end{aligned}\right\}\qquad (21.3\text{-}5)$$

Значения интегральной показательной функции и родственных с ней функций приведены в табл. 21.3-3.

*) Все введенные функции можно рассматривать как функции комплексного переменного z (см., например, [21.1]).

Таблица 21.3-1

Интегральный синус Si(x)

$$\mathrm{Si}\,(x)=\int_0^x \frac{\sin u}{u}\,du$$

x	Si (x)	x	Si (x)	x	Si (x)	x	Si (x)	x	Si (x)	x	Si (x)
0,0	0,00000	5,0	1,54993	10,0	1,65835	15,0	1,61819	20,0	1,54824	25,0	1,53148
0,1	09994	5,1	53125	10,1	65253	15,1	62226	20,1	55289	50,0	55162
0,2	19956	5,2	51367	10,2	64600	15,2	62575	20,2	55767		
0,3	29850	5,3	49732	10,3	63883	15,3	62865	20,3	56253		
0,4	39646	5,4	48230	10,4	63112	15,4	63093	20,4	56743		
0,5	49311	5,5	46872	10,5	62294	15,5	63258	20,5	57232		
0,6	58813	5,6	45667	10,6	61439	15,6	63359	20,6	57714		
0,7	68122	5,7	44620	10,7	60556	15,7	63396	20,7	58186		
0,8	77210	5,8	43736	10,8	59654	15,8	63370	20,8	58641		
0,9	86047	5,9	43018	10,9	58743	15,9	63280	20,9	59077		
1,0	94608	6,0	42469	11,0	57831	16,0	63130	21,0	59489		
1,1	1,02869	6,1	42087	11,1	56927	16,1	62921	21,1	59873		
1,2	10805	6,2	41871	11,2	56042	16,2	62657	21,2	60225		
1,3	18396	6,3	41817	11,3	55182	16,3	62339	21,3	60543		
1,4	25623	6,4	41922	11,4	54356	16,4	61973	21,4	60823		
1,5	32468	6,5	42179	11,5	53571	16,5	61563	21,5	61063		
1,6	38918	6,6	42582	11,6	52835	16,6	61112	21,6	61261		
1,7	44959	6,7	43121	11,7	52155	16,7	60627	21,7	61415		
1,8	50582	6,8	43787	11,8	51535	16,8	60111	21,8	61525		
1,9	55778	6,9	44570	11,9	50981	16,9	59572	21,9	61590		
2,0	60541	7,0	45460	12,0	50497	17,0	59014	22,0	61608		
2,1	64870	7,1	46443	12,1	50088	17,1	58443	22,1	61582		
2,2	68763	7,2	47509	12,2	49755	17,2	57865	22,2	61510		
2.3	72221	7,3	48644	12,3	49501	17,3	57285	22,3	61395		
2,4	75249	7,4	49834	12,4	49327	17,4	56711	22,4	61238		
2,5	77852	7,5	51068	12,5	49234	17,5	56146	22,5	61041		
2,6	80039	7,6	52331	12,6	49221	17,6	55598	22,6	60806		
2,7	81821	7,7	53611	12,7	49287	17,7	55070	22,7	60536		
2,8	83210	7,8	54894	12,8	49430	17,8	54568	22,8	60234		
2,9	84219	7,9	56167	12,9	49647	17,9	54097	22,9	59902		
3,0	84865	8,0	57419	13,0	49936	18,0	53661	23,0	59546		
3,1	85166	8,1	58637	13,1	50292	18,1	53264	23,1	59168		
3,2	85140	8,2	59810	13,2	50711	18,2	52909	23,2	58772		
3,3	84808	8,3	60928	13,3	51188	18,3	52600	23,3	58363		
3,4	84191	8,4	61981	13,4	51716	18,4	52339	23,4	57945		
3,5	83313	8,5	62960	13,5	52291	18,5	52128	23,5	57521		
3,6	82195	8,6	63857	13,6	52905	18,6	51969	23,6	57097		
3,7	80862	8,7	64665	13,7	53352	18,7	51863	23,7	56676		
3,8	79333	8,8	65379	13,8	54225	18,8	51810	23,8	56262		
3,9	77650	8,9	65993	13,9	54917	18,9	51810	23,9	55860		
4,0	75820	9,0	66504	14,0	55621	19,0	51863	24,0	55474		
4,1	73874	9,1	66908	14,1	56330	19,1	51967	24,1	55107		
4,2	71837	9,2	67205	14,2	57036	19,2	52122	24,2	54762		
4,3	69732	9,3	67393	14,3	57733	19,3	52324	24,3	54444		
4,4	67583	9,4	67473	14,4	58414	19,4	52572	24,4	54154		
4,5	65414	9,5	67446	14,5	59072	19,5	52863	24,5	53897		
4,6	63246	9,6	67316	14,6	59702	19,6	53192	24,6	53672		
4,7	61101	9,7	67084	14,7	60296	19,7	53357	24,7	53484		
4,8	58998	9,8	66757	14,8	60851	19,8	53954	24,8	53333		
4,9	56956	9,9	66338	14,9	61360	19,9	54378	24,9	53221		

Таблица 21.3-2

$S_1(x)$ и интегральный косинус Ci (x)

$$S_1(x) = \ln x + C - \mathrm{Ci}(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos u}{u}\, du,$$

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos u}{u}\, du = \ln x + C - S_1(x)$$

($C \approx 0{,}5772$ — постоянная Эйлера — Маскерони)

x	$S_1(x)$	x	$S_1(x)$	x	$S_1(x)$	x	$S_1(x)$	x	$S_1(x)$	x	$S_1(x)$
0,0	0,00000	5,0	2,37669	10,0	2,92527	15,0	3,23899	20,0	3,52853	25,0	3,80295
0,1	00249	5,1	38994	10,1	94327	15,1	25090	20,1	53173	50,0	4,49486
0,2	00998	5,2	40113	10,2	96050	15,2	26308	20,2	53535		
0,3	02241	5,3	41044	10,3	97688	15,3	27552	20,3	53946		
0,4	03973	5,4	41801	10,4	99234	15,4	28814	20,4	54402		
0,5	06185	5,5	42402	10,5	3,00688	15,5	30087	20,5	54905		
0,6	08866	5,6	42866	10,6	02045	15,6	31363	20,6	55456		
0,7	12002	5,7	43210	10,7	03300	15,7	32641	20,7	56049		
0,8	15579	5,8	43452	10,8	04457	15,8	33911	20,8	56687		
0,9	19578	5,9	43610	10,9	05514	15,9	35167	20,9	57368		
1,0	23981	6,0	43704	11,0	06467	16,0	36401	21,0	58085		
1,1	28766	6,1	43749	11,1	07323	16,1	37612	21,1	58840		
1,2	33908	6,2	43764	11,2	08083	16,2	38790	21,2	59629		
1,3	39384	6,3	43766	11,3	08749	16,3	39932	21,3	60446		
1,4	45168	6,4	43770	11,4	09322	16,4	41032	21,4	61288		
1,5	51233	6,5	43792	11,5	09814	16,5	42088	21,5	62155		
1,6	57549	6,6	43847	11,6	10225	16,6	43096	21,6	63037		
1,7	64088	6,7	43947	11,7	10561	16,7	44050	21,7	63935		
1,8	70820	6,8	44106	11,8	10828	16,8	44947	21,8	64842		
1,9	77713	6,9	44335	11,9	11038	16,9	45788	21,9	65751		
2,0	84739	7,0	44643	12,0	11190	17,0	46568	22,0	66662		
2,1	91865	7,1	45040	12,1	11301	17,1	47288	22,1	67568		
2,2	99060	7,2	45534	12,2	11370	17,2	47945	22,2	68465		
2,3	1,06295	7,3	46130	12,3	11412	17,3	48543	22,3	69348		
2,4	13540	7,4	46834	12,4	11429	17,4	49077	22,4	70216		
2,5	20764	7,5	47649	12,5	11436	17,5	49553	22,5	71059		
2,6	27939	7,6	48577	12,6	11437	17,6	49969	22,6	71879		
2,7	35038	7,7	49619	12,7	11438	17,7	50330	22,7	72670		
2,8	42035	7,8	50775	12,8	11453	17,8	50639	22,8	73427		
2,9	48903	7,9	52044	12,9	11484	17,9	50895	22,9	74153		
3,0	55620	8,0	53423	13,0	11540	18,0	51107	23,0	74838		
3,1	62163	8,1	54906	13,1	11628	18,1	51276	23,1	75483		
3,2	68511	8,2	56491	13,2	11754	18,2	51404	23,2	76089		
3,3	74646	8,3	56171	13,3	11924	18,3	51500	23,3	76651		
3,4	80552	8,4	59938	13,4	12142	18,4	51568	23,4	77170		
3,5	86211	8,5	61786	13,5	12414	18,5	51610	23,5	77644		
3,6	91613	8,6	63704	13,6	12745	18,6	51633	23,6	78072		
3,7	96745	8,7	65686	13,7	13134	18,7	51645	23,7	78459		
3,8	2,01600	8,8	67721	13,8	13587	18,8	51648	23,8	78801		
3,9	06170	8,9	69799	13,9	14104	18,9	51648	23,9	79101		
4,0	10449	9,0	71909	14,0	14688	19,0	51660	24,0	79360		
4,1	14438	9,1	74042	14,1	15338	19,1	51661	24,1	79582		
4,2	18131	9,2	76186	14,2	16054	19,2	51685	24,2	79767		
4,3	21535	9,3	78332	14,3	16835	19,3	51727	24,3	79917		
4,4	24648	9,4	80468	14,4	17677	19,4	51790	24,4	80036		
4,5	27479	9,5	82583	14,5	18583	19,5	51879	24,5	80129		
4,6	30033	9,6	84669	14,6	19545	19,6	52002	24,6	80197		
4,7	32317	9,7	86713	14,7	20564	19,7	52156	24,7	80243		
4,8	34344	9,8	88712	14,8	21630	19,8	52348	24,8	80271		
4,9	36124	9,9	90651	14,9	22746	19,9	52578	24,9	80288		

Таблица 21.3-3

Интегральная показательная функция

Интегральные показательные функции обычно применяются в комбинации:

1) интегральных показательных функций $\mathrm{Ei}\,(x)$ и $\overline{\mathrm{Ei}\,(x)}$ или
2) $E_0\,(x)$, $E_1\,(x) \equiv -\,\mathrm{Ei}\,(-x)$ и $E_2\,(x)$, где

$$E_n\,(x) = \int_1^\infty e^{-xu}u^{-n}du.$$

Во всех случаях $x > 0$.

Малые значения аргумента. Для вычисления значений $\mathrm{Ei}\,(-x)$ и $\overline{\mathrm{Ei}\,(x)}$ при малых значениях x можно пользоваться разложениями в ряд, приведенными в соответствующей таблице.

Большие значения аргумента для $\mathrm{Ei}\,(-x)$ и $\overline{\mathrm{Ei}\,(x)}$: a) для $5 < x < 16$ значения даны в таблицах; b) для $5 < x < 40$, $E_1\,(x) = -\,\mathrm{Ei}\,(-x) = F_1 \dfrac{e^{-x}}{x}$ и $\overline{\mathrm{Ei}\,(x)} = F_2 \dfrac{e^x}{x}$, где F_1 и F_2 имеют значения:

x	5	10	15	20	25	30	35	40
F_1	0,8516	0,9156	0,9408	0,9549	0,9627	0,9687	0,9729	0,9753
F_2	1,354	1,1316	1,0781	1,0560	1,0440	1,0358	1,0305	1,0264

c) для больших значений x величины F_1 и F_2 могут быть вычислены с помощью асимптотических рядов

$$F_1 = 1 - \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \ldots; \quad F_2 = 1 + \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} + \frac{3!}{x^3} + \ldots$$

$$E_0(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	∞	99,00	49,01	32,35	24,02	19,02	15,70	13,32	11,54	10,15
1	9,048	8,144	7,391	6,755	6,210	5,738	5,326	4,963	4,640	4,352
2	4,094	3,860	3,648	3,454	3,278	3,115	2,966	2,827	2,699	2,580
3	2,469	2,366	2,269	2,179	2,093	2,013	1,938	1,867	1,800	1,736
4	1,676	1,619	1,564	1,513	1,464	1,417	1,372	1,330	1,289	1,250
5	1,213	1,177	1,143	1,111	1,079	1,049	1,020	*9921	*9653	*9395
6	0,9147	8907	8677	8454	8239	8031	7831	7637	7450	7269
7	7094	6925	6760	6601	6447	6298	6154	6013	5877	5745
8	5617	5492	5371	5254	5139	5028	4920	4816	4713	4614
9	4517	4423	4332	4243	4156	4071	3988	3908	3830	3753
1,0	3679	3606	3535	3466	3399	3333	3268	3206	3144	3085
1	3026	2969	2913	2859	2805	2753	2702	2653	2604	2556
2	2510	2464	2420	2376	2334	2292	2251	2211	2172	2134
3	2096	2060	2024	1989	1954	1920	1887	1855	1823	1792
4	1761	1732	1722	1673	1645	1618	1591	1564	1538	1513
5	1488	1463	1439	1415	1392	1369	1347	1325	1304	1283
6	1262	1242	1222	1202	1183	1164	1145	1127	1109	1092
7	1075	1058	1041	1025	1009	*9930	*9775	*9623	*9474	*9327
8	0,09183	9042	8903	8766	8631	8500	8370	8242	8116	7993
9	7872	7753	7636	7521	7407	7296	7187	7079	6973	6869
2	$10^{-1}\times 0{,}6767$	5831	5037	4359	3780	3283	2857	2489	2172	1897
3	$10^{-2}\times 1{,}660$	1,453	1,274	1,118	0,9816	8628	7590	6682	5887	5190
4	$10^{-2}\times 0{,}4579$	4042	3570	3155	2790	2469	2185	1935	1714	1520
5	$10^{-3}\times 1{,}348$	1,195	1,061	0,9418	8364	7431	6603	5870	5220	4643
6	$10^{-3}\times 0{,}4131$	3677	3273	2915	2596	2313	2061	1837	1638	1461
7	$10^{-4}\times 1{,}303$	1,1621	1,037	0,9254	8260	7375	6585	5881	5253	4693
8	$10^{-4}\times 0{,}4193$	3747	3349	2994	2677	2394	2141	1915	1713	1533
9	$10^{-5}\times 1{,}371$	1,227	1,098	0,9831	8800	7879	7055	6318	5658	5068

Таблица 21.3-3 (*продолжение*)

$$E_1(x) = -\operatorname{Ei}(-x) = -\left[C + \ln x - \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dots\right],$$

где $C = 0{,}5772$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	∞	4,038	3,355	2,959	2,681	2,468	2,295	2,151	2,027	1,919
1	1,823	1,737	1,660	1,589	1,524	1,464	1,409	1,358	1,310	1,265
2	1,223	1,183	1,145	1,110	1,076	1,044	1,014	0,9849	9573	9309
3	0,9057	8815	8583	8361	8147	7942	7745	7554	7371	7194
4	7024	6859	6700	6546	6397	6253	6114	5979	5848	5721
5	5598	5478	5362	5250	5140	5034	4930	4830	4732	4636
6	4544	4454	4366	4280	4197	4115	4036	3959	3883	3810
7	3738	3668	3599	3532	3467	3403	3341	3280	3221	3163
8	3106	3050	2996	2943	2891	2840	2790	2742	2694	2647
9	2602	2557	2513	2470	2429	2387	2347	2308	2269	2231
1,0	2194	2157	2122	2087	2052	2019	1986	1953	1922	1890
1	1860	1830	1801	1772	1743	1716	1688	1662	1635	1609
2	1584	1559	1535	1511	1487	1464	1441	1419	1397	1376
3	1355	1334	1313	1293	1274	1254	1235	1216	1198	1180
4	1162	1145	1128	1111	1094	1078	1062	1046	1030	1015
5	1000	*9854	*9709	*9567	*9426	*9288	*5152	*9019	*8887	*8758
6	0,08631	8506	8383	8261	8142	8025	7909	7796	7684	7574
7	7465	7359	7254	7151	7049	6949	6850	6753	6658	6564
8	6471	6380	6290	6202	6115	6029	5945	5862	5760	5700
9	5620	5542	5465	5390	5315	5241	5169	5098	5027	4958
2,0	4890	4823	4757	4692	4627	4564	4502	4440	4380	4320
1	4261	4204	4147	4090	4035	3980	3927	3874	3821	3770
2	3719	3669	3620	3571	3523	3476	3430	3384	3339	3294
3	3250	3207	3164	3122	3081	3040	3000	2960	2921	2882
4	2844	2806	2769	2733	2697	2662	2627	2592	2558	2525
5	2491	2459	2427	2395	2364	2333	2303	2273	2243	2214
6	2185	2157	2129	2101	2074	2047	2021	1994	1969	1943
7	1918	1893	1869	1845	1821	1798	1775	1752	1730	1707
8	1686	1664	1643	1622	1601	1581	1560	1540	1521	1502
9	1482	1464	1445	1427	1409	1391	1373	1356	1338	1322
3,0	1305	1288	1272	1256	1240	1225	1209	1194	1179	1164
1	1149	1135	1121	1107	1093	1079	1066	1052	1039	1026
2	1013	1001	*9882	*9758	*9637	*9517	*9398	*9281	*9166	9052
3	0,008939	8828	8718	8610	8503	8398	8294	8191	8090	7990
4	7891	7793	7697	7602	7508	7416	7324	7234	7145	7057
5	6970	6884	6800	6716	6634	6552	6472	6393	6314	6237
6	6160	6085	6011	5937	5864	5793	5722	5652	5583	5515
7	5448	5381	5316	5251	5187	5124	5062	5000	4939	4879
8	4820	4762	4704	4647	4591	4535	4480	4426	4372	4319
9	4267	4216	4165	4114	4065	4016	3967	3919	3872	3825
4,0	3779	3734	3689	3645	3601	3557	3515	3472	3431	3390
1	3349	3309	3269	3230	3191	3153	3115	3078	3041	3005
2	2969	2933	2898	2864	2879	2796	2762	2729	2697	2665
3	2633	2602	2571	2540	2510	2480	2450	2421	2393	2364
4	2336	2308	2281	2254	2227	2201	2175	2149	2123	2098
5	2073	2049	2025	2001	1977	1954	1931	1908	1885	1863
6	1841	1819	1798	1777	1756	1735	1715	1694	1674	1655
7	1635	1616	1597	1578	1560	1541	1523	1505	1488	1470
8	1453	1436	1419	1402	1386	1370	1354	1338	1322	1307
9	1291	1276	1261	1247	1232	1218	1204	1189	1176	1162
5,0	1148	1135	1122	1109	1096	1083	1070	1058	1045	1033

Таблица 21.3-3 (*продолжение*)

$$\overline{\mathrm{Ei}\,(x)} = C + \ln x + \frac{x}{1\cdot 1!} + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	—∞	4,018	3,315	2,899	2,601	2,368	2,175	2,011	1,867	1,739
1	—1,623	1,517	1,419	1,329	1,244	1,164	1,089	1,017	0,9491	0,8841
2	—0,8218	7619	7042	6485	5947	5425	4919	4427	3949	3482
3	—0,3027	2582	2147	1721	1304	0894	0493	0098	*0290	*0672
4	+0,1048	1418	1783	2143	2498	2849	3195	3537	3876	4211
5	0,4542	4870	5195	5517	5836	6153	6467	6778	7087	7394
6	0,7699	8002	8302	8601	8898	9194	9488	9780	1,007	1,036
7	1,065	1,094	1,122	1,151	1,179	1,207	1,236	1,264	1,292	1,320
8	1,347	1,375	1,403	1,431	1,458	1,486	1,513	1,541	1,568	1,595
9	1,623	1,650	1,677	1,705	1,732	1,759	1,786	1,814	1,841	1,868
1,0	1,895	1,922	1,949	1,977	2,004	2,031	2,058	2,086	2,113	2,140
1	2,167	2,195	2,222	2,249	2,277	2,304	2,332	2,359	2,387	2,414
2	2,442	2,470	2,498	2,525	2,553	2,581	2,609	2,637	2,665	2,693
3	2,721	2,750	2,778	2,806	2,835	2,863	2,892	2,921	2,949	2,978
4	3,007	3,036	3,065	3,094	3,124	3,153	3,183	3,212	3,242	3,271
5	3,301	3,331	3,361	3,391	3,422	3,452	3,482	3,513	3,544	3,574
6	3,605	3,636	3,667	3,699	3,730	3,762	3,793	3,825	3,857	3,889
7	3,921	3,953	3,986	4,018	4,051	4,084	4,117	4,150	4,183	4,216
8	4,250	4,284	4,317	4,351	4,386	4,420	4,454	4,489	4,524	4,559
9	4,594	4,629	4,664	4,700	4,736	4,772	4,808	4,844	4,881	4,917
2,0	4,954	4,991	5,028	5,066	5,104	5,141	5,179	5,217	5,256	5,294
1	5,333	5,372	5,411	5,451	5,490	5,530	5,570	5,611	5,651	5,692
2	5,733	5,774	5,815	5,857	5,899	5,941	5,983	6,025	6,068	6,111
3	6,154	6,198	6,242	6,286	6,330	6,374	6,419	6,464	6,509	6,555
4	6,601	6,647	6,693	6,740	6,787	6,834	6,881	6,929	6,977	7,025
5	7,074	7,123	7,172	7,221	7,271	7,321	7,372	7,422	7,473	7,524
6	7,576	7,628	7,680	7,733	7,786	7,839	7,893	7,947	8,001	8,055
7	8,110	8,166	8,221	8,277	8,334	8,390	8,447	8,505	8,563	8,621
8	8,679	8,738	8,798	8,857	8,917	8,978	9,039	9,100	9,162	9,224
9	9,286	9,349	9,412	9,476	9,540	9,605	9,670	9,735	9,801	9,867
3,0	9,934	10,00	10,07	10,14	10,21	10,27	10,34	10,41	10,48	10,55
1	10,63	10,70	10,77	10,84	10,92	10,99	11,06	11,14	11,22	11,29
2	11,37	11,44	11,52	11,60	11,68	11,76	11,84	11,92	12,00	12,08
3	12,16	12,24	12,33	12,41	12,49	12,58	12,66	12,75	12,84	12,92
4	13,01	13,10	13,19	13,28	13,37	13,46	13,55	13,64	13,74	13,83
5	13,93	14,02	14,12	14,21	14,31	14,41	14,51	14,60	14,70	14,80
6	14,91	15,01	15,11	15,21	15,32	15,42	15,53	15,64	15,74	15,85
7	15,96	16,07	16,18	16,29	16,40	16,52	16,63	16,75	16,86	16,98
8	17,09	17,21	17,33	17,45	17,57	17,69	17,82	17,94	18,06	18,19
9	18,32	18,44	18,57	18,70	18,83	18,96	19,09	19,23	19,36	19,49
4,0	19,63	19,77	19,91	20,05	20,19	20,33	20,47	20,61	20,76	20,90
1	21,05	21,20	21,35	21,50	21,65	21,80	21,95	22,11	22,26	22,42
2	22,58	22,74	22,90	23,06	23,22	23,39	23,55	23,72	23,89	24,06
3	24,23	24,40	24,57	24,75	24,92	25,10	25,28	25,46	25,64	25,82
4	26,01	26,19	26,38	26,57	26,76	26,95	27,15	27,34	27,54	27,73
5	27,93	28,13	28,34	28,54	28,75	28,95	29,16	29,37	29,58	29,80
6	30,01	30,23	30,45	30,67	30,89	31,12	31,34	31,57	31,80	32,03
7	32,26	32,50	32,74	32,97	33,21	33,46	33,70	33,95	34,20	34,45
8	34,70	34,95	35,21	35,47	35,73	35,99	36,25	36,52	36,79	37,06
9	37,33	37,61	37,88	38,16	38,45	38,73	39,02	39,31	39,60	39,89
5,0	40,19	40,48	40,78	41,09	41,39	41,70	42,01	42,32	42,64	42.96

Таблица 21.3-3 (*продолжение*)

$$E_1(x) = -\,\mathrm{Ei}\,(-x),\ 5 < x < 16$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	$10^{-3}\times1,148$	1,021	9086	8086	7198	6409	5708	5085	4532	4039
6	$10^{-3}\times0,3601$	3211	2864	2555	2279	2034	1816	1621	1448	1293
7	$10^{-4}\times1,155$	1,032	9219	8239	7364	6583	5886	5263	4707	4210
8	$10^{-4}\times0,3767$	3370	3015	2699	2415	2162	1936	1733	1552	1390
9	$10^{-5}\times1,245$	1,115	9988	8948	8018	7185	6439	5771	5173	4637
10	$10^{-5}\times0,4157$	3727	3342	2997	2687	2410	2162	1939	1740	1561
11	$10^{-6}\times1,400$	1,256	1,127	1,012	0,9080	8149	7315	6566	5894	5291
12	$10^{-6}\times0,4751$	4266	3830	3440	3089	2774	2491	2238	2010	1805
13	$10^{-7}\times1,622$	1,457	1,309	1,176	1,057	0,9495	8532	7667	6890	6193
14	$10^{-7}\times0,5566$	5002	4500	4042	3633	3266	2936	2640	2373	2134

$$\overline{\mathrm{Ei}}\,(x),\ 5 < x < 16$$

5	$10^{2}\times0,4019$	4328	4662	5026	5419	5847	6310	6813	7360	7954
6	$10^{2}\times0,8599$	9300	1,006	1,089	1,179	1,277	1,384	1,501	1,627	1,765
7	$10^{3}\times0,1915$	2079	2257	2451	2663	2894	3146	3420	3720	4047
8	$10^{3}\times0,4404$	4793	5218	5682	6189	6743	7347	8007	8729	9517
9	$10^{4}\times0,1038$	1132	1235	1347	1471	1605	1752	1913	2089	2282
10	$10^{4}\times0,2492$	2723	2975	3251	3553	3884	4246	4642	5076	5551
11	$10^{4}\times0,6071$	6641	7265	7949	8698	9518	1,042	1,140	1,248	1,366
12	$10^{5}\times0,1496$	1638	1794	1964	2151	2357	2581	2828	3098	3395
13	$10^{5}\times0,3720$	4076	4467	4896	5367	5883	6449	7070	7751	8499
14	$10^{5}\times0,9319$	1,022	1,121	1,229	1,348	1,479	1,622	1,779	1,952	2,142

$$E_2(x) = \int_1^{\infty} e^{-xu}u^{-2}du = e^{-x} - xE_1(x) = x[E_0(x) - E_1(x)]$$

0,0	1,000	0,9497	9131	8817	8535	8278	8040	7818	7610	7412
1	0,7225	7048	6878	6715	6560	6410	6267	6128	5995	5866
2	5742	5622	5505	5393	5283	5177	5074	4974	4877	4783
3	4691	4602	4515	4430	4348	4267	4189	4112	4038	3963
4	3894	3824	3556	3690	3626	3562	3500	3440	3381	3325
5	3266	3211	3157	3104	3052	3001	2951	2902	2855	2808
6	2762	2717	2673	2630	2587	2546	2505	2465	2426	2387
7	2349	2312	2276	2240	2205	2171	2137	2104	2072	2040
8	2009	1978	1948	1918	1889	1860	1832	1804	1777	1750
9	1724	1698	1673	1648	1623	1599	1576	1552	1530	1507
1,0	1485	1463	1442	1421	1400	1380	1360	1340	1321	1302
1	1283	1264	1246	1228	1211	1193	1176	1160	1143	1127
2	1111	1095	1080	1065	1050	1035	1020	1006	*9920	*9781
3	0,09645	9510	9378	9247	9119	8993	8868	8746	8625	8506
4	8389	8274	8160	8048	7938	7829	7722	7617	7513	7411
5	7310	7211	7113	7017	6922	6828	6736	6645	6555	6467
6	6380	6295	6210	6127	6045	5964	5884	5806	5729	5652
7	5577	5503	5430	5358	5287	5217	5148	5080	5013	4947
8	4882	4817	4754	4691	4630	4569	4509	4450	4392	4335
9	4278	4222	4167	4113	4059	4007	3955	3903	3852	3803
2	$10^{-1}\times0,3753$	3297	2898	2550	2246	1980	1746	1541	1362	1203
3	$10^{-2}\times1,064$	0,9417	8337	7384	6544	5802	5146	4567	4054	3600
4	$10^{-2}\times0,3198$	2842	2527	2247	1999	1779	1583	1410	1255	1118
5	$10^{-3}\times0,9965$	8881	7917	7060	6296	5617	5012	4473	3992	3564
6	$10^{-3}\times0,3183$	2842	2539	2268	2027	1812	1619	1448	1294	1157
7	$10^{-4}\times1,035$	0,9259	8283	7411	6632	5935	5313	4756	4258	3812
8	$10^{-4}\times0,3414$	3057	2738	2453	2198	1969	1764	1581	1417	1270
9	$10^{-5}\times1,138$	1,021	0,9149	8203	7356	6597	5916	5306	4760	4270

21.3-2. Интегралы Френеля и интеграл вероятностей (см. также п. 18.8-3). По определению

$$\left.\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x \cos\frac{\pi}{2}x^2\,dx = J_{1/2}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + J_{5/2}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + J_{9/2}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + \ldots, \\ S(x) &= \int_0^x \sin\frac{\pi}{2}x^2\,dx = J_{3/2}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + J_{7/2}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + J_{11/2}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (21.3\text{-}6)$$

(*интегралы Френеля*)

где $J_{n/2}(z)$ — функции Бесселя, порядок которых равен половине нечетного

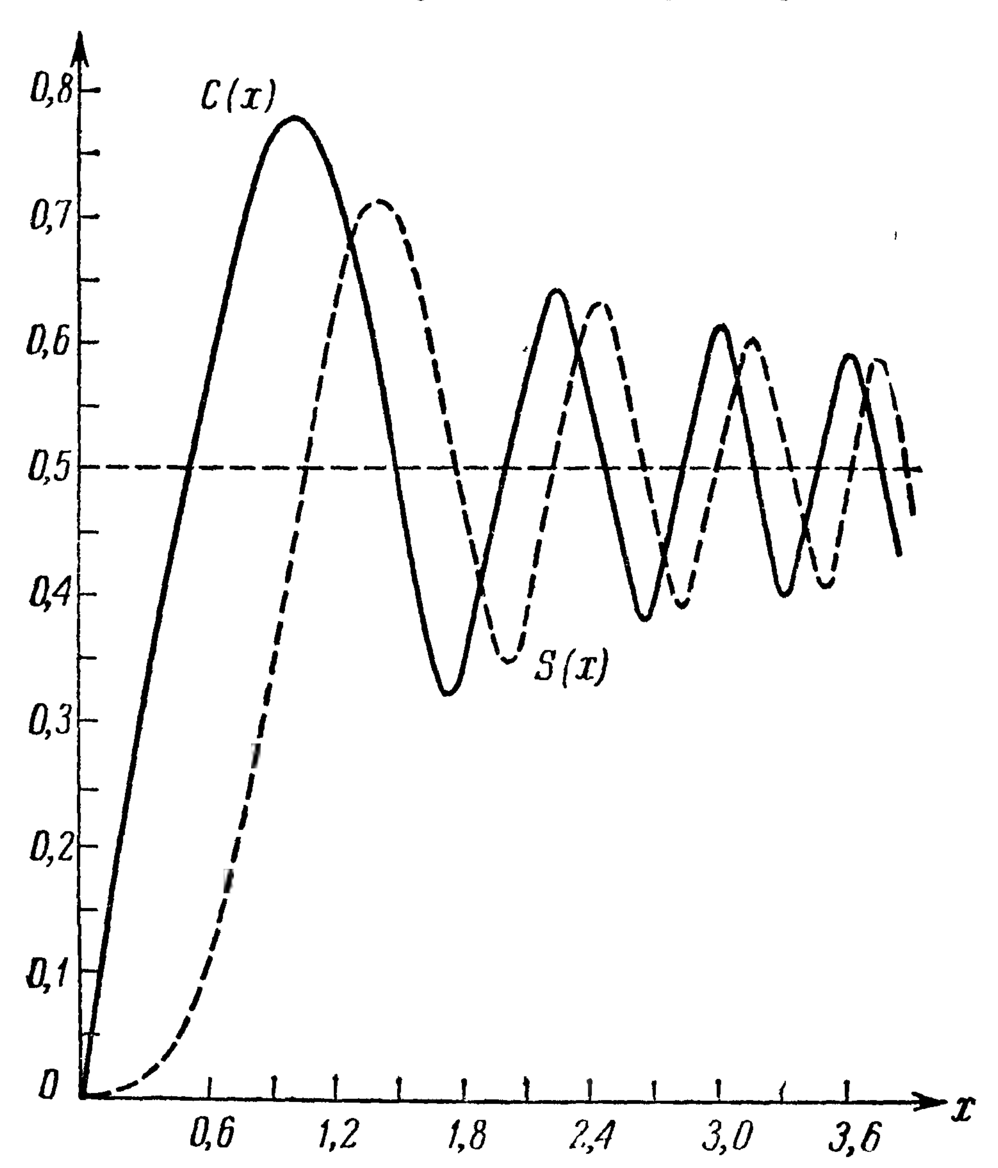


Рис. 21.3-2. Интегралы Френеля.

числа (см. п. 21.8-1, е). Графики функций $C(x)$ и $S(x)$ изображены на рис. 21.3-2. Отметим, что $C(\infty) = S(\infty) = 1/2$.

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7} \pm \ldots\right) \qquad (21.3\text{-}7)$$

(*функция ошибок*);

(см. также п. 18.8-3 и табл. 18.8-10).

Заметим, что $\operatorname{erf}(\infty) = 1$.

Отметим формулы:

$$C(x) - i\,S(x) = \frac{1}{1+i}\operatorname{erf}\left(\frac{1+i}{2}x\sqrt{\pi}\right); \qquad (21.3\text{-}8)$$

$$\left.\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi x}\sin\frac{\pi}{2}x^2 + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \\ S(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi x}\cos\frac{\pi}{2}x^2 + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}\right\} \text{ при } x \to \infty. \qquad (21.3\text{-}9)$$

Некоторые интегралы:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^x C(x)\,dx &= x\,C(x) - \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x^2,\\ \int_0^x S(x)\,dx &= x\,S(x) + \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x^2 - \frac{1}{\pi},\\ \int_0^x \operatorname{erf} x\,dx &= x\operatorname{erf} x + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(e^{-x^2} - 1\right).\end{aligned}\right\} \qquad (21.3\text{-}10)$$

Интегралы

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^x \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx &= \frac{x}{3} - \frac{1}{7}\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{11}\frac{x^5}{5!} \mp \ldots,\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^x \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx &= 1 - \frac{1}{5}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{9}\frac{x^4}{4!} - \frac{1}{13}\frac{x^6}{6!} \mp \ldots\end{aligned}\right\} \qquad (21.3\text{-}11)$$

также иногда называются интегралами Френеля.

Функция

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-x^2}\,dx \qquad (21.3\text{-}12)$$

называется **дополнительным интегралом вероятностей.**

21.4. ГАММА-ФУНКЦИЯ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ФУНКЦИИ

21.4-1. Гамма-функция.

(а) Интегральные представления. **Гамма-функция** $\Gamma(z)$ обычно определяется как

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt \quad (\operatorname{Re} z > 0) \qquad (21.4\text{-}1)$$

(интеграл Эйлера второго рода)

или для $\operatorname{Re} z < 0$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^t t^{-z}\,dt \qquad (21.4\text{-}2)$$

(интегральное представление Ганкеля),

где контур C идет из $-\infty$ по отрицательной части действительной оси, обходит начало координат в положительном направлении (против часовой стрелки) и опять по отрицательной части оси x возвращается к исходной точке. Это определение может быть расширено при помощи аналитического продолжения (п. 7.8-1). Единственными особенностями $\Gamma(z)$ в конечной части плоскости

являются простые полюсы с вычетами $\frac{(-1)^n}{n!}$ при

$$z=-n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

$\frac{1}{\Gamma(z)}$ есть целая функция. Рис. 21.4-1 представляет график $\Gamma(x)$ для

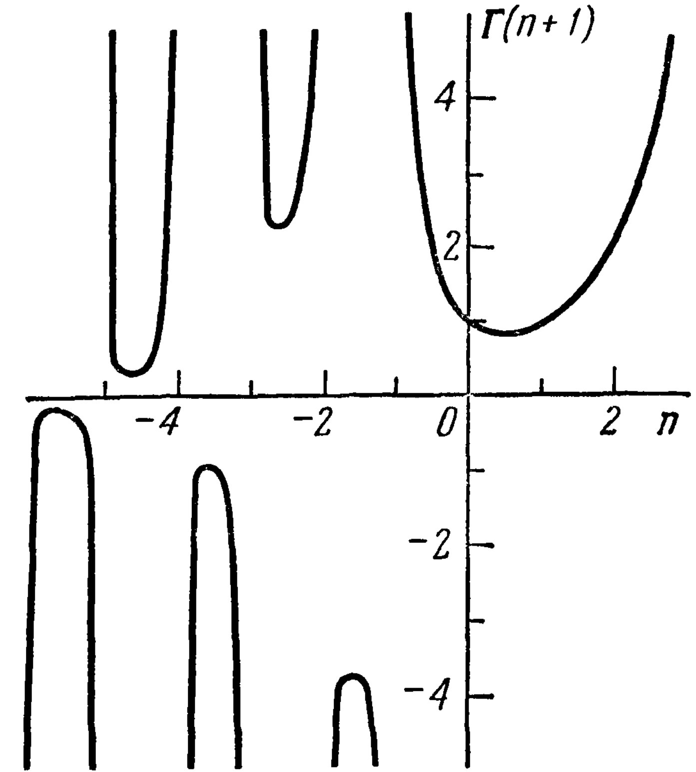


Рис. 21.4-1. График $\Gamma(n+1)$ для действительных значений n. Последовательные относительные максимумы и минимумы приближенно равны

$\Gamma(1{,}4\,62)=0{,}886;$ $\Gamma(-1{,}573)=2{,}302;$
$\Gamma(-0{,}5040)=-3{,}545;$ $\Gamma(-2{,}611)=-0{,}888.$

действительных x. Значения $\Gamma(x)$ приведены в табл. 21.4-1. Заметим, что

$$\left.\begin{aligned}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)&=\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(1)=1,\\ \Gamma(n+1)&=n! \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).\end{aligned}\right\} \tag{21.4-3}$$

(b) Другие представления для $\Gamma(z)$.

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}n^z \text{ (определение Эйлера)}, \tag{21.4-4}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{Cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}} \text{ (бесконечное произведение Вейерштрасса)}, \tag{21.4-5}$$

C — постоянная Эйлера — Маскерони, определенная как

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=-\int_0^{\infty}e^{-t}\ln t\,dt=-\int_0^1\ln\ln\frac{1}{\tau}\,d\tau\approx 0{,}5772157. \tag{21.4-6}$$

(c) Функциональные уравнения

$$\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z), \tag{21.4-7}$$

$$\Gamma(z)\,\Gamma(-z)=-\frac{\pi}{z\sin\pi z}, \qquad \Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z}, \tag{21.4-8}$$

$$\Gamma(nz)=\sqrt{\frac{n^{2nz-1}}{(2\pi)^{n-1}}}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$(n=2,\ 3,\ \ldots) \text{ (теорема умножения Гаусса)}. \tag{21.4-9}$$

Таблица 21.4-1

Гамма-функция $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$

Для больших значений аргумента $\Gamma(x)$ вычисляется при помощи формулы

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) = (x-1)(x-2)\Gamma(x-2) = \ldots$$

Пример. $\Gamma(4{,}7) = 3{,}7 \times 2{,}7 \times 1{,}7 \times 0{,}9086 = 15{,}43.$

Если $x < 1$ и $x \neq 0, -1, -2, \ldots$, то

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} = \ldots$$

Примеры.

$$\Gamma(0{,}7) = \frac{\Gamma(1{,}7)}{0{,}7} = 1{,}298,$$

$$\Gamma(-3{,}2) = \frac{\Gamma(1{,}8)}{(-3{,}2)(-2{,}2)(-1{,}2)(-0{,}2)(0{,}8)} = 0{,}689.$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,00	1,0000	0,9994	9983	9983	9977	9971	9966	9960	9954	9949
1	0,9943	9938	9932	9927	9921	9916	9910	9905	9899	9894
2	9888	9883	9878	9872	9867	9862	9856	9851	9846	9841
3	9835	9830	9825	9820	9815	9810	9805	9800	9794	9789
4	9784	9779	9774	9769	9764	9759	9755	9750	9745	9740
5	9735	9730	9725	9721	9716	9711	9706	9702	9697	9692
6	9687	9683	9678	9673	9669	9664	9660	9655	9651	9646
7	9642	9637	9633	9628	9624	9619	9615	9610	9606	9602
8	9597	9593	9589	9584	9580	9576	9571	9567	9563	9559
9	9555	9550	9546	9542	9538	9534	9530	9526	9522	9518
1,10	9514	9509	9505	9501	9498	9494	9490	9486	9482	9478
1	9474	9470	9466	9462	9459	9455	9451	9447	9443	9440
2	9436	9432	9428	9425	9421	9417	9414	9410	9407	9403
3	9399	9396	9392	9389	9385	9382	9378	9375	9371	9368
4	9364	9361	9357	9354	9350	9347	9344	9340	9337	9334
5	9330	9327	9324	9321	9317	9314	9311	9308	9304	9301
6	9298	9295	9292	9289	9285	9282	9279	9276	9273	9270
7	9267	9264	9261	9258	9255	9252	9249	9246	9243	9240
8	9237	9234	9231	9229	9226	9223	9220	9217	9214	9212
9	9209	9206	9203	9201	9198	9195	9192	9190	9187	9184
1,20	9182	9179	9176	9174	9171	9169	9166	9163	9161	9158
1	9156	9153	9151	9148	9146	9143	9141	9138	9136	9133
2	9131	9129	9126	9124	9122	9119	9117	9114	9112	9110
3	9108	9105	9103	9101	9098	9096	9094	9092	9090	9087
4	9085	9083	9081	9079	9077	9074	9072	9070	9068	9066
5	9064	9062	9060	9058	9056	9054	9052	9050	9048	9046
6	9044	9042	9040	9038	9036	9034	9032	9031	9029	9027
7	4025	9023	9021	9020	9018	9016	9014	9012	9011	9009
8	9007	9005	9004	9002	9000	8999	8997	8995	8994	8992
9	8990	8989	8987	8986	8984	8982	8981	8979	8978	8976
1,30	8975	8973	8972	8970	8969	8967	8966	8964	8963	8961
1	8960	8959	8957	8956	8954	8953	8952	8950	8949	8948
2	8946	8945	8944	8943	8941	8940	8939	8937	8936	8935
3	8934	8933	8931	8930	8929	8928	8927	8926	8924	8923
4	8922	8921	8920	8919	8918	8917	8916	8915	8914	8913
5	8912	8911	8910	8909	8908	8907	8906	8905	8904	8903
6	8902	8901	8900	8899	8898	8897	8897	8896	8895	8894
7	8893	8892	8892	8891	8890	8889	8888	8888	8887	8886
8	8885	8885	8884	8883	8883	8882	8881	8880	8880	8879
9	8879	8878	8877	8877	8876	8875	8875	8874	8874	8873
1,40	8873	8872	8872	8871	8871	8870	8870	8869	8869	8868
1	8868	8867	8867	8866	8866	8865	8865	8865	8864	8864
2	8864	8863	8863	8863	8862	8862	8862	8861	8861	8861
3	8860	8858	8860	8860	8859	8859	8859	8859	8858	8858
4	8858	8858	8858	8858	8857	8857	8857	8857	8857	8857

Таблица 21.4-1 (*продолжение*)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	8857	8857	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856
6	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8356	8856	8856	8856
7	8856	8856	8856	8857	8857	8857	8857	8857	8857	8857
8	8857	8858	8858	8858	8858	8858	8859	8859	8859	8859
9	8859	8860	8860	8860	8860	8861	8861	8861	8862	8862
1,50	0,8862	8863	8863	8863	8864	8864	8864	8865	8865	8866
1	8866	8866	8867	8867	8868	8868	8869	8869	8869	8870
2	8870	8871	8871	8872	8872	8873	8873	8874	8875	8875
3	8876	8876	8877	8877	8878	8879	8879	8880	8880	8881
4	8882	8882	8883	8884	8884	8885	8886	8887	8887	8888
5	8889	8889	8890	8891	8892	8892	8893	8894	8895	8896
6	8896	8897	8898	8899	8900	8901	8901	8902	8903	8904
7	8905	8906	8907	8908	8909	8909	8910	8911	8912	8913
8	8914	8915	8916	8917	8918	8919	8920	8921	8922	8923
9	8924	8925	8926	8927	8929	8930	8931	8932	8933	8934
1,60	8935	8936	8937	8939	8940	8941	8942	8943	8944	8946
1	8947	8948	8949	8950	8952	8953	8954	8955	8957	8958
2	8959	8961	8962	8963	8964	8966	8967	8968	8970	8971
3	8972	8974	8975	8977	8978	8979	8981	8982	8984	8985
4	8986	8988	8989	8991	8992	8994	8995	8997	8998	9000
5	9001	9003	9004	9006	9007	9009	9010	9012	9014	9015
6	9017	9018	9020	9021	9023	9025	9026	9028	9030	9031
7	9033	9035	9036	9038	9040	9041	9043	9045	9047	9048
8	9050	9052	9054	9055	9057	9059	9061	9062	9064	9066
9	9068	9070	9071	9073	9075	9077	9079	9081	9083	9084
1,70	9086	9088	9090	9092	9094	9096	9098	9100	9102	9104
1	9106	9108	9110	9112	9114	9116	9118	9120	9122	9125
2	9126	9128	9130	9132	9134	9136	9138	9140	9142	9145
3	9147	9149	9151	9153	9155	9157	9160	9162	9164	9166
4	9168	9170	9173	9175	9177	9179	9182	9184	9186	9188
5	9191	9193	9195	9197	9200	9202	9204	9207	9209	9211
6	9214	9216	9218	9221	9223	9226	9228	9230	9233	9235
7	9238	9240	9242	9245	9247	9250	9252	9255	9257	9260
8	9262	9265	9267	9270	9272	9275	9277	9280	9283	9285
9	9288	9290	9293	9295	9298	9301	9303	9306	9309	9311
1,80	9314	9316	9319	9322	9325	9327	9330	9333	9335	9338
1	9341	9343	9346	9349	9352	9355	9357	9360	9363	9366
2	9368	9371	9374	9377	9380	9383	9385	9388	9391	9394
3	9397	9400	9403	9406	9408	9411	9414	9417	9420	9423
4	9426	9429	9432	9435	9438	9441	9444	9447	9450	9453
5	9456	9459	9462	9465	9468	9471	9474	9478	9481	9484
6	9487	9490	9493	9496	9499	9503	9506	9509	9512	9515
7	9518	9522	9525	9528	9531	9534	9538	9541	9544	9547
8	9551	9554	9557	9561	9564	9567	9570	9574	9577	9580
9	9584	9587	9591	9594	9597	9601	9604	9607	9611	9614
1,90	9618	9621	9625	9628	9631	9635	9638	9642	9645	9649
1	9652	9656	9659	9663	9666	9670	9673	9677	9681	9684
2	9688	9691	9695	9699	9702	9706	9709	9713	9717	9720
3	9724	9728	9731	9735	9739	9742	9746	9750	9754	9757
4	9761	9765	9768	9772	9776	9780	9784	9787	9791	9795
5	9799	9803	9806	9810	9814	9818	9822	9826	9830	9834
6	9837	9841	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9873
7	9877	9881	9885	9889	9893	9897	9901	9905	9909	9913
8	9917	9921	9925	9929	9933	9938	9942	9946	9950	9954
9	9958	9962	9966	9971	9975	9979	9983	9987	9992	9996
2,00	1,0000	0004	0008	0013	0017	0021	0026	0030	0034	0038

21.4-2. Асимптотическое разложение Стирлинга для $\Gamma(z)$ и $n!$ (см. также пп. 4.4-3, 4.8-6, b и 21.5-4).

$$\Gamma(z)=e^{-z}z^{z-1/2}\sqrt{2\pi}\left[1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51\,840z^3}-\frac{571}{2\,488\,320z^4}+O(z^{-5})\right]$$

$$(|\arg z|<\pi) \text{ (ряд Стирлинга)}. \qquad (21.4\text{-}10)$$

Ряд Стирлинга особенно полезен для больших значений $|z|$; *для действительных положительных z абсолютная величина ошибки меньше, чем абсолютная величина последнего из взятых членов*. Заметим, в частности, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}=1 \quad \text{или} \quad n!\approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \quad \text{при } n\to\infty \qquad (21.4\text{-}11)$$

(*формула Стирлинга*).

Относительная ошибка формулы Стирлинга убывает с возрастанием n; асимптотическая формула часто применяется при вычислении отношения двух факториалов или гамма-функций.

Отметим более специальные формулы:

$$n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}<n!<n^n\sqrt{2\pi n}\,e^{-n+\frac{1}{12n}}, \qquad (21.4\text{-}12)$$

$$n!\approx n^n\sqrt{2\pi n}\exp\left(-n+\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^2}+\dots\right) \qquad (21.4\text{-}13)$$

при $n\to\infty$.

21.4-3. Логарифмическая производная гамма-функции.

$$\psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{z+k}\right)-C; \qquad (21.4\text{-}14)$$

$$\psi(z)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right)dt=-\int_0^1\left(\frac{1}{\ln t}+\frac{t^{z-1}}{1-t}\right)dt \quad (\operatorname{Re} z>0). \qquad (21.4\text{-}15)$$

Заметим, что

$$\psi(1)=-C, \quad \psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z} \qquad (21.4\text{-}16)$$

(C — постоянная Эйлера — Маскерони).

21.4-4. Бета-функция. Бета-функция (полная) определяется как

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=\mathrm{B}(q,\ p) \qquad (21.4\text{-}17)$$

или при помощи аналитического продолжения интеграла

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \qquad (\operatorname{Re} p>0,\ \operatorname{Re} q>0) \qquad (21.4\text{-}18)$$

(*интеграл Эйлера первого рода*),

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi\,d\varphi. \qquad (21.4\text{-}19)$$

Отметим формулы

$$\mathrm{B}(p,\ q)\,\mathrm{B}(p+q,\ r)=\mathrm{B}(q,\ r)\,\mathrm{B}(q+r,\ p), \qquad (24.4\text{-}20)$$

$$\frac{1}{\mathrm{B}(n,\ m)}=m\binom{n+m-1}{m}=n\binom{n+m-1}{n} \qquad (n,\ m=1\ \ 2,\ \ldots). \qquad (21.4\text{-}21)$$

21.4-5. Неполные гамма- и бета-функции. Неполная гамма-функция $\Gamma_z(p)$ **и неполная бета-функция** $\mathrm{B}_z(p,\ q)$ соответственно определяются аналитическим продолжением интегралов

$$\Gamma_z(p)=\int_0^z t^{p-1}e^{-t}\,dt \qquad (\mathrm{Re}\,p>0), \qquad (21.4\text{-}22)$$

$$\mathrm{B}_z(p,\ q)=\int_0^z t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt\ (\mathrm{Re}\,p>0,\ \mathrm{Re}\,q>0;\ 0\leqslant z\leqslant 1). \qquad (21.4\text{-}23)$$

Величина

$$I_z(p,\ q)=\frac{\mathrm{B}_z(p,\ q)}{\mathrm{B}(p,\ q)}$$

называется **отношением неполной бета-функции.**

Большое число определенных и неопределенных интегралов, связанных с гамма-функцией, содержится в [4.6], [21.3].

21.5. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ И ФАКТОРИАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ. МНОГОЧЛЕНЫ И ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ

21.5-1. Биномиальные коэффициенты и факториальные многочлены (см. также п. 1.4-1 и 21.5-3). В табл. 21.5-1 приведены определение и основные свойства *биномиальных коэффициентов* $\binom{x}{n}$. Выражение

$$x^{[n]}=\binom{x}{n}n!\ =x(x-1)\ \ldots\ (x-n+1)=$$
$$=S_0^{(n)}x^n+S_1^{(n)}x^{n-1}+\ldots+S_{n-1}^{(n)}x \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (21.5\text{-}1)$$

называется **факториальным многочленом степени** n. Коэффициенты $S_k^{(n)}$ называются **числами Стирлинга первого рода** и могут быть получены с помощью рекуррентной формулы

$$S_k^{(n+1)}=S_k^{(n)}-nS_{k-1}^{(n)}. \qquad (21.5\text{-}2)$$

Заметим, что

$$(x+y)^{[n]}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{[k]}y^{[n-k]} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (21.5\text{-}3)$$

(*биномиальная теорема Вандермонда*).

Таблица 21.5-1

Определение и свойства биномиальных коэффициентов

(см. также пп. 1.4-1 и 21.5-4)

(a) **Определение и основные свойства.** Если x, y, z — действительные числа и n — целое число, то

$$\binom{x}{n} = \left\{\begin{matrix} \dfrac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} & \text{для} & n>0, \\ 1 & \text{для} & n=0, \\ 0 & \text{для} & n<0 \end{matrix}\right\} \ (\textit{определение}),$$

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{x}{n-j}\binom{y}{j} \qquad (n>0),$$

$$\binom{x}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{z}{j}\binom{x-z}{n-j} \qquad (n>0) \ (\textit{теорема сложения}),$$

$$\binom{x+1}{n} = \binom{x}{n} + \binom{x}{n-1}, \quad \binom{-x}{n} = (-1)^n \binom{x+n-1}{n} \qquad (x>0).$$

(b) **Если, в частности, N и n — положительные числа, то**

$$\binom{N}{n} = \binom{N}{N-n} = \begin{cases} \dfrac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n!} = \dfrac{N!}{(N-n)!\,n!} & \text{для } N \geqslant n, \\ 0 & \text{для } N<n; \end{cases}$$

$$\binom{N}{N} = 1, \quad \binom{N}{N-1} = \binom{N}{1} = N,$$

$$\binom{2N}{N} = (-1)^N 2^{2N} \binom{-1/2}{N} = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j}^2,$$

$$\sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} = 2^N, \quad \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \binom{N}{j} = 0.$$

(c) **Если M, N, n — положительные целые числа такие, что $M \geqslant n$, $N \geqslant n$, то**

$$\binom{N+1}{n+1} = \sum_{j=n}^{N} \binom{j}{n} = \sum_{j=0}^{N-n} \binom{n+j}{j},$$

$$\binom{N-1}{n-1} = \sum_{j=n}^{N} (-1)^{j-n} \binom{N}{j} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-1-j} \binom{N}{j},$$

$$\binom{N+n}{n} = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j}\binom{n}{j},$$

$$\binom{M+N}{N-n} = \sum_{j=0}^{N-n} \binom{N}{n+j}\binom{M}{j}.$$

21.5-2. Многочлены и числа Бернулли.

(а) Определения. **Многочлены Бернулли** $B_k^{(n)}(x)$ **порядка** $n=0, 1, 2, \ldots$ и степени k определяются из разложения производящей функции (п. 8.6-5)

$$\frac{t^n e^{xt}}{(e^t-1)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(n)}(x)\frac{t^k}{k!} \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{21.5-4}$$

Многочлены Бернулли порядка 1 обычно называются просто **многочленами Бернулли.** Заметим, что

$$B_k^{(0)}(x)=x^k, \quad B_k^{(n+1)}x=\frac{k!}{n!}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}[(x-1)(x-2)\ldots(x-n)] \quad (n>k). \tag{21.5-5}$$

Числа $B_k^{(n)}(0)=B_k^{(n)}$ называются **числами Бернулли порядка** n; имеем

$$\frac{t^n}{(e^t-1)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(n)}\frac{t^k}{k!} \quad (n=0, 1, 2,\ldots); \tag{21.5-6}$$

$$\left.\begin{aligned}
&B_0^{(n)}=1, \quad B_1^{(n)}=-\frac{1}{2}n, \quad B_2^{(n)}=\frac{1}{12}n(3n-1),\\
&B_3^{(n)}=-\frac{1}{8}n^2(n-1), \quad B_4^{(n)}=\frac{1}{240}n(15n^3-30n^2+5n+2),\\
&B_5^{(n)}=-\frac{1}{96}n^2(n-1)(3n^2-7n-2),\\
&B_6^{(n)}=\frac{1}{4032}n(63n^5-315n^4+315n^3+91n^2-42n-16).
\end{aligned}\right\} \tag{21.5-7}$$

Числа Бернулли порядка 1 обычно просто называют **числами Бернулли.** $B_k^{(1)}=B_k$; $B_k=0$ для всех нечетных $k>1$, и

$$B_0=1, \quad B_1=-\frac{1}{2}, \quad B_2=\frac{1}{6}, \quad B_4=-\frac{1}{30}, \quad B_6=\frac{1}{42}, \ldots \tag{21.5-8}$$

Числа Бернулли B_{2n} положительны при n нечетном и отрицательны при n четном. Числа Бернулли могут также быть получены с помощью *рекуррентной формулы*

$$B_0=1, \quad 1+\binom{k}{1}B_1+\binom{k}{2}B_2+\ldots+\binom{k}{k-1}B_{k-1}=0 \qquad (k=2, 3, \ldots) \tag{21.5-9}$$

или в виде определителей (*формула Лапласа*)

$$B_n=(-1)^n n!\begin{vmatrix}
\frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0\\
\frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0\\
\frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \ldots & \frac{1}{2!}
\end{vmatrix}.$$

(b) Некоторые свойства многочленов и чисел Бернулли.

$$\frac{d}{dx} B_k^{(n)}(x) = k B_{k-1}^{(n)}(x), \quad \int_a^x B_k^{(n)}(\xi)\, d\xi = \frac{1}{k+1}\left[B_{k+1}^{(n)}(x) - B_{k+1}^{(n)}(a)\right], \tag{21.5-10}$$

$$\Delta B_m^{(n)}(k) = m B_{m-1}^{(n-1)}(k), \quad \Delta^n B_m^{(n)}(k) = m(m-1)\dots(m-n+1)\, k^{m-n}$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;\ m \geqslant n) \text{ (см. п. 20.4-1)}, \tag{21.5-11}$$

$$B_k^{(n)}(x+1) = B_k^{(n)}(x) + k B_{k-1}^{(n-1)}(x), \quad B_k^{(n)}(1) = B_k^{(n)} + k B_{k-1}^{(n-1)}, \tag{21.5-12}$$

$$\int_x^{x+1} B_k^{(n)}(\xi)\, d\xi = \frac{1}{k+1} \Delta B_{k+1}^{(n)}(x) = B_k^{(n-1)}(x), \quad \int_0^1 B_k^{(n)}(\xi)\, d\xi = B_k^{(n-1)}, \tag{21.5-13}$$

$$B_k^{(n)}(n-x) = (-1)^k B_k^{(n)}(x) \text{ (*теорема о дополнительном аргументе*)}; \tag{21.5-14}$$

$$\left.\begin{aligned} B_k^{(n+1)}(x) &= \left(1 - \frac{k}{n}\right) B_k^{(n)}(x) + k\left(\frac{x}{n} - 1\right) B_{k-1}^{(n)}(x), \\ B_k^{(n+1)}(1) &= \left(1 - \frac{k}{n}\right) B_k^{(n)}, \end{aligned}\right\} \tag{21.5-15}$$

$$B_k^{(1)}(mx) = m^{k-1} \sum_{j=0}^{m-1} B_k^{(1)}\left(x + \frac{j}{m}\right) \text{ (*теорема умножения*)};$$

$$\left.\begin{aligned} B_{2k}^{(1)}(x) &= 2(-1)^{k+1}(2k)! \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi r x}{(2\pi r)^{2k}}, \\ B_{2k+1}^{(1)}(x) &= 2(-1)^{k+1}(2k+1)! \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi r x}{(2\pi r)^{2k+1}}. \end{aligned}\right\} \tag{21.5-16}$$

21.5-3. Формулы, связывающие многочлены Бернулли и факториальные многочлены. *Многочлены и числа Бернулли связаны с факториальными многочленами* (п. 21.5-1) *по степеням* x; эти связи используются при решении разностных уравнений и, в частности, при суммировании рядов (п. 4.8-5, d).

$$x^{[n]} = \binom{x}{n} n! = x(x-1)\dots(x-n+1) = B_n^{(n+1)}(x+1) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}^{(n)}\, x^k \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{21.5-17}$$

$$\int_0^x (\xi-1)(\xi-2)\dots(\xi-2r+1)\, d\xi = \int_0^x (\xi-1)^{[2r-1]}\, d\xi =$$
$$= \frac{1}{2r}\left[B_{2r}^{(2r)}(x) - B_{2r}^{(2r)}\right] \quad (r = 1, 2, \dots). \tag{21.5-18}$$

21.5-4. Приближенные формулы для $\binom{N}{n}$ (см. также п. 21. 4-2). Если N — положительное целое число и $z = \frac{2}{N}\left|\frac{N}{2} - n\right| < \sqrt[3]{\frac{1}{N}}$, то

$$\binom{N}{n} \approx \frac{2^{N+1}}{\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{N-1}{2} z^2} e^{\alpha \frac{N z^3}{1-z}} = \frac{2^{N+1}}{\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{N-1}{2} z^2} \left(1 + \alpha \frac{N z^3}{1-z} + \dots\right) \tag{21.5-19}$$
$$\left(-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}\right).$$

Если $n \ll N$, то

$$\binom{N}{n} \approx \frac{N^n}{n!} e^{-\alpha \frac{n^2}{N-n}} \qquad \left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\right). \tag{21.5-20}$$

При больших значениях N, n и $N-n$ применяется формула Стирлинга (21.4-11).

21.6. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ФУНКЦИИ

21.6-1. Эллиптические функции; общие свойства. Функция $w = f(z)$ комплексной переменной z называется **эллиптической функцией**, если:

1. $f(z)$ является **двоякопериодической функцией** с двумя конечными **примитивными периодами** (наименьшими периодами) ω_1 и ω_2, отношение которых не есть действительное число *), т. е.

$$f(z + m\omega_1 + n\omega_2) = f(z) \quad (m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;\ \operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \neq 0). \tag{21.6-1}$$

Точки z плоскости, отличающиеся друг от друга на период, называются **конгруэнтными**.

2. Единственные особенности $f(z)$ в конечной части плоскости суть *полюсы* (см. также пп. 7.6-7—7.6-9).

Двоякопериодическая функция повторяет значения, принимаемые ею в **параллелограмме периодов**, определенном точками 0, ω_1, ω_2, $\omega_1 + \omega_2$, причем две стороны, соединяющие три последние точки, нужно исключить как принадлежащие смежному параллелограмму. **Порядком** эллиптической функции называется число полюсов в параллелограмме периодов, причем каждый полюс считается столько раз, какова его кратность.

Двоякопериодическая функция, не имеющая полюсов в параллелограмме периодов (целая двоякопериодическая функция), *есть постоянная. Сумма вычетов двоякопериодической функции в ее полюсах в параллелограмме периодов равна нулю*; отсюда следует, что простейшая нетривиальная эллиптическая функция имеет порядок 2. *Эллиптическая функция $f(z)$ порядка r принимает каждое значение w в точности r раз в каждом параллелограмме периодов, если это значение считать столько раз, какова кратность корня уравнения $f(z) - w = 0$.* Разность между суммой всех нулей и суммой всех полюсов функции $f(z)$, расположенных в параллелограмме периодов, равна некоторому ее периоду.

Эллиптические функции обычно встречаются в связи с интегралами или дифференциальными уравнениями, содержащими квадратные корни из многочленов третьей или четвертой степеней (например, при вычислении длины дуги эллипса, при решении уравнения колебаний маятника; см. также пп. 4.6-7 и 21.6-4.) *Эллиптические функции Вейерштрасса и нормальные эллиптические интегралы образуются из простых функций с известными особенностями и просты для теоретических исследований* (пп. 21.6-2, 21.6-3 и 21.6-5 b). Для численных расчетов предпочтительнее *эллиптические функции Якоби* (п. 21.6-7), которые могут рассматриваться как обобщение тригонометрических функций; *нормальные эллиптические интегралы Лежандра*, тесно связанные с обратными функциями Якоби, также подробно табулированы (пп. 21.6-5 и 21.6-6).

21.6-2. $\wp$-функция Вейерштрасса.

(a) $\wp(z) = \wp(z \mid \omega_1,\ \omega_2)$ есть четная эллиптическая функция порядка 2 с периодами ω_1, ω_2 и двукратными полюсами в точках $z = m\omega_1 + n\omega_2$ (n, $m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$). Функция $\wp(z)$ определяется как

$$\wp(z) = \wp(z \mid \omega_1,\ \omega_2) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{m,\ n \\ m^2 + n^2 \neq 0}} \left[\frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2}\right] = \wp(-z)$$

$$\left[\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0\right]. \tag{21.6-2}$$

---

*) Следует иметь в виду, что во многих руководствах периоды обозначаются через $2\omega_1$ и $2\omega_2$.

Суммирование распространяется по всем целым значениям m и n (положительным, отрицательным и нулевым), за исключением одновременных нулевых значений m и n. Функция $w=\wp(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=4w^3-g_2w-g_3=4(w-e_1)(w-e_2)(w-e_3), \tag{21.6-3}$$

где

$$e_1=\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2=\wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right), \quad e_3=\wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \tag{21.6-4}$$

$$e_1+e_2+e_3=0, \quad e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3=-\frac{1}{4}g_2, \quad e_1e_2e_3=\frac{1}{4}g_3. \tag{21.6-5}$$

Параметры g_2, g_3 определяют постоянные ω_1, ω_2, связанные с каждой $\wp$-функцией, и называются **инвариантами** $\wp(z)=\wp(z\mid\omega_1,\omega_2)=\wp(z;g_2,g_3)$; заметим, что при любом $t\neq0$

$$\wp(tz\mid t\omega_1, t\omega_2)=t^{-2}\wp(z\mid\omega_1,\omega_2), \quad \wp(tz;t^{-4}g_2,t^{-6}g_3)=t^{-2}\wp(z;g_2,g_3). \tag{21.6-6}$$

Точки $w=e_1$, e_2, e_3 и $w=\infty$ есть точки разветвления обратной для $\wp(z\mid\omega_1,\omega_2)$ функции

$$z=\int\limits_{\infty}^{w}\frac{dw}{\sqrt{4w^3-g_2w-g_3}} \tag{21.6-7}$$

(*нормальный эллиптический интеграл Вейерштрасса первого рода*).

Заметим следующие разложения в ряды:

$$\left.\begin{aligned}\wp(z;g_2,g_3)&=\frac{1}{z^2}+\frac{g_2}{20}z^2+\frac{g_3}{28}z^4+\frac{g_2^2}{1200}z^6+\frac{3g_2g_3}{6160}z^8+\ldots=\\&=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^{2k-2}\ [0<|z|<\min(|\omega_1|,|\omega_2|)],\\a_k&=\frac{3}{(k-3)(2k+1)}(a_2a_{k-2}+a_3a_{k-3}+\ldots+a_{k-2}a_2);\end{aligned}\right\} \tag{21.6-8}$$

$$\left.\begin{aligned}g_2&=60\sum_{\substack{m,n\\m^2+n^2\neq0}}\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^4}=\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4\left(\frac{1}{12}+20\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3q^{2k}}{1-q^{2k}}\right),\\g_3&=140\sum_{\substack{m,n\\m^2+n^2\neq0}}\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^6}=\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6\left(\frac{1}{216}-\frac{7}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^5q^{2k}}{1-q^{2k}}\right)\left(q=e^{i\pi\frac{\omega_1}{\omega_2}}\right);\end{aligned}\right\} \tag{21.6-9}$$

и *теорему сложения*

$$\wp(A+B)=-\wp(A)-\wp(B)+\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(A)-\wp'(B)}{\wp(A)-\wp(B)}\right]^2. \tag{21.6-10}$$

(b) *Каждая эллиптическая функция $f(z)$ с периодами ω_1, ω_2 может быть представлена как рациональная функция от $\wp(z;\omega_1,\omega_2)$ и $\wp'(z;\omega_1,\omega_2)$.* Более точно, $f(z)$ может быть записана в виде

$$f(z)=R_1[\wp(z)]+\wp'(z)R_2[\wp(z)], \tag{21.6-11}$$

где R_1 и R_2 — рациональные функции; $\wp'(z)$ — нечетная эллиптическая функция порядка 3.

21.6-3. ζ- и σ-функции Вейерштрасса.

(а) ζ- и σ-функции Вейерштрасса *не являются* эллиптическими функциями, однако могут быть использованы для построения эллиптических функций с заданными особенностями. По определению

$$\zeta(z)=\zeta(z\mid\omega_1,\ \omega_2)=$$
$$=\frac{1}{z}+\sum_{\substack{m,\ n\\ m^2+n^2\neq 0}}\left[\frac{1}{z-m\omega_1-n\omega_2}+\frac{1}{m\omega_1+n\omega_2}+\frac{z}{(m\omega_1+n\omega_2)^2}\right]=-\zeta(-z),$$

$$\sigma(z)=\sigma(z\mid\omega_1,\ \omega_2)=$$
$$=z\prod_{\substack{m,\ n\\ m^2+n^2\neq 0}}\left(1-\frac{z}{m\omega_1+n\omega_2}\right)\exp\left[\frac{z}{m\omega_1+n\omega_2}+\frac{z^2}{2(m\omega_1+n\omega_2)^2}\right]=-\sigma(-z)$$
$$\left[\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)>0\right], \tag{21.6-12}$$

где сумма и произведение распространяются по всем целым (положительным, отрицательным и нулевым) значениям m и n, за исключением одновременных нулевых значений m и n. $\zeta(z)$ имеет простые полюсы и $\sigma(z)$ имеет простые нули в точках $z=m\omega_1+n\omega_2$, и

$$\zeta'(z)=-\wp(z),\qquad \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}=\zeta(z). \tag{21.6-13}$$

Формулы (8) и (13) позволяют получить разложения функций $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ в ряды Лорана в окрестности точки $z=0$. Отметим, что

$$\zeta(z)=\int\limits_{\text{const}}^{\wp(z)}\frac{w\,dw}{\sqrt{4w^3-g_2w-g_3}}$$ (*нормальный эллиптический интеграл Вейерштрасса второго рода*). (21.6-14)

Теорема сложения для ζ-функции

$$\zeta(A+B)=\zeta(A)+\zeta(B)+\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(A)-\wp'(B)}{\wp(A)-\wp(B)}. \tag{21.6-15}$$

Если ввести обозначения*) $2\zeta(\omega_1/2)=\eta_1$, $2\zeta(\omega_2/2)=\eta_2$, то $\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1=2\pi i$ и

$$\left.\begin{aligned}&\zeta(z+m\omega_1+n\omega_2)=\zeta(z)+m\eta_1+n\eta_2\qquad (m,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),\\&\sigma(z+m\omega_1+n\omega_2)=\\&\quad=(-1)^{m+n+mn}\,\sigma(z)\exp\left[(m\eta_1+n\eta_2)\left(z+\frac{m\omega_1+n\omega_2}{2}\right)\right].\end{aligned}\right\} \tag{21.6-16}$$

(b) * Если эллиптическая функция $f(z)$ имеет в параллелограмме периодов только простые полюсы b_k с вычетами A_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$, то

$$f(z)=\sum_{k=1}^{r}A_k\,\zeta(z-b_k)+C. \tag{21.6-17 a}$$

Если эллиптическая функция $f(z)$ имеет в параллелограмме периодов нули a_k и полюсы b_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$, каждый из которых пишется столько раз, какова его кратность, то

$$f(z)=C\frac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\ \ldots\ \sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_1^*)\,\sigma(z-b_2)\ \ldots\ \sigma(z-b_k)}, \tag{21.6-17 b}$$

где $b_1^*=\sum\limits_{k=1}^{r}a_k-\sum\limits_{k=2}^{r}b_k$ — полюс функции $f(z)$, конгруэнтный полюсу b_1. *.

*) Если периоды обозначены через $2\omega_1$ и $2\omega_2$ (см. сноску на стр. 718), то полагают $\eta_1=\zeta(\omega_1)$, $\eta_2=\zeta(\omega_2)$.

21.6-4. Эллиптические интегралы (см. также п. 4.6-7). Функция

$$F(z)=\int_a^z f(z)\,dz \qquad (21.6\text{-}18)$$

называется **эллиптическим интегралом**, если $f(z)$ есть рациональная функция от z и квадратного корня $\sqrt{G(z)}$ из многочлена

$$G(z)=a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4=a_0(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4), \qquad (21.6\text{-}19)$$

не имеющего кратных корней; сюда включается случай многочлена третьей степени $G(z)=G_3(z)$, который рассматривается как многочлен четвертой степени $G(z)=G_4(z)$ при условии, что $\alpha_4=\infty$ и $a_0=0$ так, что формально $a_0(z-\alpha_4)=a_1$.

В формуле (18) считается, что нижний предел интегрирования a не совпадает ни с одним корнем многочлена $G(z)$.

Каждый эллиптический интеграл есть многозначная функция от z; разные пути интегрирования производят бесчисленное множество значений функции. Точки $z=\alpha_1$, $z=\alpha_2$, $z=\alpha_3$, $z=\alpha_4$ являются *точками разветвления*. Соединяя α_1, α_2 и α_3, α_4 двумя соответствующим образом определенными разрезами, можно получить связную риманову поверхность (п. 7.4-3), подобную поверхности тора.

21.6-5. Приведение эллиптических интегралов. Следующие действия приводят каждый эллиптический интеграл к сумме элементарных функций и трех так называемых *нормальных эллиптических интегралов* (см. также [21.2], [21.3]; в [21.3] содержится очень подробная таблица явных формул, выражающих эллиптические интегралы через нормальные эллиптические интегралы).

(а) Алгебраическое приведение. Заметим, что четные степени $\sqrt{G(z)}$ есть многочлены от z, и запишем

$$f(z)=\frac{P_1(z)+P_2(z)\sqrt{G(z)}}{P_3(z)+P_4(z)\sqrt{G(z)}}=\frac{\left(P_1+P_2\sqrt{G}\right)\left(P_3-P_4\sqrt{G}\right)}{(P_3)^2-(P_4)^2G}=$$
$$=R_1(z)+\frac{R_2(z)}{\sqrt{G(z)}}, \qquad (21.6\text{-}20)$$

где $P_i(z)$ — многочлены, а $R_1(z)$ и $R_2(z)$ — рациональные функции. Интегрирование $R_1(z)$ приводит к элементарным функциям (п. 4.6-6).

Разлагая рациональную функцию $R_2(z)$ на простейшие дроби (п. 1.7-4), приведем вычисление $\int\frac{R_2(z)}{\sqrt{G(z)}}dz$ к интегралам вида

$$I_n=\int\frac{(z-c)^n}{\sqrt{G(z)}}dz \qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots). \qquad (21.6\text{-}21)$$

Каждый такой интеграл может быть выражен через I_0, I_1, I_2 *и* I_{-1} при помощи рекуррентной формулы

$$(2n+6)\,b_0I_{n+4}+(2n+5)\,b_1I_{n+3}+(2n+4)\,b_2I_{n+2}+$$
$$+(2n+3)\,b_3I_{n+1}+(2n+2)\,b_4I_n=2\,(z-c)^{n+1}\sqrt{G(z)}$$
$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots), \qquad (21.6\text{-}22)$$

где коэффициенты b_k определяются из тождества

$$G(z)=a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4=$$
$$=b_0(z-c)^4+b_1(z-c)^3+b_2(z-c)^2+b_3(z-c)+b_4. \qquad (21.6\text{-}23)$$

Формула (22) позволяет явно выразить I_2 через I_0, I_1 и I_{-1}, если $a_0=0$

(т. е. $b_0=0$) или если c есть корень уравнения $G(z)=0$ (т. е. $b_4=0$). Пусть c не является таким корнем; тогда можно записать I_2 как

$$\int \frac{(z-c)^2}{\sqrt{G(z)}}\,dz=\int \frac{(z-c')^2}{\sqrt{G(z)}}\,dz+\alpha\int\frac{z\,dz}{\sqrt{G(z)}}+\beta\int\frac{dz}{\sqrt{G(z)}}, \qquad (21.6\text{-}24)$$

где $z=c'$ есть корень $G(z)=0$. *Следовательно, каждый эллиптический интеграл* (18) *может быть выражен в виде суммы элементарных функций и трех сравнительно простых типов эллиптических интегралов первого, второго и третьего рода* (п. 21.6-4):

$$\int\limits_a^z \frac{dz}{\sqrt{G(z)}},\qquad \int\limits_a^z \frac{z\,dz}{\sqrt{G(z)}},\qquad \int\limits_a^z \frac{dz}{(z-c)\sqrt{G(z)}}. \qquad (21.6\text{-}25)$$

Первый из этих интегралов обычно рассматривают как **нормальный эллиптический интеграл первого рода;** другие два интеграла (25) непосредственно применяются редко, и чаще пользуются их линейными комбинациями — **нормальными эллиптическими интегралами второго и третьего рода** (пп. 21.6-2, 21.6-3 и 21.6-6).

Эллиптический интеграл первого рода конечен для всех z; он аналитичен всюду, за исключением алгебраических точек разветвления α_1, α_2, α_3, α_4. Эллиптический интеграл второго рода аналитичен всюду, исключая те же точки разветвления и полюс на бесконечности (если $a_0=0$, то $\alpha_4=\infty$ и интеграл имеет на бесконечности точку разветвления и принимает в ней бесконечное значение).

Эллиптический интеграл третьего рода помимо алгебраических точек разветвления α_1, α_2, α_3, α_4 имеет еще логарифмическую точку разветвления при $z=c$.

(b) Замена переменных. Нормальные формы Вейерштрасса и Римана. В процессе приведения можно ввести новую переменную интегрирования $\tilde z=\tilde z(z)$, преобразующую эллиптические интегралы (21) или (25) в новые эллиптические интегралы, содержащие более удобные многочлены $\tilde G(\tilde z)$ и, возможно, более простую рекуррентную формулу (22). В частности, дробно-линейное преобразование

$$z=\frac{A\tilde z+B}{C\tilde z+D}\qquad (AD-BC\neq 0) \qquad (21.6\text{-}26)$$

(п. 7.9-2), выбранное так, что точки разветвления $z=\alpha_1$, α_2, α_3, α_4 преобразуются в точки $\tilde z=e_1$, e_2, e_3, ∞, приводит к эллиптическим интегралам **в нормальной форме Вейерштрасса,** где $\tilde G(\tilde z)=4\tilde z^3-g_2\tilde z-g_3$. Эти интегралы связаны с функцией Вейерштрасса $\wp$ (п. 21.6-2). Напротив, преобразование (26), отображающее точки $z=\alpha_1$, α_2, α_3, α_4 в $\tilde z=0$, 1, $1/k$, $-1/k$, где k есть действительное число, заключенное между 0 и 1, приводит к эллиптическим интегралам **в нормальной форме Римана,** где $\tilde G(\tilde z)=\tilde z(1-\tilde z)(1-k^2\tilde z^2)$.)

(c) Приведение к нормальной форме Лежандра. Чаще требуется преобразовать действительный интеграл $\int\limits_a^x f(x)\,dx$ **к нормальной форме Лежандра,** где $\tilde G(\tilde z)=(1-\tilde z^2)(1-k^2\tilde z^2)$ и k есть действительное число, заключенное между 0 и 1. Процесс приведения приводит к действительным нормальным интегралам Лежандра (п. 21.6-6), для которых имеются подробные таблицы.

Пусть $G(x)$ — действительный многочлен, положительный в интервале (a, x); тогда $\int\limits_a^x f(x)\,dx$ принимает действительные значения, если интервал интегрирования не содержит действительных корней уравнения $G(x)=0$. Табл. 21.6-1 содержит преобразования $x=x(\varphi)$, отображающие интервал интегрирования (a, x) в соответствующий интервал действительного аргумента φ между 0 и $\pi/2$, так что

$$\frac{dx}{\sqrt{G(x)}}=\mu\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad (0<k^2<1) \qquad (21.6\text{-}27)$$

для различных возможных типов действительных многочленов четвертой степени $G(x)=G_4(x)$ и третьей степени $G(x)=G_3(x)$. Соответствующие значения постоянных параметров k^2 и μ также табулированы.

Во всех случаях старшие коэффициенты (a_0 или a_1) многочленов $G(x)$ приняты равными 1 или -1. В случае действительных корней принимаем $\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\alpha_4$; комплексные корни обозначаем $b_1\pm ic_1$ и $b_2\pm ic_2$, где $b_1\geqslant b_2$, $c_1>0$, $c_2>0$. Иногда вводятся вспомогательные величины:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{ik}=\alpha_k-\alpha_i \quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4),\\
&(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)=\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\delta}\,\frac{\beta-\delta}{\beta-\gamma},\\
&\operatorname{tg}\theta_1=\frac{\alpha_1-b_1}{c_1},\quad \operatorname{tg}\theta_2=\frac{\alpha_2-b_1}{c_1},\\
&\operatorname{tg}\theta_3=\frac{c_1+c_2}{b_1-b_2},\quad \operatorname{tg}\theta_4=\frac{c_1-c_2}{b_1-b_2},\\
&\operatorname{tg}[(\theta_5/2)^2]=\frac{\cos\theta_3}{\cos\theta_4},\\
&\nu=\operatorname{tg}[(\theta_2-\theta_1)/2]\operatorname{tg}[(\theta_1+\theta_2)/2].
\end{aligned}\right\} \qquad (21.6\text{-}28)$$

21.6-6. Нормальные эллиптические интегралы Лежандра (см. также пп. 21.6-4 и 21.6-5).

(а) Определения. **Нормальные эллиптические интегралы Лежандра (неполные)** определяются формулами

$$F(\varphi,\ k)=\int\limits_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int\limits_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\tilde F(z,\ k)$$

(*нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода*);

$$E(\varphi,\ k)=\int\limits_0^\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\int\limits_0^z\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz=\tilde E(z,\ k)$$

(*нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода*), (21.6-29)

$$\pi(\varphi,\ c,\ k)=\int\limits_0^\varphi\frac{d\varphi}{(1+c\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=$$

$$=\int\limits_0^z\frac{dz}{(1+cz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\tilde\pi(z,\ c,\ k)$$

(*нормальный эллиптический интеграл Лежандра третьего рода*),

где $z=\sin\varphi$, так что $\tilde F(\sin\varphi,\ k)\equiv F(\varphi,\ k)$ и т. д.

Таблица 21.6-1

Преобразование к нормальной форме Лежандра

Все корни $G(x)$ действительны

$G(x)$ корни	Старший коэффициент	Интервал	Преобразование $x =$	$\sin^2\varphi =$	Соответствующие значения x	Соответствующие значения φ	k^2	μ
$G_4(x)$, четыре действительных корня	1	$\alpha_1 \leqslant x$ или $x \leqslant \alpha_4$	$\dfrac{\alpha_1\alpha_{42} - \alpha_2\alpha_{41}\sin^2\varphi}{\alpha_{42} - \alpha_{41}\sin^2\varphi}$	$\dfrac{\alpha_{42}}{\alpha_{41}}\,\dfrac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2}$	α_1 α_4	0 $\pi/2$	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_3)$	$\dfrac{2}{(\alpha_{31}\alpha_{42})^{1/2}}$
		$\alpha_3 \leqslant x \leqslant \alpha_2$	$\dfrac{\alpha_3\alpha_{42} - \alpha_4\alpha_{32}\sin^2\varphi}{\alpha_{42} - \alpha_{32}\sin^2\varphi}$	$\dfrac{\alpha_{42}}{\alpha_{32}}\,\dfrac{x-\alpha_3}{x-\alpha_4}$	α_3 α_2	0 $\pi/2$		
	-1	$\alpha_4 \leqslant x \leqslant \alpha_3$	$\dfrac{\alpha_4\alpha_{31} + \alpha_1\alpha_{43}\sin^2\varphi}{\alpha_{31} + \alpha_{43}\sin^2\varphi}$	$\dfrac{\alpha_{31}}{\alpha_{43}}\,\dfrac{x-\alpha_4}{\alpha_1 - x}$	α_4 α_3	0 $\pi/2$	$(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_1)$	
		$\alpha_2 \leqslant x \leqslant \alpha_1$	$\dfrac{\alpha_2\alpha_{31} - \alpha_3\alpha_{21}\sin^2\varphi}{\alpha_{31} - \alpha_{21}\sin^2\varphi}$	$\dfrac{\alpha_{31}}{\alpha_{21}}\,\dfrac{x-\alpha_2}{x-\alpha_3}$	α_2 α_1	0 $\pi/2$		
$G_3(x)$ три действительных корня	1	$\alpha_3 \leqslant x \leqslant \alpha_2$	$\alpha_3 + \alpha_{32}\sin^2\varphi$	$\dfrac{x-\alpha_3}{\alpha_{32}}$	α_3 α_2	0 $\pi/2$	$\dfrac{\alpha_{32}}{\alpha_{31}}$	$\dfrac{2}{(\alpha_{31})^{1/2}}$
		$\alpha_1 \leqslant x$	$\dfrac{\alpha_1 - \alpha_2\sin^2\varphi}{1 - \sin^2\varphi}$	$\dfrac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2}$	α_1 ∞	0 $\pi/2$		
	-1	$x \leqslant \alpha_3$	$\alpha_1 - \dfrac{\alpha_{31}}{\sin^2\varphi}$	$\dfrac{\alpha_{31}}{\alpha_1 - x}$	$-\infty$ α_3	0 $\pi/2$	$\dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{31}}$	
		$\alpha_2 \leqslant x \leqslant \alpha_1$	$\dfrac{\alpha_2\alpha_{31} - \alpha_3\alpha_{21}\sin^2\varphi}{\alpha_{31} - \alpha_{21}\sin^2\varphi}$	$\dfrac{\alpha_{31}}{\alpha_{21}}\,\dfrac{x-\alpha_2}{x-\alpha_3}$	α_2 α_1	0 $\pi/2$		

$G(x)$ имеет комплексные корни

$G(x)$ корни	Старший коэффициент	Интервал	Преобразование	Вспомогательная величина	Соответствующие значения		k^2	μ
					x	φ		
$G_4(x)$, два действительных и два комплексных корня	1	$\alpha_1 \leqslant x$ или $x \leqslant \alpha_2$	$x=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\,\frac{\nu-\cos\varphi}{1-\nu\cos\varphi}$	θ_1 — острый угол, θ_2 — тупой	α_1	0	$\left[\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right]^2$	$\frac{(-\cos\theta_1\cos\theta_2)^{1/2}}{c_1}$
	−1	$\alpha_2 \leqslant x \leqslant \alpha_1$	$\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^2=\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\,\frac{\alpha_1-x}{x-\alpha_2}$	θ_1, θ_2 — острые	α_2	π		$-\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2)^{1/2}}{c_1}$
$G_3(x)$, два комплексных корня	1	$\alpha_1 \leqslant x$	$x=\alpha_1-\frac{c_1}{\cos\theta_1}\,\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$	θ_1 — тупой	α_1	0	$\left[\sin\left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$	$\left(\frac{-\cos\theta_1}{c_1}\right)^{1/2}$
	−1	$x \leqslant \alpha_1$	$\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^2=\frac{\cos\theta_1}{c_1}(\alpha_1-x)$	θ_1 — острый	∞	π		$-\left(\frac{\cos\theta_1}{c_1}\right)^{1/2}$
$G_4(x)$, четыре комплексных корня, $b_1 > b_2$	1	$-\infty < x < \infty$	$x=b_1+c_1\operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\theta_3}{2}+\frac{\theta_4}{2}\right)$ $\operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\theta_3}{2}+\frac{\theta_4}{2}\right)=\frac{x-b_1}{c_1}$	$\theta_3, \theta_4, \frac{1}{2}\theta_5$ — острые	$-\infty$ b_1	$-\frac{\pi+\theta_3+\theta_4}{2}$ $-\frac{\theta_3+\theta_4}{2}$	$\sin^2\theta_5$	$\left(\frac{\cos\theta_5}{c_1c_2}\right)^{1/2}$
$G_4(x)$, четыре комплексных корня $b_1 = b_2$ $c_1 > c_2$			$x=b_1-c_1\operatorname{ctg}\varphi$ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{c_1}{b_1-x}$	$\theta_3=\theta_4=\frac{\pi}{2}$	∞	$\frac{\pi-\theta_3-\theta_4}{2}$	$1-\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2$	$\frac{1}{c_1}$

k есть комплексное число, называемое **модулем** эллиптического интеграла, c называется **параметром** интеграла 3-го рода.

Эллиптические интегралы (29) — нечетные функции от z (и от φ) и четные от модуля k. Если k действительно и $|k| \leqslant 1$, то эллиптические интегралы

Рис. 21.6-1. Неполный эллиптический интеграл первого рода $F(\varphi, k) = F(\varphi, \sin\alpha)$: *a*) как функция φ при постоянном α; *b*) как функция модулярного угла α при постоянном φ.

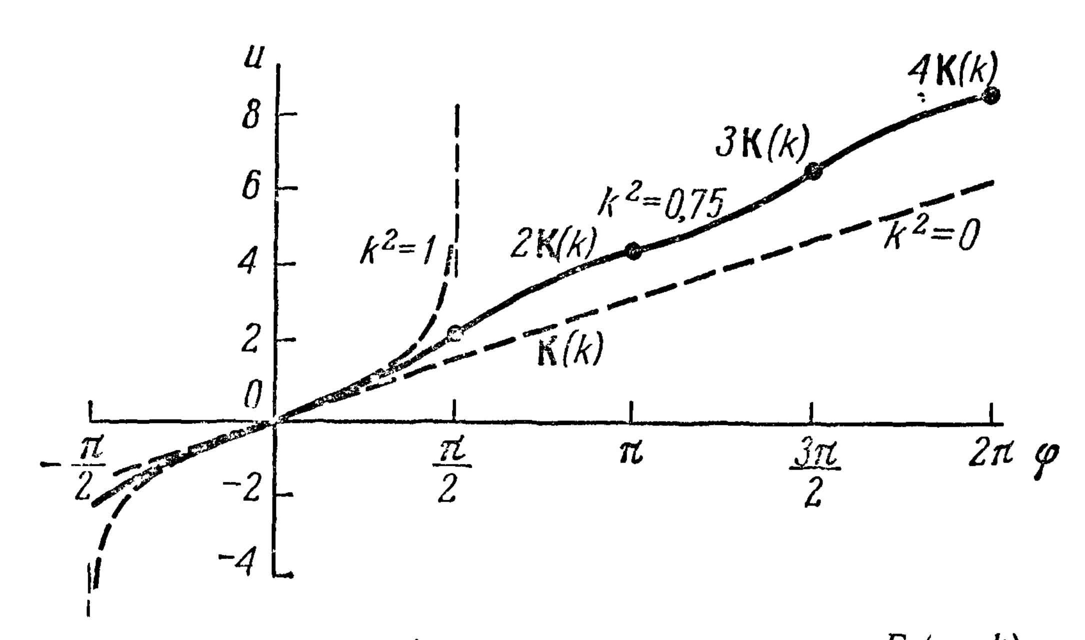


Рис. 21.6-2. Неполный эллиптический интеграл первого рода $F(\varphi, k)$ как функция от φ, для трех разных значений k.

первого и второго рода *действительны* для действительных z, таких, что $-1 \leqslant z \leqslant 1$, т. е. для действительных φ. Для указанных значений φ и k функции $F(\varphi, k)$ и $E(\varphi, k)$ табулированы [21.2]. При табулировании вместо модуля k обычно вводят **модулярный угол** $\alpha = \arcsin k$.

На рис. 21.6-1 показаны графики функции $F(\varphi, \sin\alpha)$ при постоянных α и при постоянных φ. На рис. 21.6-2 показаны графики функции $F(\varphi, k)$ в зависимости от φ при разных k; см. также [21.2].

(b) Полные нормальные эллиптические интегралы Лежандра (см. также рис. 21.6-3). Функции

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{K}=\mathrm{K}(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=F(\pi/2,\ k),\\ \mathrm{E}=\mathrm{E}(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=E(\pi/2,\ k)\end{aligned}\right\}\qquad(21.6\text{-}30)$$

соответственно известны как **полные нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода**; k и $k'=\sqrt{1-k^2}$ называются **дополнительными модулями**; $\mathrm{K}(k)$ и $\mathrm{K}'(k)=\mathrm{K}(k')$ называются **связанными эллиптическими интегралами первого рода**, а $\mathrm{E}(k)$ и $\mathrm{E}'(k)=\mathrm{E}(k')$ — **связанными эллиптическими интегралами второго рода**. Заметим, что

$$\mathrm{EK}'+\mathrm{E}'\mathrm{K}-\mathrm{KK}'=\frac{\pi}{2}\ \textit{(соотношение Лежандра)}\qquad(21.6\text{-}31)$$

и

$$\mathrm{K}(0)=\mathrm{K}'(1)=\frac{\pi}{2},\qquad \mathrm{K}(1)=\mathrm{K}'(0)=\infty,$$

$$\mathrm{E}(0)=\mathrm{E}'(1)=\frac{\pi}{2},\qquad \mathrm{E}(1)=\mathrm{E}'(0)=1.$$

Обычно полные эллиптические интегралы $\mathrm{K}(k)$ и $\mathrm{E}(k)$ табулируются в виде функций модулярного угла $\alpha=\arcsin k$. При этом дополнительному модулю k' соответствует угол $\pi/2-\alpha$ (см. рис. 21.6-3 и табл. 21.6-4).

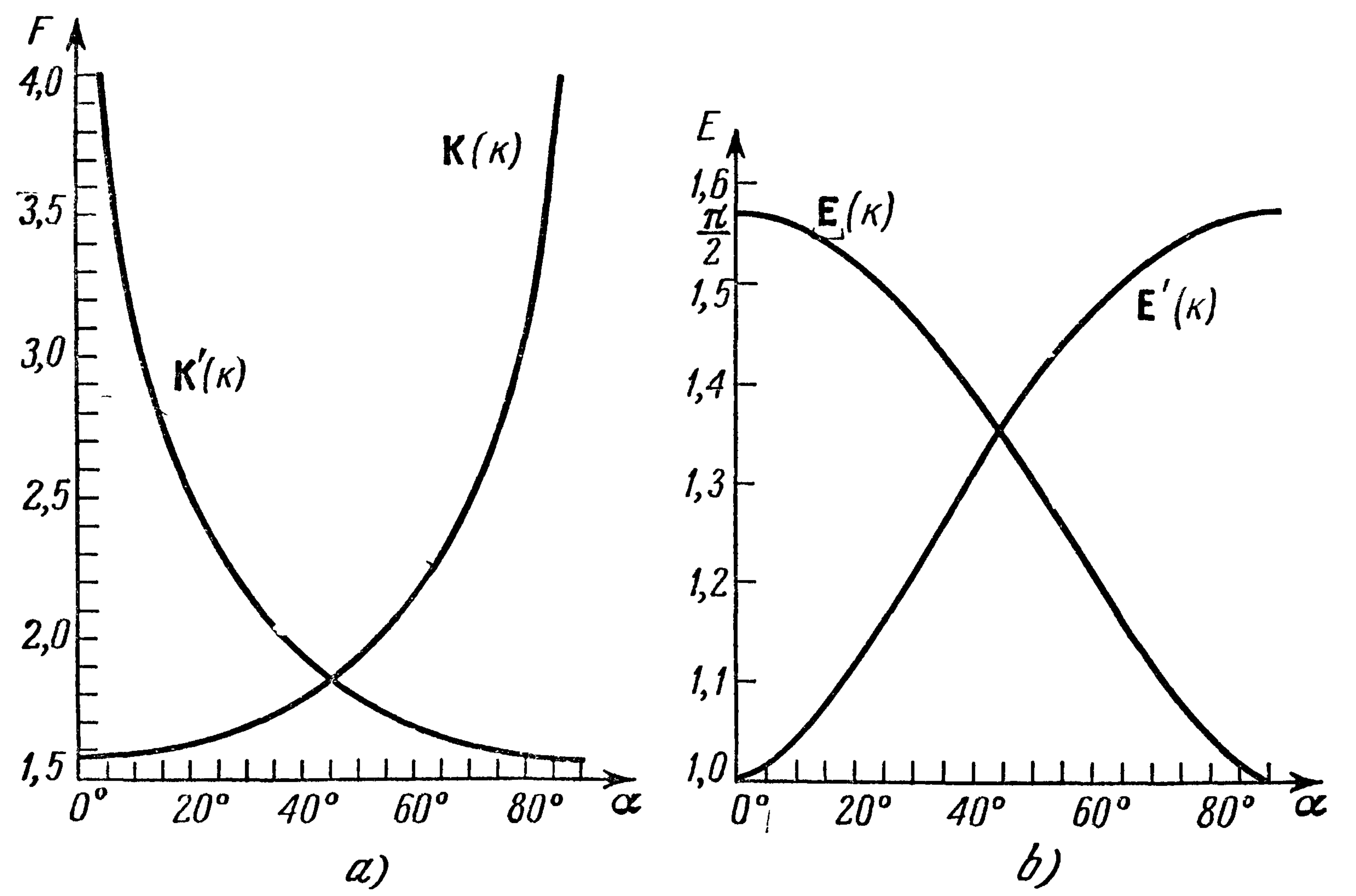


Рис. 21.6-3. Полные эллиптические интегралы
a) $\mathrm{K}(k)=\mathrm{K}(\sin\alpha)$ и $\mathrm{K}'(k)$; *b*) $\mathrm{E}(k)$ и $\mathrm{E}'(k)$ как функции модулярного угла α.

$\mathrm{K}(k)$ и $\mathrm{E}(k)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left.\begin{aligned} k(1-k^2)\frac{d^2\mathrm{K}}{dk^2}+(1-3k^2)\frac{d\mathrm{K}}{dk}-k\mathrm{K}=0,\\ k(1-k^2)\frac{d^2\mathrm{E}}{dk^2}+(1-k^2)\frac{d\mathrm{E}}{dk}+k\mathrm{E}=0,\end{aligned}\right\}\qquad(21.6\text{-}32)$$

Таблица 21.6-2

Преобразования эллиптических интегралов

$\dot{k}$	$\sin\dot{\varphi}$	$\cos\dot{\varphi}$	$F(\dot{\varphi}, \dot{k})$	$E(\dot{\varphi}, \dot{k})$
$\frac{1}{k}$	$k\sin\varphi$	$\Delta(\varphi, k)$	$kF(\varphi, k)$	$\frac{1}{k}[E(\varphi, k) - k'^2 F(\varphi, k)]$
k'	$-i\,\mathrm{tg}\,\varphi$	$\sec\varphi$	$-iF(\varphi, k)$	$i[E(\varphi, k) - F(\varphi, k) - (\mathrm{tg}\,\varphi)\,\Delta(\varphi, k)]$
$\frac{1}{k'}$	$-ik'\,\mathrm{tg}\,\varphi$	$\frac{\Delta(\varphi, k)}{\cos\varphi}$	$-ik'F(\varphi, k)$	$\frac{i}{k'}[E(\varphi, k) - k'^2 F(\varphi, k) - (\mathrm{tg}\,\varphi)\,\Delta(\varphi, k)]$
$\frac{ik}{k'}$	$\frac{k'\sin\varphi}{\Delta(\varphi, k)}$	$\frac{\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)}$	$k'F(\varphi, k)$	$\frac{1}{k'}\left[E(\varphi, k) - k^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)}\right]$
$\frac{k'}{ik}$	$-\frac{ik\sin\varphi}{\Delta(\varphi, k)}$	$\frac{1}{\Delta(\varphi, k)}$	$-ikF(\varphi, k)$	$\frac{i}{k}\left[E(\varphi, k) - F(\varphi, k) - k^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)}\right]$
$\frac{1-k'}{1+k'}$	$\frac{(1+k')\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)}$	$\frac{\cos^2\varphi - k'\sin^2\varphi}{\Delta(\varphi, k)}$	$(1+k')F(\varphi, k)$	$\frac{2}{1+k'}[E(\varphi, k) + k'F(\varphi, k)] - (1-k')\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)}$

так что для действительных $k^2 < 1$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{K}(k) &= \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots\right], \\ \mathrm{E}(k) &= \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \ldots\right], \end{aligned}\right\} \quad (21.6\text{-}33)$$

где $F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция, определенная в п. 9.3-9.

(c) Преобразования. Нормальные эллиптические интегралы Лежандра (29) с модулями k, $1/k$, k', $1/k'$, ik/k', k'/ik, $(1-k')/(1+k')$, $2\sqrt{k}/(1+k)$ связаны соотношениями, приведенными в табл. 21.6-2, где

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta(\varphi, k) \quad (21.6\text{-}34)$$

(см. также п. 21.6-7, а). Табл. 21.6-3 содержит различные соотношения для полных нормальных эллиптических интегралов (30), а табл. 21.6-4 — значения этих интегралов.

Таблица 21.6-3

Преобразования полных эллиптических интегралов

$\dot{k}$	$\mathrm{K}(\dot{k})$	$\mathrm{K}'(\dot{k})$	$\mathrm{E}(\dot{k})$	$\mathrm{E}'(\dot{k})$
$\frac{1}{k}$	$k(\mathrm{K}+i\mathrm{K}')$	$k\mathrm{K}'$	$\frac{1}{k}[\mathrm{E}-k'^2\mathrm{K}-i(\mathrm{E}'-k^2\mathrm{K}')]$	$\frac{1}{k}\mathrm{E}'$
k'	K'	K	E'	E
$\frac{1}{k'}$	$k'(\mathrm{K}'+i\mathrm{K})$	$k'\mathrm{K}$	$\frac{1}{k'}[\mathrm{E}'-k^2\mathrm{K}'-i(\mathrm{E}-k'^2\mathrm{K})]$	$\frac{1}{k'}\mathrm{E}$
$\frac{ik}{k'}$	$k'\mathrm{K}$	$k'(\mathrm{K}'+i\mathrm{K})$	$\frac{1}{k'}\mathrm{E}$	$\frac{1}{k'}[\mathrm{E}'-k^2\mathrm{K}'-i(\mathrm{E}-k'^2\mathrm{K})]$
$\frac{k'}{ik}$	$k\mathrm{K}'$	$k(\mathrm{K}+i\mathrm{K}')$	$\frac{1}{k}\mathrm{E}'$	$\frac{1}{k}[\mathrm{E}-k'^2\mathrm{K}-i(\mathrm{E}'-k^2\mathrm{K}')]$
$\frac{1-k'}{1+k'}$	$\frac{1+k'}{2}\mathrm{K}$	$(1+k')\mathrm{K}'$	$\frac{\mathrm{E}+k'\mathrm{K}}{1+k'}$	$\frac{2\mathrm{E}'-k^2\mathrm{K}'}{1+k'}$
$\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$	$(1+k)\mathrm{K}$	$\frac{1+k}{2}\mathrm{K}'$	$\frac{2\mathrm{E}-k'^2\mathrm{K}}{1+k}$	$\frac{\mathrm{E}'+k\mathrm{K}'}{1+k}$

В частности,

$$\mathrm{K}(k) = \frac{2}{1+k'}\mathrm{K}\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right). \quad (21.6\text{-}35)$$

Положим в (35) последовательно

$$k'_0 = k', \quad k'_{n+1} = \frac{2\sqrt{k'_n}}{1+k'} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots) \quad (21.6\text{-}36)$$

Таблица 21.6-1

Полные эллиптические интегралы К и Е

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}},\qquad E=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx$$

$$k=\sin\alpha$$

α	K	E	α	K	E	α	K	E
0°	1,5708	1,5708	50°	1,9356	1,3055	81°	3,2553	1,0338
1	5709	5707	51	9539	2963	81,2	2771	0336
2	5713	5703	52	9729	2870	81,4	2995	0314
3	5719	5697	53	9927	2776	81,6	3223	0302
4	5727	5689	54	2,0133	2681	81,8	3458	0290
5	5738	5678	55	0347	2587	82,0	3699	0278
6	5751	5665	56	0571	2492	82,2	3946	0267
7	5767	5649	57	0804	2397	82,4	4199	0256
8	5785	5632	58	1047	2301	82,6	4460	0245
9	5805	5611	59	1300	2206	82,8	4728	0234
10	5828	5589	60	1565	2111	83,0	5004	0223
11	5854	5564	61	1842	2015	83,2	5288	0213
12	5882	5537	62	2132	1920	83,4	5581	0202
13	5913	5507	63	2435	1826	83,6	5884	0192
14	5946	5476	64	2754	1732	83,8	6196	0182
15	5981	5442	65	3088	1638	84,0	6519	0172
16	6020	5405	65,5	3261	1592	84,2	6852	0163
17	6061	5367	66,0	3439	1545	84,4	7198	0153
18	6105	5326	66,5	3622	1499	84,6	7557	0144
19	6151	5283	67,0	3809	1453	84,8	7930	0135
20	6200	5238	67,5	4001	1408	85,0	8317	0127
21	6252	5191	68,0	4198	1362	85,2	8721	0118
22	6307	5141	68,5	4401	1317	85,4	9142	0110
23	6365	5090	69,0	4610	1272	85,6	9583	0102
24	6426	5037	69,5	4825	1228	85,8	4,0044	0094
25	6490	4981	70,0	5046	1184	86,0	0528	0086
26	6557	4924	70,5	5273	1140	86,2	1037	0079
27	6627	4864	71,0	5507	1096	86,4	1574	0072
28	6701	4803	71,5	5749	1053	86,6	2142	0065
29	6777	4740	72,0	5998	1011	86,8	2744	0059
30	6858	4675	72,5	6256	0968	87,0	3387	0053
31	6941	4608	73,0	6521	0927	87,2	4073	0047
32	7028	4539	73.5	6796	0885	87,4	4811	0041
33	7119	4469	74,0	7081	0844	87,6	5609	0036
34	7214	4397	74,5	7375	0804	87,8	6477	0031
35	7312	4323	75,0	7681	0764	88,0	7427	0026
36	7415	4248	75,5	7998	0725	88,2	8478	0021
37	7522	4171	76,0	8327	0686	88,4	9654	0017
38	7633	4092	76,5	8669	0648	88,6	5,0988	0014
39	7748	4013	77,0	9026	0611	88,8	2527	0010
40	7868	3931	77,5	9397	0574	89,0	4349	0008
41	7992	3849	78,0	9786	0538	89,1	5402	0006
42	8122	3765	78,5	3,0192	0502	89,2	6579	0005
43	8256	3680	79,0	0617	0468	89,3	7914	0004
44	8396	3594	79,5	1064	0434	89,4	9455	0003
45	8541	3506	80,0	1534	0401	89,5	6,1278	0002
46	8691	3418	80,2	1729	0388	89,6	3509	0001
47	8848	3329	80,4	1928	0375	89,7	6385	0001
48	9011	3238	80,6	2132	0363	89,8	7,0440	0000
49	9180	3147	80,8	2340	0350	89,9	7371	0000

Так как при этом $k'_n \to 1$, то $(1-k'_n)/(1+k'_n) \to 0$; учитывая, что $\mathsf{K}(0)=\pi/2$, получим формулу

$$\mathsf{K}(k)=\frac{\pi}{2}\prod_{n=0}^{\infty}\frac{2}{1+k'_n}, \tag{21.6-37}$$

которую можно использовать для вычисления $\mathsf{K}(k)$.

21.6-7. Эллиптические функции Якоби.

(a) Определения. Обращение эллиптических интегралов $z=F(\varphi, k)$ и $z=\tilde{F}(w, k)$ (п. 21.6-6, а) порождает функции $\operatorname{am} z$ (**амплитуда** z) и $\operatorname{sn} z \equiv \equiv \sin(\operatorname{am} z)$ (**синус амплитуды** z), т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\varphi=\operatorname{am} z, \qquad z=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=F(\varphi, k),\\ &w=\operatorname{sn} z, \qquad z=\int_0^{w}\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}=\tilde{F}(w, k)\end{aligned}\right\} \tag{21.6-38}$$

Различные значения многозначного эллиптического интеграла $\tilde{F}(w, k)$ отличаются друг от друга на $4m\mathsf{K}+2ni\mathsf{K}'$, где $m, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Это значит, что обратная функция $\operatorname{sn} z$ — двоякопериодическая с периодами $4\mathsf{K}$ и $2i\mathsf{K}'$.

Функции $\operatorname{cn} z$ (**косинус амплитуды** z) и $\operatorname{dn} z$ (**дельта амплитуды** z) определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{cn} z=\cos(\operatorname{am} z)=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z} \qquad (\operatorname{cn} 0=1),\\ &\operatorname{dn} z=\Delta(k, \operatorname{am} z)=\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 z} \qquad (\operatorname{dn} 0=1).\end{aligned}\right\} \tag{21.6-39}$$

$\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$ называются **эллиптическими функциями Якоби**. Данное значение параметра k явно не участвует в обозначениях этих функций; когда это необходимо, будем писать $\operatorname{sn}(z, k)$, $\operatorname{cn}(z, k)$, $\operatorname{dn}(z, k)$. k', K, K', E и E' определены в п. 21.6-6, b. Эллиптические функции Якоби все действительны для действительных z и действительных k^2, заключенных между 0 и 1; на

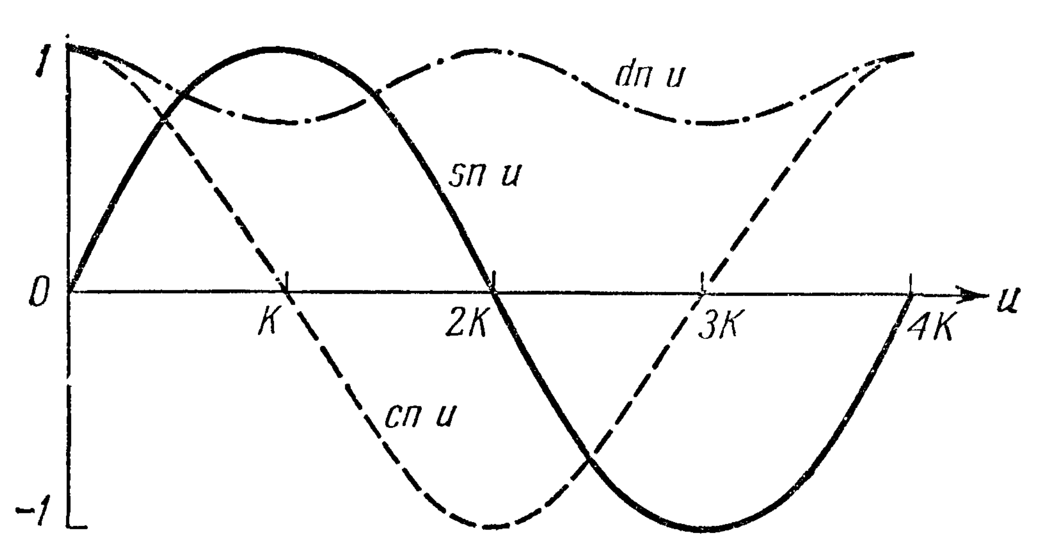


Рис. 21.6-4. Эллиптические функции Якоби $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ для $k^2=1/2$.

рис. 21.6-4 приведены графики эллиптических функций Якоби для $k^2=1/2$.

Эллиптические функции вырождаются, если $k^2=0$ или $k^2=1$; при этом один из периодов становится равным ∞:

$$\left.\begin{aligned} &k=0,\ \mathsf{K}=\frac{\pi}{2},\ \mathsf{K}'=\infty,\ \operatorname{sn}(z, 0)=\sin z,\ \operatorname{cn}(z, 0)=\cos z,\ \operatorname{dn}(z, 0)=1;\\ &k=1,\ \mathsf{K}=\infty,\ \mathsf{K}'=\frac{\pi}{2},\ \operatorname{sn}(z, 1)=\operatorname{th} z,\ \operatorname{cn}(z, 1)=\operatorname{dn}(z, 1)=\frac{1}{\operatorname{ch} z}.\end{aligned}\right\} \tag{21.6-40}$$

Эллиптические функции Якоби могут быть также определены в терминах $\wp$-, ζ-, σ- или θ-функций соотношениями п. 21.6-9.

(b) Различные свойства и специальные значения. Все эллиптические функции Якоби имеют порядок 2 (п. 26.1-1); их периоды, нули (простые) и полюсы (простые) приведены в табл. 21.6-5. $\operatorname{sn} z$ есть нечетная

Таблица 21.6-5

Периоды, нули, полюсы и вычеты эллиптических функций Якоби

Функция	Примитивные периоды	Нули	Полюсы	Вычеты
$\operatorname{sn}(z, k)$	$4\mathrm{K}$ $2i\mathrm{K}'$	$2m\mathrm{K}+2ni\mathrm{K}'$	$2m\mathrm{K}+(2n+1)i\mathrm{K}'$	$\dfrac{(-1)^m}{k}$
$\operatorname{cn}(z, k)$	$4\mathrm{K}$ $2\mathrm{K}+2i\mathrm{K}'$	$(2m+1)\mathrm{K}+2ni\mathrm{K}'$		$\dfrac{(-1)^{m+n}}{ik}$
$\operatorname{dn}(z, k)$	$2\mathrm{K}$ $4i\mathrm{K}'$	$(2m+1)\mathrm{K}+$ $+(2n+1)i\mathrm{K}'$		$(-1)^{n+1}i$

функция, а $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$ — четные функции от z. В табл. 21.6-6 приведены специальные значения функций. Табл. 21.6-7 показывает эффект изменения аргумента на четверть и половину периода; при этом используются удобные обозначения

$$\operatorname{sn}(z, k)=s, \quad \operatorname{cn}(z, k)=c, \quad \operatorname{dn}(z, k)=d \tag{21.6-41}$$

(например, $ks=k\operatorname{sn}(z, k)$).

Отметим еще соотношения:

$$\operatorname{sn}^2 z+\operatorname{cn}^2 z=k^2\operatorname{sn}^2 z+\operatorname{dn}^2 z=1, \quad \operatorname{dn}^2 z-k^2\operatorname{cn}^2 z=k'^2; \tag{21.6-42}$$

$$\operatorname{sn}(-z)=-\operatorname{sn} z, \quad \operatorname{cn}(-z)=\operatorname{cn} z, \quad \operatorname{dn}(-z)=\operatorname{dn} z; \tag{21.6-43}$$

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sn}(2\mathrm{K}-z)=\operatorname{sn} z, && \operatorname{sn}(2i\mathrm{K}'-z)=-\operatorname{sn} z,\\ &\operatorname{cn}(2\mathrm{K}-z)=-\operatorname{cn} z, && \operatorname{cn}(2i\mathrm{K}'-z)=-\operatorname{cn} z,\\ &\operatorname{dn}(2\mathrm{K}-z)=\operatorname{dn} z, && \operatorname{dn}(2i\mathrm{K}'-z)=-\operatorname{dn} z; \end{aligned}\right\} \tag{21.6-44}$$

$$\tilde{E}(\operatorname{sn} z, k)=\int_0^z \operatorname{dn}^2 z\,dz. \tag{21.6-45}$$

(c) Теоремы сложения:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(A+B)&=\frac{\operatorname{sn} A\operatorname{cn} B\operatorname{dn} B+\operatorname{sn} B\operatorname{cn} A\operatorname{dn} A}{1-k^2\operatorname{sn}^2 A\operatorname{sn}^2 B},\\ \operatorname{cn}(A+B)&=\frac{\operatorname{cn} A\operatorname{cn} B-\operatorname{sn} A\operatorname{dn} A\operatorname{sn} B\operatorname{dn} B}{1-k^2\operatorname{sn}^2 A\operatorname{sn}^2 B},\\ \operatorname{dn}(A+B)&=\frac{\operatorname{dn} A\operatorname{dn} B-k^2\operatorname{sn} A\operatorname{cn} A\operatorname{sn} B\operatorname{cn} B}{1-k^2\operatorname{sn}^2 A\operatorname{sn}^2 B}. \end{aligned}\right\} \tag{21.6-46}$$

(d) Дифференцирование:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(\operatorname{sn} z)}{dz}&=\operatorname{cn} z\operatorname{dn} z,\\ \frac{d(\operatorname{cn} z)}{dz}&=-\operatorname{sn} z\operatorname{dn} z,\\ \frac{d(\operatorname{dn} z)}{dz}&=-k^2\operatorname{sn} z\operatorname{cn} z. \end{aligned}\right\} \tag{21.6-47}$$

Таблица 21.6-6

Специальные значения эллиптических функций Якоби

$^1/_2 niK'$ \ $^1/_2 mK$	0	$^1/_2 K$	K	$^3/_2 K$
		sn $(^1/_2 mK + {}^1/_2 niK')$		
0	0	$(1+k')^{-1/2}$	1	$(1+k')^{-1/2}$
$^1/_2 iK'$	$ik^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2}\left[(1+k)^{1/2}+i(1-k)^{1/2}\right]$	$k^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2}\left[(1+k)^{1/2}-i(1-k)^{1/2}\right]$
iK'	∞	$(1-k')^{1/2}$	k^{-1}	$(1-k')^{-1/2}$
$^3/_2 iK'$	$-ik^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2}\left[(1+k)^{1/2}-i(1-k)^{1/2}\right]$	$k^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2}\left[(1+k)^{1/2}+i(1-k)^{1/2}\right]$
		cn $(^1/_2 mK + {}^1/_2 niK')$		
0	1	$k'^{1/2}(1+k')^{-1/2}$	0	$-k'^{1/2}(1+k')^{-1/2}$
$^1/_2 iK'$	$k^{-1/2}(1+k)^{1/2}$	$k'^{1/2}(2k)^{-1/2}(1-i)$	$-ik^{-1/2}(1-k)^{1/2}$	$-k'^{1/2}(2k)^{-1/2}(1+i)$
iK'	∞	$-ik'^{1/2}(1-k')^{-1/2}$	$-ik^{-1}k'$	$-ik'^{1/2}(1-k')^{-1/2}$
$^3/_2 iK'$	$-k^{-1/2}(1+k)^{1/2}$	$-k'^{1/2}(2k)^{-1/2}(1+i)$	$-ik^{-1/2}(1-k)^{1/2}$	$k'^{1/2}(2k)^{-1/2}(1-i)$
		dn $(^1/_2 mK + {}^1/_2 niK')$		
0	1	$k'^{1/2}$	k'	$k'^{1/2}$
$^1/_2 iK'$	$(1+k)^{1/2}$	$(^1/_2 k')^{1/2}\left[(1+k')^{1/2}-i(1-k')^{1/2}\right]$	$(1-k)^{1/2}$	$(^1/_2 k')^{1/2}\left[(1+k')^{1/2}+i(1-k')\right]^{1/2}$
iK'	∞	$-ik'^{1/2}$	0	$ik'^{1/2}$
$^3/_2 iK'$	$-(1+k)^{1/2}$	$-(^1/_2 k')^{1/2}\left[(1+k')^{1/2}+i(1-k')^{1/2}\right]$	$-(1-k)^{1/2}$	$-(^1/_2 k')^{1/2}\left[(1+k')^{1/2}-i(1-k')^{1/2}\right]$

Таблица 21.6-7

Изменение переменной на четверть и половину периода

$\mathrm{sn}\,(mK + niK' \pm z)$

niK' \ mK	$-K$	0	K	$2K$	$3K$
$-iK'$	$-d/(kc)$	$\pm 1/(ks)$	$d/(kc)$	$\mp 1/(ks)$	$-d/(kc)$
0	$-c/d$	$\pm s$	c/d	$\mp s$	$-c/d$
iK'	$-a/(kc)$	$\pm 1/(ks)$	$d/(kc)$	$\mp 1/(ks)$	$-d/(kc)$
$2iK'$	$-c/d$	$\pm s$	c/d	$\mp s$	$-c/d$

$\mathrm{cn}\,(mK + niK' \pm z)$

niK' \ mK	$-K$	0	K	$2K$	$3K$
$-iK'$	$-ik'/(kc)$	$\pm id/(ks)$	$ik'/(kc)$	$\mp id/(ks)$	$-ik'/(kc)$
0	$\pm k's/d$	c	$\mp k's/d$	$-c$	$\pm k's/d$
iK'	$ik'/(kc)$	$\mp id/(ks)$	$-ik'/(kc)$	$\pm id/(ks)$	$ik'/(kc)$
$2iK'$	$\mp k's/d$	$-c$	$\pm k's/d$	c	$\mp k's/d$

$\mathrm{dn}\,(mK + niK' \pm z)$

niK' \ mK	$-K$	0	K	$2K$
$-iK'$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$
0	k'/d	d	k'/d	d
iK'	$\pm ik's/c$	$\mp ic/s$	$\pm ik's/c$	$\mp ic/s$
$2iK'$	$-k'/d$	$-d$	$-k'/d$	$-d$
$3iK'$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$

(e) Преобразования. Табл. 21.6-8 показывает соотношения между эллиптическими функциями Якоби с модулями k и ik/k', k', $1/k$, $1/k'$, k'/ik (см. также п. 21.6-6, с).

(f) Разложения в ряды:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{sn} z = z-(1+k^2)\frac{z^3}{3!}+(1+14k^2+k^4)\frac{z^5}{5!}-\ldots,\\
&\operatorname{cn} z = 1-\frac{z^2}{2!}+(1+4k^2)\frac{z^4}{4!}-(1+44k^2+16k^4)\frac{z^6}{6!}+\ldots,\\
&\operatorname{dn} z = 1-k^2\frac{z^2}{2!}+k^2(4+k^2)\frac{z^4}{4!}-k^2(16+44k^2+k^4)\frac{z^6}{6!}+\ldots,\\
&|z|<\min(|\mathrm{K}'|,\ |2\mathrm{K}+i\mathrm{K}'|,\ |2\mathrm{K}-i\mathrm{K}'|).
\end{aligned}\right\} \qquad (21.6\text{-}48)$$

21.6-8. Тэта-функции Якоби.

(a) Даны комплексная переменная v и комплексный параметр $q=e^{i\pi\tau}$ такой, что τ имеет положительную мнимую часть. Четыре **тэта-функции**[1])

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta_1(v)=\vartheta_1(v\mid\tau)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)\pi v=\\
&\qquad = i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n-1/2)^2}(e^{i\pi v})^{2n-1},\\
&\vartheta_2(v)=\vartheta_2(v\mid\tau)=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+1/2)^2}\cos(2n+1)\pi v=\\
&\qquad = \sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{(n-1/2)^2}(e^{i\pi v})^{2n-1},\\
&\vartheta_3(v)=\vartheta_3(v\mid\tau)=1+2\sum_{n=0}^{\infty}q^{n^2}\cos 2n\pi v=\\
&\qquad = \sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}(e^{i\pi v})^{2n},\\
&\vartheta_4(v)=\vartheta_4(v\mid\tau)=1+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2n\pi v=\\
&\qquad = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(e^{i\pi v})^{2n}
\end{aligned}\right\} \qquad (21.6\text{-}49)$$

— все периодические целые функции от v соответственно с периодами 2, 2, 1, 1. Четыре тэта-функции (49) имеют нули соответственно в точках

$$v=m+n\tau,\quad m+n\tau+{}^1/_2,\quad m+(n+{}^1/_2)\tau+{}^1/_2,\quad m+(n+{}^1/_2)\tau,$$

где $m, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; эти нули позволяют представить тэта-функции в виде бесконечных произведений (7.6-2) [21.3].

---

[1]) Иногда $\vartheta_4(v)$ обозначают через $\vartheta_0(v)$ или $\vartheta(v)$.

Таблица 21.6-3

Преобразования первого порядка эллиптических функций Якоби

Преобразование	$\dot{z}$	$\dot{k}$	$\dot{k}'$	$\dot{K}$	$\dot{K}'$	$\mathrm{sn}(\dot{z}, \dot{k})$	$\mathrm{cn}(\dot{z}, \dot{k})$	$\mathrm{dn}(\dot{z}, \dot{k})$
A	$k'z$	$\frac{ik}{k'}$	$\frac{1}{k'}$	$k'K$	$k'(K'+iK)$	$k'\frac{\mathrm{sn}(z,k)}{\mathrm{dn}(z,k)}$	$\frac{\mathrm{cn}(z,k)}{\mathrm{dn}(z,k)}$	$\frac{1}{\mathrm{dn}(z,k)}$
B	$-iz$	k'	k	K'	K	$-i\frac{\mathrm{sn}(z,k)}{\mathrm{cn}(z,k)}$	$\frac{1}{\mathrm{cn}(z,k)}$	$\frac{\mathrm{dn}(z,k)}{\mathrm{cn}(z,k)}$
C	kz	$\frac{1}{k}$	$\frac{k'}{ik}$	$k(K+iK')$	kK'	$k\,\mathrm{sn}(z,k)$	$\mathrm{dn}(z,k)$	$\mathrm{cn}(z,k)$
D	$-ik'z$	$\frac{1}{k'}$	$\frac{k}{ik'}$	$k'(K'+iK)$	$k'K$	$-ik'\frac{\mathrm{sn}(z,k)}{\mathrm{cn}(z,k)}$	$\frac{\mathrm{dn}(z,k)}{\mathrm{cn}(z,k)}$	$\frac{1}{\mathrm{cn}(z,k)}$
E	$-ikz$	$\frac{k'}{ik}$	$\frac{1}{k}$	kK'	$k(K+iK')$	$-ik\frac{\mathrm{sn}(z,k)}{\mathrm{dn}(z,k)}$	$\frac{1}{\mathrm{dn}(z,k)}$	$\frac{\mathrm{cn}(z,k)}{\mathrm{dn}(z,k)}$

Тэта-функции *не являются* эллиптическими функциями. *Очень хорошая сходимость рядов* (49) *позволяет вычислять различные эллиптические функции и эллиптические интегралы с помощью соотношений* п. 21.6-9; тэта-функции являются решениями дифференциального уравнения с частными производными

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} - 4\pi i\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = 0, \tag{21.6-50}$$

которое связано с уравнением диффузии (п. 10.3-4, b).

(b) Отметим соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right) &= \vartheta_2(v), & \vartheta_2\left(v+\frac{1}{2}\right) &= -\vartheta_1(v),\\ \vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}\right) &= \vartheta_4(v), & \vartheta_4\left(v+\frac{1}{2}\right) &= \vartheta_3(v), \end{aligned}\right\} \tag{21.6-51}$$

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right) &= ie^{-i\pi\left(\frac{\tau}{4}+v\right)}\vartheta_4(v), & \vartheta_2\left(v+\frac{\tau}{2}\right) &= e^{-i\pi\left(\frac{\tau}{4}+v\right)}\vartheta_3(v),\\ \vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{2}\right) &= e^{-i\pi\left(\frac{\tau}{4}+v\right)}\vartheta_2(v), & \vartheta_4\left(v+\frac{\tau}{2}\right) &= ie^{-i\pi\left(\frac{\tau}{4}+v\right)}\vartheta_1(v). \end{aligned}\right\} \tag{21.6-52}$$

(c) Для отыскания $\vartheta_i\left(\frac{v}{c\tau+D}\,\middle|\,\frac{A\tau+B}{c\tau+D}\right)$ применяются формулы:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1(v\mid\tau+1) &= e^{i\pi/4}\vartheta_1(v\mid\tau), & \vartheta_2(v\mid\tau+1) &= e^{i\pi/4}\vartheta_2(v\mid\tau),\\ \vartheta_3(v\mid\tau+1) &= \vartheta_4(v\mid\tau), & \vartheta_4(v\mid\tau+1) &= \vartheta_3(v\mid\tau); \end{aligned}\right\} \tag{21.6-53}$$

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) &= \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\tau}{i}}\,e^{i\pi v^2/\tau}\vartheta_1(v\mid\tau),\\ \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}}\,e^{i\pi v^2/\tau}\vartheta_4(v\mid\tau),\\ \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}}\,e^{i\pi v^2/\tau}\vartheta_3(v\mid\tau),\\ \vartheta_4\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}}\,e^{i\pi v^2/\tau}\vartheta_2(v\mid\tau). \end{aligned}\right\} \tag{21.6-54}$$

(d) Значения четырех тэта-функций и их производных при $v=0$ для краткости обозначают так:

$$\vartheta_i(0)=\vartheta_i,\ \vartheta_i'(0)=\vartheta_i',\ \ldots\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Эти значения удовлетворяют соотношениям

$$\vartheta_1'=\pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4,\quad \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}=\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}+\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}+\frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4}. \tag{21.6-55}$$

21.6-9. Соотношения между эллиптическими функциями Якоби, Вейерштрасса и тэта-функциями. Если различные параметры, входящие в определения $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$, $\wp(z)$, $\zeta(z)$, $\sigma(z)$ и $\vartheta_i(z)$ (пп. 21.6-2, 21.6-3, 21.6-6 — 21.6-8), связаны соотношениями

$$k=\sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}=\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^2,\qquad k'=\sqrt{\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}}=\left(\frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\right)^2, \tag{21.6-56}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{K}=\frac{\omega_1}{2}\sqrt{e_1-e_3}=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2,\quad i\mathrm{K}'=\frac{\omega_2}{2}\sqrt{e_1-e_3}=\tau\mathrm{K},\\&\tau=\frac{i\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}=\frac{\omega_2}{\omega_1}\quad(\operatorname{Im}\tau>0)\end{aligned}\right\} \tag{21.6-57}$$

и

$$w=z\sqrt{e_1-e_3}=2\mathrm{K}v,\qquad v=\frac{z}{\omega_1}=\frac{w}{2\mathrm{K}}, \tag{21.6-58}$$

то

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn} w&=\sqrt{\frac{e_1-e_3}{\wp(z)-e_3}}=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)},\\\operatorname{cn} w&=\sqrt{\frac{\wp(z)-e_1}{\wp(z)-e_3}}=\frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)},\\\operatorname{dn} w&=\sqrt{\frac{\wp(z)-e_2}{\wp(z)-e_3}}=\frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)};\end{aligned}\right\} \tag{21.6-59}$$

$$\wp(z)=e_1+(e_1-e_3)\frac{\operatorname{cn}^2 w}{\operatorname{sn}^2 w}=e_2+(e_1-e_3)\frac{\operatorname{dn}^2 w}{\operatorname{sn}^2 w}=e_3+\frac{e_1-e_3}{\operatorname{sn}^2 w}. \tag{21.6-60}$$

21.7. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

21.7-1. Введение. Ортогональные многочлены, рассматриваемые в пп. 21.7-1— 21.7-8, являются специальными решениями линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка, связанных с гипергеометрическим уравнением (9.3-31) (многочлены Лежандра, Чебышева и Якоби) или с вырожденным гипергеометрическим дифференциальным уравнением (9.3-42) (многочлены Лагерра и Эрмита). Эти специальные решения порождаются специальными однородными краевыми условиями; каждый класс ортогональных многочленов есть последовательность собственных функций для проблемы собственных значений типа Штурма — Лиувилля. Для большинства приложений важны только действительные значения аргумента $z=x$ *).

Многочлены $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, … каждого типа определяются с точностью до постоянных множителей, которые обычно (но не всегда) выбираются так, что коэффициент при x^n в многочлене n-й степени $\psi_n(x)$ равен единице. Последовательные многочлены каждого типа могут быть определены

1) в терминах соответствующих *гипергеометрических рядов* (п. 9.3-9, а) или *вырожденных гипергеометрических рядов* (п. 9.3-10);
2) с помощью *рекуррентных формул*, получающихся из дифференциальных уравнений;

---

*) Ортогональные многочлены в комплексной области рассматриваются в [7.1], [21.3].

3) последовательным дифференцированием *производящей функции* $\Phi(x, s)$ (см. также п. 8.7-2);

4) процессом *ортогонализации Грама — Шмидта* степеней 1, x, x^2, ... с соответствующим весом $\gamma(x)$ на некотором интервале (п. 15.2-1, а, 15.2-5);

5) из *интегральных представлений* (п. 21.7-7), которые обычно связаны с интегральными преобразованиями решений дифференциальных уравнений или с коэффициентами рядов Тейлора или Лорана производящих функций.

В табл. 21.7-1 приведены основные соотношения для многочленов Лежандра, Чебышева, Лагерра и Эрмита. В табл. 21.7-2 приведены выражения для первых семи многочленов (многочлены Чебышева приведены в табл. 20.6-1); одновременно даны выражения для степеней x через многочлены Лежандра. Выражения для последующих многочленов см. в [21.4].

Подчеркнем, что единой системы нормировки ортогональных многочленов нет; поэтому необходима осторожность при пользовании разными источниками.

Разложения в ряды по ортогональным многочленам производятся в смысле п. 15.2-4 и дают важные приближения с минимальной соответственно определенной средней квадратической ошибкой (п. 15.2-6; см. также пп. 20.5-1, 20.6-3).

21.7-2. Действительные нули ортогональных многочленов. *Все нули каждого из ортогональных многочленов, рассмотренных в* пп. 21.7-1 — 21.7-8, *простые. Два последовательных нуля* $\psi_n(x)$ *разделяются одним нулем* $\psi_{n+1}(x)$ *и по меньшей мере одним нулем* $\psi_m(x)$ *для каждого* $m > n$. Таблицы нулей многочленов приведены в [21.4].

21.7-3. Функции Лежандра (см. также пп. 21.8-10, 21.8-11 и 21.8-13). Дифференциальному уравнению (*дифференциальному уравнению Лежандра*) и рекуррентным формулам для многочленов Лежандра (табл. 21.7-1) удовлетворяют не только **многочлены Лежандра первого рода** $P_n(z)$ (табл. 21.7-1), но также и **функции Лежандра второго рода** $Q_n(z)$; для $z = x$ и $-1 < x < 1$ они равны

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \qquad Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - 1,$$
$$Q_2(x) = \frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x, \ \dots \tag{21.7-1}$$

Более общо, метод п. 9.3-8, b позволяет получить линейно независимые решения $P_\alpha(z)$, $Q_\alpha(z)$ дифференциального уравнения Лежандра (*функции Лежандра первого и второго рода*) для нецелых положительных и отрицательных, а также для комплексных значений $n = \alpha$; решения для $n = \alpha$ и $n = -\alpha - 1$ тождественны.

21.7-4. Многочлены Чебышева первого и второго рода. Дифференциальному уравнению и рекуррентным формулам для многочленов Чебышева (табл. 21.7-1) удовлетворяют не только **многочлены Чебышева первого рода** (табл. 21.7-1)

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{21.7-2}$$

но также **функции Чебышева второго рода**

$$U_0(x) = \arcsin x,$$
$$U_n(x) = \sin(n \arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\frac{d}{dx}T_n(x) \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{21.7-3}$$

Функции $U_n(x)$ не являются многочленами от x; функции $\frac{1}{n+1}\frac{dT_{n+1}}{dx}$ есть многочлены; их обычно называют **многочленами Чебышева второго рода.** Отметим формулы

$$T_n(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\frac{d}{dx}U_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{21.7-4}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{U_n(x)\,U_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left\{\begin{matrix} 0 & \text{при } n \neq m \text{ или } n = m = 0, \\ \pi/2 & \text{при } n = m \neq 0. \end{matrix}\right\} \tag{21.7-5}$$

Таблица 21.7-4

Ортогональные многочлены Лежандра, Чебышева, Лагерра и Эрмита

(см. также пп. 21.7-1—21.7-7)

		Многочлены Лежандра $P_n(x)$ (рис. 21.7-1)	Многочлены Чебышева $T_n(x)$ (рис. 21.7-2)
1	Дифференциальное уравнение	$(1-x^2)\dfrac{d^2w}{dx^2}-2x\dfrac{dw}{dx}+n(n+1)w=0$	$(1-x^2)\dfrac{d^2w}{dx^2}-x\dfrac{dw}{dx}+n^2w=0$
2	Вес и интервал ортогонализации	$\gamma(x)=1,$ $a=-1,\quad b=1$	$\gamma(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $a=-1,\quad b=1$
3	Ортогональность и нормировка	$\int\limits_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=\begin{cases}0 & (m\neq n).\\ \dfrac{2}{2n+1} & (m=n)\end{cases}$	$\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{T_n(x)\,T_m(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}0 & (m\neq n),\\ \pi/2 & (m=n\neq 0),\\ \pi & (m=n=0)\end{cases}$
4	Явные выражения [1]) (см. 9.3-32)	$P_n(x)=F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \dfrac{1-x}{2}\right),$ $P_n(x)=$ $=2^{-n}\sum\limits_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\dfrac{(2n-2m)!}{m!\,(n-m)!\,(n-2m)!}x^{n-2m}$	$T_n(x)=F\left(n,\ -n;\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1-x}{2}\right),$ $T_n(x)=\cos(n\arccos x)=$ $=\dfrac{n}{2}\sum\limits_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\dfrac{(n-m-1)!}{m!\,(n-2m)!}(2x)^{n-2m}$
5	Рекуррентные формулы	$P_{n+1}(x)=\dfrac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\dfrac{n}{n+1}P_{n-1}(x)=$ $=xP_n(x)+\dfrac{x^2-1}{n+1}\dfrac{dP_n}{dx}$	$T_{n+1}(x)=2x\,T_n(x)-T_{n-1}(x)$

[1]) $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ равно $\dfrac{n}{2}$, если n — четное, и $\dfrac{n-1}{2}$, если n — нечетное.

Рис. 21.7-1. Многочлены Лежандра $P_n(x)$:
a) и b) как функции от x, c) как функции от $\vartheta = \arccos x$.

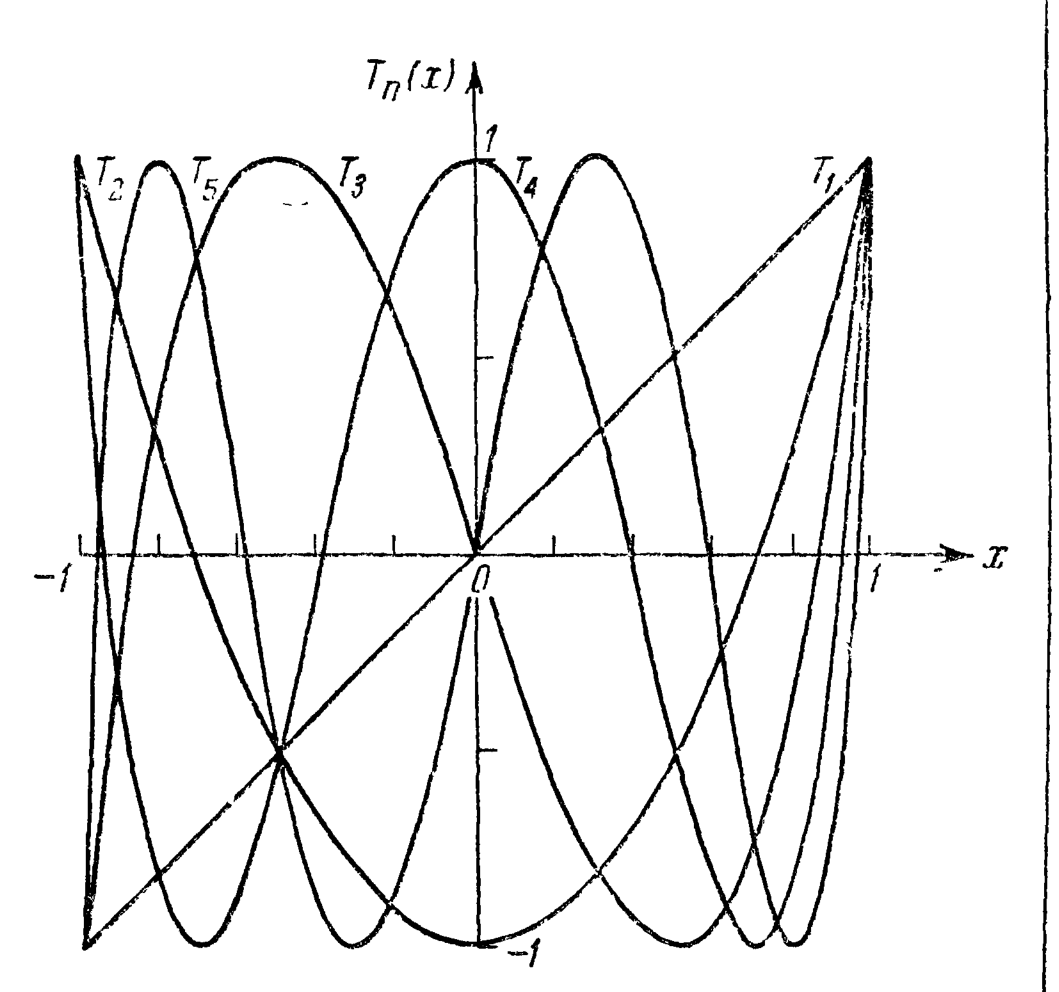


Рис. 21.7-2. Многочлены Чебышева $T_n(x)$.

		Многочлены Лежандра $P_n(x)$ (рис. 21.7-1)	Многочлены Чебышева $T_n(x)$ (рис. 21.7-2)
6	Обобщенная формула Родрига	$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$	$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-1/2}$
7	Производящая функция	$\frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}} = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x) s^n & (\lvert s\rvert < 1), \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x) s^{-n-1} & (\lvert s\rvert > 1) \end{cases}$	$\frac{1-sx}{1-2sx+s^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(x) s^n \quad (\lvert s\rvert < 1)$

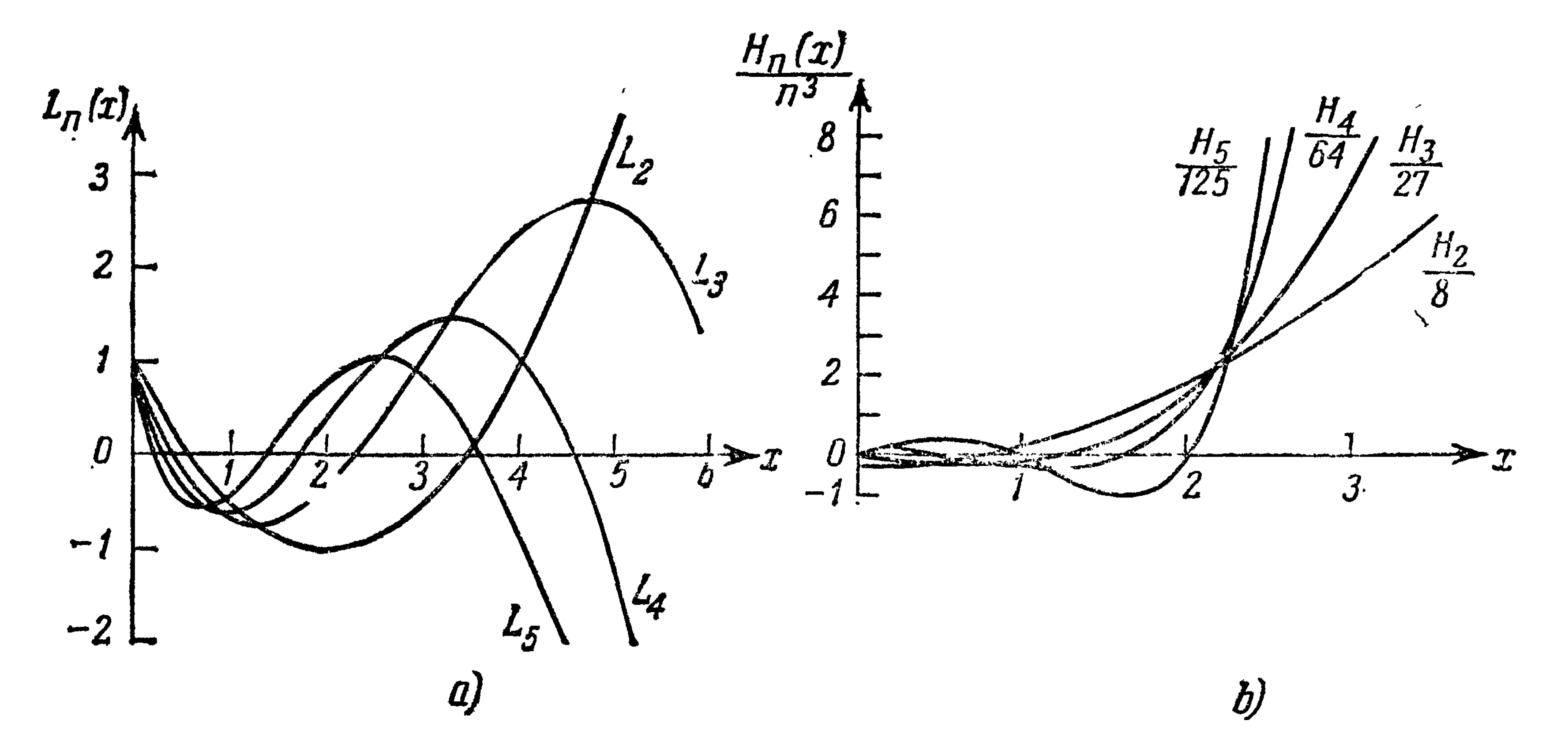


Рис. 21.7-3. *a*) Многочлены Лагерра, *b*) многочлены Эрмита.

Таблица 27.7-1 (*продолжение*)

		Многочлены Лагерра [1] $L_n(x)$ (рис. 21.7-3, *a*)	Многочлены Эрмита [2] $H_n(x)$ (рис. 21.7-3, *b*)
1	**Дифференциальное уравнение**	$x\frac{d^2w}{dx^2}+(1-x)\frac{dw}{dx}+nw=0$	$\frac{d^2w}{dx^2}-2x\frac{dw}{dx}+2nw=0$
2	**Вес и интервал ортогонализации**	$\gamma(x)=e^{-x}$ $a=0,\quad b=\infty$	$\gamma(x)=e^{-x^2}$, $a=-\infty,\quad b=\infty$
3	**Ортогональность и нормировка**	$\int\limits_0^\infty e^{-x}L_n(x)\,L_m(x)\,dx=\begin{cases}0 & (m\neq n),\\ (n!)^2 & (m=n)\end{cases}$	$\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2}H_n(x)\,H_m(x)\,dx=$ $=\begin{cases}0 & (m\neq n),\\ 2^n\,n!\,\sqrt{\pi} & (m=n)\end{cases}$

[1]) Иногда многочлены $\frac{1}{n!}L_n(x)$ обозначают через $L_n(x)$.

[2]) Иногда рассматривают многочлены $\mathrm{He}_n(x)=2^{-n/2}H_n(x/\sqrt{2})$, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2w}{dx^2}-x\frac{dw}{dx}+nw=0.$$

Таблица 21.7-1 (*продолжение*)

		Многочлены Лагерра $L_n(x)$ (рис. 21.7-3, *a*)	Многочлены Эрмита $H_n(x)$ (рис. 21.7-3, *b*)
4	Явные выражения (см. 9.3-43)	$L_n(x) = n!\,F(-n;\ 1;\ x)$, $L_n(x) = (n!)^2 \sum\limits_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{x^m}{(m!)^2\,(n-m)!}$	$n!\,H_{2n}(x) = (-1)^n\,(2n)!\,F\left(-n;\ \frac{1}{2};\ x^2\right)$, $n!\,H_{2n+1}(x) =$ $= (-1)^n\,(2n+1)!\,2x\,F\left(-n,\ \frac{3}{2};\ x^2\right)$, $H_n(x) = n! \sum\limits_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \frac{(2x)^{n-2m}}{m!\,(n-2m)!}$
5	Рекуррентные формулы	$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)\,L_n(x) - n^2\,L_{n-1}(x)$, $\frac{dL_{n+1}(x)}{dx} = (n+1)\left[\frac{dL_n(x)}{dx} - L_n(x)\right]$	$H_{n+1}(x) = 2x\,H_n(x) - 2n\,H_{n-1}(x)$, $\frac{dH_n(x)}{dx} = 2n\,H_{n-1}(x)$
6	Обобщенная формула Родрига	$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$	$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$
7	Производящая функция	$\frac{e^{-x\frac{s}{1-s}}}{1-s} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} L_n(x)\,\frac{s^n}{n!}\quad (0 \leqslant x \leqslant \infty)$	$e^{-s^2+2sx} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} H_n(x)\,\frac{s^n}{n!}$

Таблица 21.7-2

Первые ортогональные многочлены (см. также табл. 20.6-1)

$(P_0(x)=L_0(x)=H_0(x)=1)$

(a) Многочлены Лежандра $P_n(x)$

$P_1(x)=x$	$x^7=\frac{1}{429}(16P_7+88P_5+182P_3+143P_1)$
$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$	$x^6=\frac{1}{231}(16P_6+72P_4+110P_2+33P_0)$
$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$	$x^5=\frac{1}{63}(8P_5+28P_3+27P_1)$
$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$	$x^4=\frac{1}{35}(8P_4+20P_2+7P_0)$
$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$	$x^3=\frac{1}{5}(2P_3+3P_1)$
$P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$	$x^2=\frac{1}{3}(2P_2+P_0)$
$P_7(x)=\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x)$	$x=P_1$

(b) Многочлены Чебышева см. в табл. 20.6-1.

(c) Многочлены Лагерра $L_n(x)$

$L_1(x)=-x+1$
$L_2(x)=x^2-4x+2$
$L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6$
$L_4(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+24$
$L_5(x)=-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120$
$L_6(x)=x^6-36x^5+450x^4-2400x^3+5400x^2-4320x+720$
$L_7(x)=-x^7+49x^6-882x^5+7350x^4-29400x^3+52920x^2-35280x+5040$

(d) Многочлены Эрмита $H_n(x)$

$H_1(x)=2x$
$H_2(x)=4x^2-2$
$H_3(x)=8x^3-12x$
$H_4(x)=16x^4-48x^2+12$
$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$
$H_6(x)=64x^6-480x^4+720x^2-120$
$H_7(x)=128x^7-1344x^5+3360x^3-1680x$

21.7-5. Обобщенные многочлены и присоединенные функции Лагерра (см. также пп. 9.3-10 и 10.4-6).

(a) Обобщенные многочлены Лагерра степени $n-k$ и порядка k

$$L_n^k(x)=\frac{d^k}{dx^k}L_n(x)=(-1)^k n!\binom{n}{k}F(k-n;\ k+1;\ x) \qquad (21.7\text{-}6)$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots;\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $F(k-n;\ k+1;\ x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$x\frac{d^2w}{dx^2}+(k+1-x)\frac{dw}{dx}+(n-k)w=0 \qquad (21.7\text{-}7)$$

для целых значений $n=1, 2, \ldots$; $k=0, 1, 2, \ldots, n$. Уравнение (7) приводится к дифференциальному уравнению для многочленов Лагерра (табл. 21.7-1) при $k=0$. Производящая функция для обобщенных многочленов Лагерра

$$\left(\frac{s}{s-1}\right)^k \frac{e^{\frac{sx}{s-1}}}{1-s} = \sum_{n=k}^{\infty} L_n^k(x) \frac{s^n}{n!} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots). \tag{21.7-8}$$

Условия ортогональности и нормировки

$$\int_0^{\infty} x^k e^{-x} L_n^k(x)\, L_m^k(x)\, dx = \frac{(n!)^3}{(n-k)!}\, \delta_{n,m}. \tag{21.7-9}$$

*(b) Обобщенные многочлены Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ обычно определяются с помощью обобщенной формулы Родрига

$$L_n^{(\alpha)}(x) = e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+\alpha}).$$

Если $\alpha=k$ — целое число, то $L_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k}{(n+k)!} L_{n+k}^k(x)$, где $L_m^k(x)$ — многочлены, определенные формулой (6). (Часто $L_n^{(\alpha)}(x)$ называют просто многочленами Лагерра и обозначают $L_n^{\alpha}(x)$.)

Многочлены $L_n^{(\alpha)}(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$x\frac{d^2w}{dx^2} + (\alpha+1-x)\frac{dw}{dx} + nw = 0,$$

имеют явное выражение

$$L_n^{(\alpha)}(x) = n! \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{n+\alpha}{n-m} x^m$$

и производящую функцию $\dfrac{e^{x\frac{s}{s-1}}}{(1-s)^{\alpha+1}}$.

При $\alpha > -1$ многочлены $L_n^{(\alpha)}(x)$ ортогональны на интервале $(0, \infty)$ с весом $\gamma(x) = e^{-x}x^{\alpha}$; они нормированы: $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} \left[L_n^{(\alpha)}(x)\right]^2 dx = n!\,\Gamma(n+\alpha+1)$. *

(c) Функции $\psi_{nj}(x) = x^j e^{-x/2} L_{n+j}^{2j+1}(x)$ $(n=1, 2, \ldots; j=0, 1, 2, \ldots, n-1)$, которые часто называются **присоединенными функциями Лагерра**, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$x\frac{d^2w}{dx^2} + 2\frac{dw}{dx} + \left[n - \frac{x}{4} - \frac{j(j+1)}{x}\right] w = 0 \quad (n=1, 2, \ldots; j=0, 1, 2, \ldots, m-1) \tag{21.7-10}$$

и условию

$$\int_0^{\infty} \psi_{nj}^2(x)\, x^2\, dx = \frac{2n\,[(n+j)!]^3}{(n-j-1)!} \tag{21.7-11}$$

(см. также п. 10.4-6).

21.7-6. Функции Эрмита. Функции $\psi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, обычно называемые **функциями Эрмита**, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2w}{dx^2} + (2n+1-x^2)\, w = 0 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{21.7-12}$$

и условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)\, \psi_m(x)\, dx = 2^n n! \sqrt{\pi}\, \delta_{n,m}. \tag{21.7-13}$$

21.7-7. Некоторые интегральные формулы.

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos t)^n\,dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{21.7-14}$$

(*интеграл Лапласа*);

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(t^2-1)^n}{2^n (t-x)^{n+1}}\,dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{21.7-15}$$

(*интеграл Шлефли*),

контур интегрирования в формуле (15) окружает точку $z = x$;

$$H_n(x) = \sqrt{\frac{2^{n-1}}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (x\sqrt{2} + it)^n e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{21.7-16}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} x^k e^{-x}\left[L_n^k(x)\right]^2 dx = \frac{(n!)^3}{(n-k)!},\\
&\int_0^{\infty} x^{k+1} e^{-x}\left[L_n^k(x)\right]^2 dx = \frac{(n!)^3}{(n-k)!}(2n-k+1),\\
&\int_0^{\infty} x^{k+2} e^{-x}\left[L_n^k(x)\right]^2 dx = \frac{(n!)^2}{(n-k)!}(6n^2-6nk+k^2+6n-3k+2)\\
&\qquad (n = 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1);
\end{aligned}\right\} \tag{21.7-17}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\,dx = 2^{n-1} n!\sqrt{\pi}\,\delta_{n,m-1} + 2^n (n+1)!\sqrt{\pi}\,\delta_{n,m+1}. \tag{21.7-18}$$

21.7-8. Многочлены Якоби и Гегенбауэра.

(a) **Многочлены Якоби (гипергеометрические многочлены)** есть специальный случай гипергеометрических функций

$$\psi_n(x) = F(-n, \alpha+n; \gamma; x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha-\gamma+n}\right] \tag{21.7-19}$$

(п. 9.3-9); они удовлетворяют условиям ортогональности *)

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\psi_n(x)\psi_m(x)\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)\ldots(\alpha-\gamma+n)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\frac{n!}{\alpha+2n}\delta_{n,m}$$

$$(\operatorname{Re}\gamma > 0;\ \operatorname{Re}(\alpha-\gamma) > -1). \tag{21.7-20}$$

(b) **Функции**

$$C_n^{\alpha}(x) = \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\alpha)} F\left(n+2\alpha, -n;\ \alpha+\frac{1}{2};\ \frac{1-x}{2}\right) \tag{21.7-21}$$

называются **многочленами Гегенбауэра (ультрасферическими)**. Они представляют обобщение многочленов Лежандра (табл. 21.7-1), к которым и приводятся при $\alpha = {}^1/_2$. Многочлены Гегенбауэра удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(x^2-1)\frac{d^2w}{dx^2} + (2\alpha+1)x\frac{dw}{dx} - n(n+2\alpha)w = 0 \tag{21.7-22}$$

*) Многочлены, определенные формулой (21.7-19), ортогональны на интервале [0, 1]. Чаще рассматриваются многочлены Якоби, ортогональные на интервале [−1, 1]; одни сводятся к другим заменой переменной.

и условиям ортогональности

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\alpha-1/2}\, C_n^{\alpha}(x)\, C_m^{\alpha}(x)\, dx = \frac{\pi\,\Gamma(2\alpha+n)}{2^{2\alpha-1}(\alpha+n)\, n!\, [\Gamma(\alpha)]^2}\,\delta_{n,m}. \qquad (21.7\text{-}23)$$

Многочлены Гегенбауэра могут быть получены как коэффициенты разложения в степенной ряд производящей функции

$$(1-2sx+s^2)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\alpha}(x)\, s^n. \qquad (21.7\text{-}24)$$

21.8. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА И СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ

21.8-1. Функции Бесселя и другие цилиндрические функции.

(а) Цилиндрическая функция (круговая цилиндрическая функция) порядка m есть решение $w=Z_m(z)$ линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(1-\frac{m^2}{z^2}\right)w=0 \text{ (дифференциальное уравнение Бесселя)}, \qquad (21.8\text{-}1)$$

где m — действительное число; цилиндрические функции $Z_m(z)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$Z_{m+1}(z)=\frac{2m}{z}Z_m(z)-Z_{m-1}(z)=$$
$$=\frac{m}{z}Z_m(z)-\frac{d}{dz}Z_m(z)=-z^m\frac{d}{dz}[z^{-m}Z_m(z)]; \qquad (21.8\text{-}2)$$

при $m=0$ получим $Z_1(z)=-Z_0'(z)$. Функции $e^{kz}e^{\pm im\varphi}Z_m(K\rho)$ суть решения уравнения Лапласа в цилиндрических координатах ρ, φ, z (*цилиндрические гармоники*, п. 10.4-3, b). Цилиндрические функции нецелого порядка многозначны (п. 9.3-5, b); их главная ветвь определяется условием $|\arg z|<\pi$ (разрез от $z=0$ до $z=-\infty$; п. 7.4-2).

(b) Наиболее часто встречаются следующие цилиндрические функции порядка m:

$$J_m(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \qquad (|\arg z|<\pi)$$

(*функции Бесселя первого рода*); (21.8-3)

$$\left.\begin{aligned}
&N_m(z)=\frac{1}{\sin m\pi}[J_m(z)\cos m\pi-J_{-m}(z)] \qquad (m\neq 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),\\
&N_m(z)=(-1)^m N_{-m}(z)=\frac{2}{\pi}J_m(z)\left(\ln\frac{z}{2}+C\right)-\\
&\quad-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(m+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}+\sum_{j=1}^{m+k}\frac{1}{j}\right)-\\
&\quad-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\\
&\qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ |\arg z|<\pi)
\end{aligned}\right\} \qquad (21.8\text{-}4)$$

(*функции Бесселя второго рода* или *функции Неймана*);

$$H_m^{(1)}(z)=J_m(z)+i\,N_m(z), \qquad H_m^{(2)}(z)=J_m(z)-i\,N_m(z) \qquad (21.8\text{-}5)$$

(*функции Ганкеля первого и второго рода*).

В формуле (4) последнюю сумму следует считать равной нулю, если $m=0$; C — постоянная Эйлера—Маскерони (21.4-6). Важно отметить, что каждая функция Неймана имеет особенность в начале координат [1]).

На рис. 21.8-1 показаны графики функций Бесселя и Неймана ($m=0$, 1) для $z=x>0$.

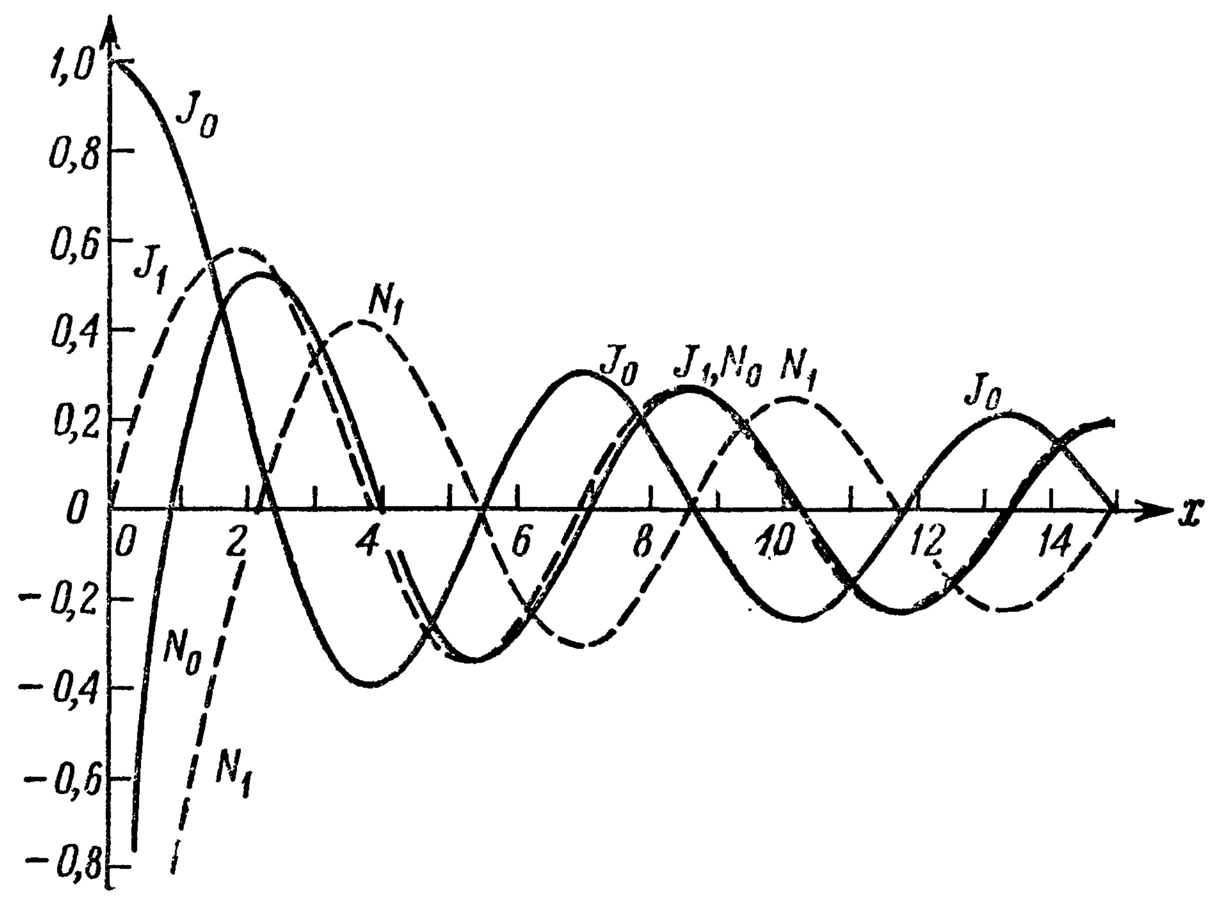


Рис. 21.8-1. Функции Бесселя и Неймана.

(c) Аналитическое продолжение. Значения цилиндрических функций для $|\arg z|>\pi$ получаются из формул

$$\left.\begin{aligned} &J_m(e^{in\pi}z)=e^{imn\pi}J_m(z),\\ &N_m(e^{in\pi}z)=e^{-imn\pi}\,N_m(z)+2i\,J_m(z)\sin mn\pi\operatorname{ctg} m\pi\\ &\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\end{aligned}\right\}\tag{21.8-6}$$

где $\sin mn\pi \operatorname{ctg} m\pi=(-1)^{mn}\,n$ для $m=\pm n$;

$$\left.\begin{aligned} H_m^{(1)}(e^{i\pi}z)&=-e^{-im\pi}H_m^{(2)}(z)=-H_{-m}^{(2)}(z),\\ H_m^{(2)}(e^{-i\pi}z)&=-e^{im\pi}H_m^{(1)}(z)=-H_{-m}^{(1)}(z).\end{aligned}\right\}\tag{21.8-7}$$

Цилиндрические функции целого порядка суть однозначные целые функции (п. 7.6-5).

(d) *Каждая цилиндрическая функция порядка m может быть представлена как линейная комбинация функций $J_m(z)$ и $N_m(z)$ или как линейная комбинация $H_m^{(1)}(z)$ и $H_m^{(2)}(z)$:*

$$Z_m(z)=a\,J_m(z)+b\,N_m(z)=\alpha\,H_m^{(1)}(z)+\beta\,H_m^{(2)}(z)\tag{21.8-8}$$

(*фундаментальная система*, п. 9.3-2). $J_m(z)$ и $J_{-m}(z)$ образуют фундаментальную систему, если m не равно целому числу ($m\neq 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$), так как при m целых

$$J_{-m}(z)=(-1)^m\,J_m(z).$$

---

[1]) Функции $N_m(z)$ обозначаются также через $Y_m(z)$; иногда вместо функций *Неймана* берут аналогичные им функции Вебера [21.3].

Вронскианы (п. 9.3-2) указанных систем равны

$$W\{J_m(z),\ N_m(z)\} = \frac{2}{\pi z},\qquad W\left\{H_m^{(1)}(z),\ H_m^{(2)}(z)\right\} = -\frac{4i}{\pi z},$$
$$W\{J_m(z),\ J_{-m}(z)\} = -\frac{2\sin m\pi}{\pi z}.$$

Первые два вронскиана не зависят от m. Отметим, что

$$J_m(z) = \frac{1}{2}\left[H_m^{(1)}(z) + H_m^{(2)}(z)\right],\qquad N_m(z) = \frac{1}{2i}\left[H_m^{(1)}(z) - H_m^{(2)}(z)\right], \tag{21.8-9}$$
$$J_{-m}(z) = \frac{1}{2}\left[e^{im\pi}H_m^{(1)}(z) + e^{-im\pi}H_m^{(2)}(z)\right]. \tag{21.8-10}$$

(e) Цилиндрические функции, порядок которых равен половине нечетного целого числа ($m = \pm\,^1/_2,\ \pm\,^3/_2,\ \ldots$), выражаются через элементарные функции (см. также п. 21.8-8):

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin z}{\sqrt{z}},\qquad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos z}{\sqrt{z}}; \tag{21.8-11}$$
$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{\cos z}{\sqrt{z}} + \frac{\sin z}{z\sqrt{z}}\right),\qquad J_{-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{\sin z}{\sqrt{z}} - \frac{\cos z}{z\sqrt{z}}\right); \tag{21.8-12}$$
$$J_{k+1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{k+1/2}\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k\frac{\sin z}{z}\qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots); \tag{21.8-13}$$
$$H_{1/2}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{i}\frac{e^{iz}}{\sqrt{z}},\qquad H_{-1/2}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}; \tag{21.8-14}$$
$$H_{1/2}^{(2)}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{i}\frac{e^{-iz}}{\sqrt{z}},\qquad H_{-1/2}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-iz}}{\sqrt{z}}. \tag{21.8-15}$$

21.8-2. Интегральные формулы (см. п. 8.6-4).

(а) Интегральные представления для $J_0(z),\ J_1(z),\ J_2(z),\ \ldots$

$$J_m(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(mt - z\sin t)\,dt\qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{21.8-16}$$

(*интегральная формула Бесселя*);

$$\left.\begin{aligned} J_{2m}(z) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(z\sin t)\cos 2mt\,dt,\\ J_{2m+1}(z) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(z\sin t)\sin(2m+1)t\,dt\end{aligned}\right\}\qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots); \tag{21.8-17}$$

$$J_m(z) = \frac{(-i)^m}{\pi}\int_0^\pi e^{iz\cos t}\cos mt\,dt\qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots); \tag{21.8-18}$$

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^m \oint t^{-m-1}e^{t - \frac{z^2}{4t}}\,dt\qquad (|\arg z| < \pi;\quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{21.8-19}$$

(*интеграл Сонина — Шлефли*),

где контур интегрирования начинается в точке $t = \infty$, идет по отрицательной

части действительной оси, окружает в положительном направлении начало координат и возвращается по отрицательной части действительной оси в бесконечность.

(b) Формулы Зоммерфельда и Пуассона. Комплексный интеграл (рис. 21.8-2)

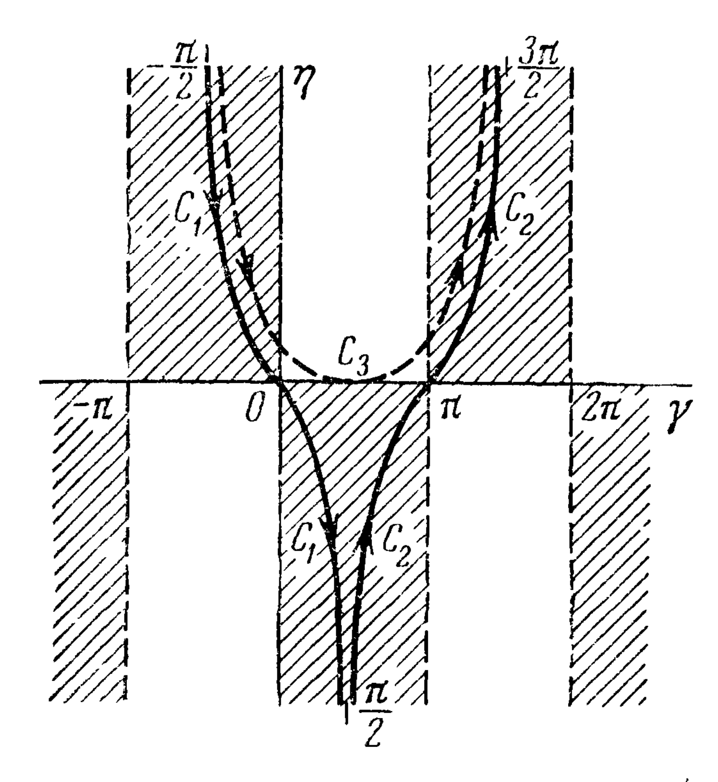


Рис. 21.8-2. Контуры интегрирования для интегралов Зоммерфельда; $t = \gamma + i\eta$.

$$Z_m(z) = \frac{e^{-im\pi/2}}{\pi} \int_C e^{i(z\cos t + mt)}\, dt \qquad (21.8\text{-}20)$$

(*интеграл Зоммерфельда*)

равен $H_m^{(1)}(z)$ для контура C_1, $H_m^{(2)}(z)$ для контура C_2 и $2J_m(z)$ для контура C_3. Эти контуры могут быть деформированы при условии, что начало и конец каждого из них стремятся к точке $t = \infty$ в указанных заштрихованных областях; $t = 0$ и $t = \pi$ могут быть использованы как седловые точки (точки перевала) для C_1 и C_2 при вычислении $Z_m(z)$ для больших значений z (см. также п. 21.8-9).

Отметим еще формулу

$$J_m(z) = \frac{2(z/2)^m}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+{}^1/_2)} \int_0^{\pi/2} \cos(z\cos t)\sin^{2m} t\, dt \qquad (m > -{}^1/_2) \qquad (21.8\text{-}21)$$

(*интегральная формула Пуассона*).

(c) Некоторые интегральные формулы, содержащие цилиндрические функции (см. также п. 21.8-4, c).

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^x J_m(\alpha x) J_m(\beta x)\, x\, dx = \\
&\quad = \frac{x}{\alpha^2-\beta^2}\left[\alpha J_m(\beta x) J_{m+1}(\alpha x) - \beta J_m(\alpha x) J_{m+1}(\beta x)\right] = \\
&\quad = \frac{x}{\alpha^2-\beta^2}\left[\beta J_{m-1}(\beta x) J_m(\alpha x) - \alpha J_{m-1}(\alpha x) J_m(\beta x)\right] \quad (\alpha^2-\beta^2 \neq 0); \\
&\int_0^x [J_m(\alpha x)]^2\, x\, dx = \frac{x^2}{2}\left[J_m'(\alpha x)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{m^2}{\alpha^2}\right)[J_m(\alpha x)]^2 \quad (m > -1) \\
&\qquad\qquad (\textit{интегралы Ломмеля});
\end{aligned}\right\} \qquad (21.8\text{-}22)$$

$$\int_0^\infty x^{-m+n} J_m(\alpha x)\, dx = 2^{n-m}\alpha^{m-n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(m - \frac{n-1}{2}\right)} \qquad (-1 < n < 2m+1). \qquad (21.8\text{-}23)$$

21.8-3. Нули цилиндрических функций.

(a) *Все нули цилиндрических функций простые, за исключением, быть может, $z = 0$. Последовательные положительные или отрицательные действительные нули двух линейно независимых действительных цилиндрических функций порядка m перемежаются; $z = 0$ есть единственный возможный общий нуль.*

(b) (См. также рис. 21.8-3). *Функция $J_m(z)$ имеет бесконечное число действительных нулей; для $m > -1$ все ее нули действительны. Для $m = 0$, ${}^1/_2$, 1, ${}^3/_2$, 2, ... и $n = 1$, 2, ..., $J_m(z)$ и $J_{m+n}(z)$ не имеют общих нулей.*

Для $m = 1$, 2, ... последовательные положительные или отрицательные действительные нули $J_m(z)$ разделяются единственными действительными нулями $J_{m+1}(z)$ и единственными действительными нулями $J_m'(z)$.

21.8-4. Функции Бесселя целого порядка.

(a) Производящая функция. Функции Бесселя неотрицательного целого порядка $m=0, 1, 2, \ldots$ — все однозначные целые функции от z. Они могут быть получены как коэффициенты разложения в ряд Лорана (п. 7.5-3) **производящей функции** (см. также п. 8.7-2)

$$e^{\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}=J_0(z)+\sum_{m=1}^{\infty}[s^m+(-s)^{-m}]\,J_m(z), \qquad (21.8\text{-}24)$$

или как коэффициенты рядов Фурье

$$\left.\begin{aligned}\cos(z\sin t)&=J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(z)\cos 2kt,\\ \sin(z\sin t)&=2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k-1}(z)\sin(2k-1)\,t;\end{aligned}\right\} \qquad (21.8\text{-}25\,a)$$

$$e^{\pm iz\sin t}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(z)\,e^{\pm imt}=$$

$$=J_0(z)+\sum_{k=1}^{\infty}[J_{2k}(z)\cos 2kt\pm iJ_{2k-1}(z)\sin(2k-1)\,t]. \qquad (21.8\text{-}25b)$$

Отметим еще формулы

$$1=J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(z)=J_0^2(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_k^2(z), \qquad (21.8\text{-}26)$$

$$z^n=2^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+2k)\,(n+k-1)!}{k!}\,J_{2k+n}(z) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (21.8\text{-}27)$$

(b) Графики функций Бесселя. Для действительного $z=x$ функции $J_0(z)$, $J_1(z)$, $J_2(z), \ldots$ все действительны; рис. 21.8-3 иллюстрирует их

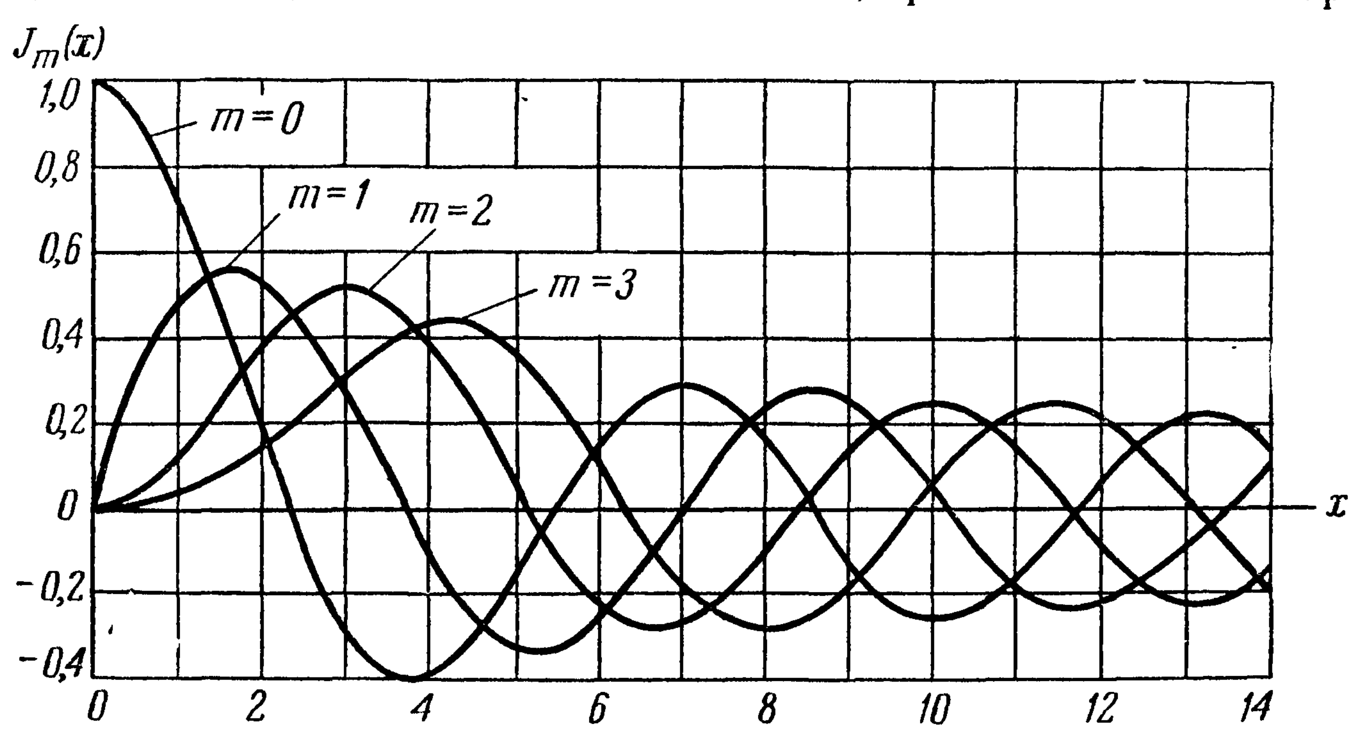


Рис. 21.8-3. Графики функций Бесселя $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$, $J_3(x)$ для действительного аргумента. Заметим, что $J_m(-x)=(-1)^m J_m(x)$.

нули, максимумы и минимумы и их асимптотическое поведение при $x\to\infty$ (см. также пп. 21.8-3 и 21.8-9).

(c) Условия ортогональности (см. также пп. 15.2-3 и 21.8-2, c). Если μ_i и μ_k — два нуля функции $J_m(z)$ (необходимо действительные), то имеют место условия ортогональности

$$\int_0^1 J_m(\mu_i x)\, J_m(\mu_k x)\, x\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k \\ \frac{1}{2}\left[J'_m(\mu_i)\right]^2 = \frac{1}{2}\left[J_{m+1}(\mu_i)\right]^2, & \text{если } i = k. \end{cases} \tag{21.8-28}$$

*(d) Ряды Фурье — Бесселя. При достаточно общих условиях функцию $f(x)$ можно разложить в ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_m(\mu_k x) \quad (\textit{ряд Фурье — Бесселя}), \tag{21.8-29}$$

где $\mu_1, \mu_2, \ldots$ — положительные нули функции $J_m(z)$, расположенные в порядке их возрастания, а коэффициенты a_k равны

$$a_k = \frac{2}{\left[J_{m+1}(\mu_k)\right]^2} \int_0^1 t f(t)\, J_m(\mu_k t)\, dt.$$

Разложение (29) имеет место для любого действительного $m > -{}^1/_2$, если $f(x)$ кусочно-непрерывна и имеет ограниченную вариацию в (0, 1), и интеграл $\int_0^1 \sqrt{x}\, |f(x)|\, dx$ существует. В точках разрыва функции $f(x)$ сумма ряда (29) принимает значение ${}^1/_2\,[f(x-0)+f(x+0)]$.*

21.8-5. Решение дифференциальных уравнений при помощи функций Бесселя и связанных с ними функций. Линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1-2a}{z}\frac{dw}{dz} + \left[(bcz^{c-1})^2 + \frac{a^2 - m^2c^2}{z^2}\right] w = 0 \tag{21.8-30}$$

имеет решение вида

$$w = z^a Z_m(bz^c). \tag{21.8-31}$$

Многие специальные случаи уравнения (30) представляют значительный интерес (пп. 21.8-6 — 21.8-8; см. [9.4]).

21.8-6. Модифицированные функции Бесселя и Ганкеля. Модифицированные цилиндрические функции порядка m:

$$\left.\begin{aligned} I_m(z) &= i^{-m} J_m(iz) \quad (\textit{модифицированные функции Бесселя}), \\ K_m(z) &= \frac{\pi}{2} i^{m+1} H_m^{(1)}(iz) \quad (\textit{модифицированные функции Ганкеля}) \end{aligned}\right\} \tag{21.8-32}$$

определяются с помощью формул (3) — (5); определения могут быть расширены с помощью формул (6) и (7). Функции (32) суть линейно независимые решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} - \left(1 + \frac{m^2}{z^2}\right) w = 0 \tag{21.8-33}$$

(*модифицированное дифференциальное уравнение Бесселя*)

(см. также п. 10.4-3, b) и удовлетворяют рекуррентным формулам

$$\left.\begin{aligned} I_{m+1}(z) &= I_{m-1}(z) - \frac{2m}{z} I_m(z) = 2\frac{d}{dz} I_m(z) - I_{m-1}(z), \\ K_{m+1}(z) &= K_{m-1}(z) + \frac{2m}{z} K_m(z) = -2\frac{d}{dz} K_m(z) - K_{m-1}(z); \end{aligned}\right\} \tag{21.8-34}$$

$I_m(z)$ и $K_m(z)$ — действительные монотонные функции для $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и действительных z (см. рис. 21.8-4).

21.8-7. Функции $\mathrm{ber}_m z$, $\mathrm{bei}_m z$, $\mathrm{her}_m z$, $\mathrm{hei}_m z$, $\mathrm{ker}_m z$, $\mathrm{kei}_m z$. Функции $\mathrm{ber}_m z$, $\mathrm{bei}_m z$, $\mathrm{her}_m z$, $\mathrm{hei}_m z$, $\mathrm{ker}_m z$, $\mathrm{kei}_m z$ определяются соотношениями

$$\left.\begin{aligned} J_m\left(i^{\pm 3/2}z\right) &= \mathrm{ber}_m z \pm i\,\mathrm{bei}_m z, \\ H_m^{(1)}\left(i^{3/2}z\right) &= \mathrm{her}_m z + i\,\mathrm{hei}_m z, \end{aligned}\right\} \qquad (21.8\text{-}35)$$

$$i^{\mp m}K_m\left(i^{\pm 1/2}z\right) = \mathrm{ker}_m z \pm i\,\mathrm{kei}_m z. \qquad (21.8\text{-}36)$$

Все эти функции действительны для действительных значений z. На рис. 21.8-5 показаны их графики. Индекс m не пишется, если $m=0$, например, $\mathrm{ber}_0 z = \mathrm{ber}\, z$.

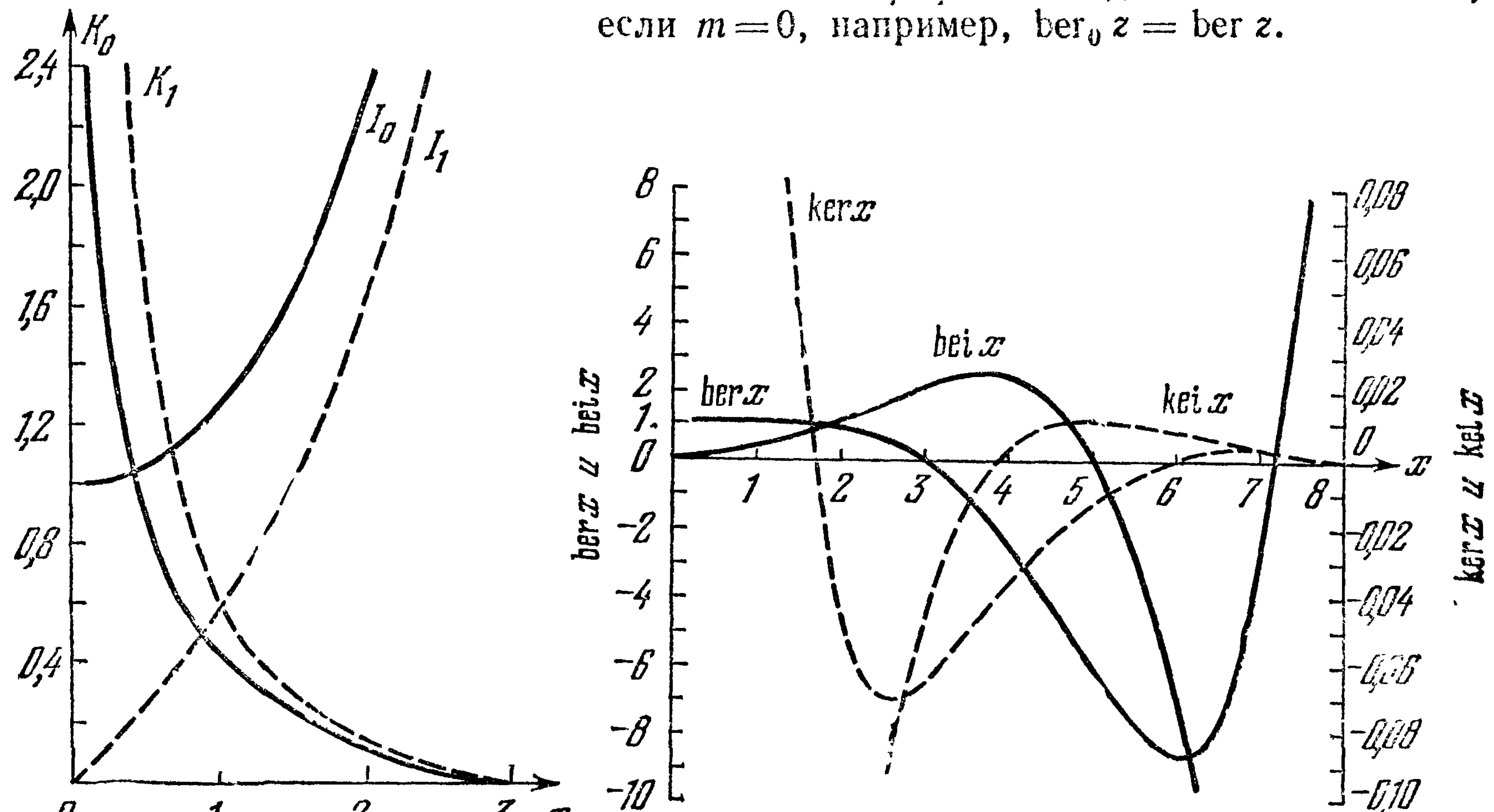


Рис. 21.8-4. Модифицированные функции Бесселя и Ганкеля.

Рис. 21.8-5. Графики функций ber x, bei x, ker x и kei x.

Заметим, что $\mathrm{ker}_m z = -\frac{\pi}{2}\mathrm{hei}_m z$, $\mathrm{kei}_m z = \frac{\pi}{2}\mathrm{her}_m z$, ber z, bei z, her z и hei z, так же как $J_0\left(i^{\pm 3/2} z\right)$ и $H_0^{(1)}\left(i^{3/2} z\right)$, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{2}\frac{dw}{dz} - iw = 0. \qquad (21.8\text{-}37)$$

Имеют место разложения

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{ber}\, z &= 1 - \frac{(z/2)^4}{(2!)^2} + \frac{(z/2)^8}{(4!)^2} - \ldots = 1 - \frac{z^4}{2^2 4^2} + \frac{z^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} \mp \ldots, \\ \mathrm{bei}\, z &= \left(\frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{(z/2)^6}{(3!)^2} + \ldots = \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} \pm \ldots; \end{aligned}\right\} \qquad (21.8\text{-}38)$$

Во многих приложениях удобно вводить $\left|J_m\left(i^{3/2} z\right)\right|$, $\left|K_m\left(i^{3/2} z\right)\right|$, $\arg J_m\left(i^{3/2} z\right)$ и $\arg\left[i^{-m} K_m\left(i^{3/2} z\right)\right]$ как специальные функции вместо или одновременно с $\mathrm{ber}_m z$, $\mathrm{bei}_m z$, $\mathrm{ker}_m z$ и $\mathrm{kei}_m z$. Все эти функции действительны для действительных значений z.

21.8-8. Сферические функции Бесселя. Сферические функции Бесселя первого, второго, третьего и четвертого рода

$$\left.\begin{aligned} j_j(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, J_{j+1/2}(z), & n_j(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, N_{j+1/2}(z), \\ h_j^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, H^{(1)}_{j+1/2}(z), & h_j^{(2)}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, H^{(2)}_{j+1/2}(z) \end{aligned}\right\} \qquad (21.8\text{-}39)$$

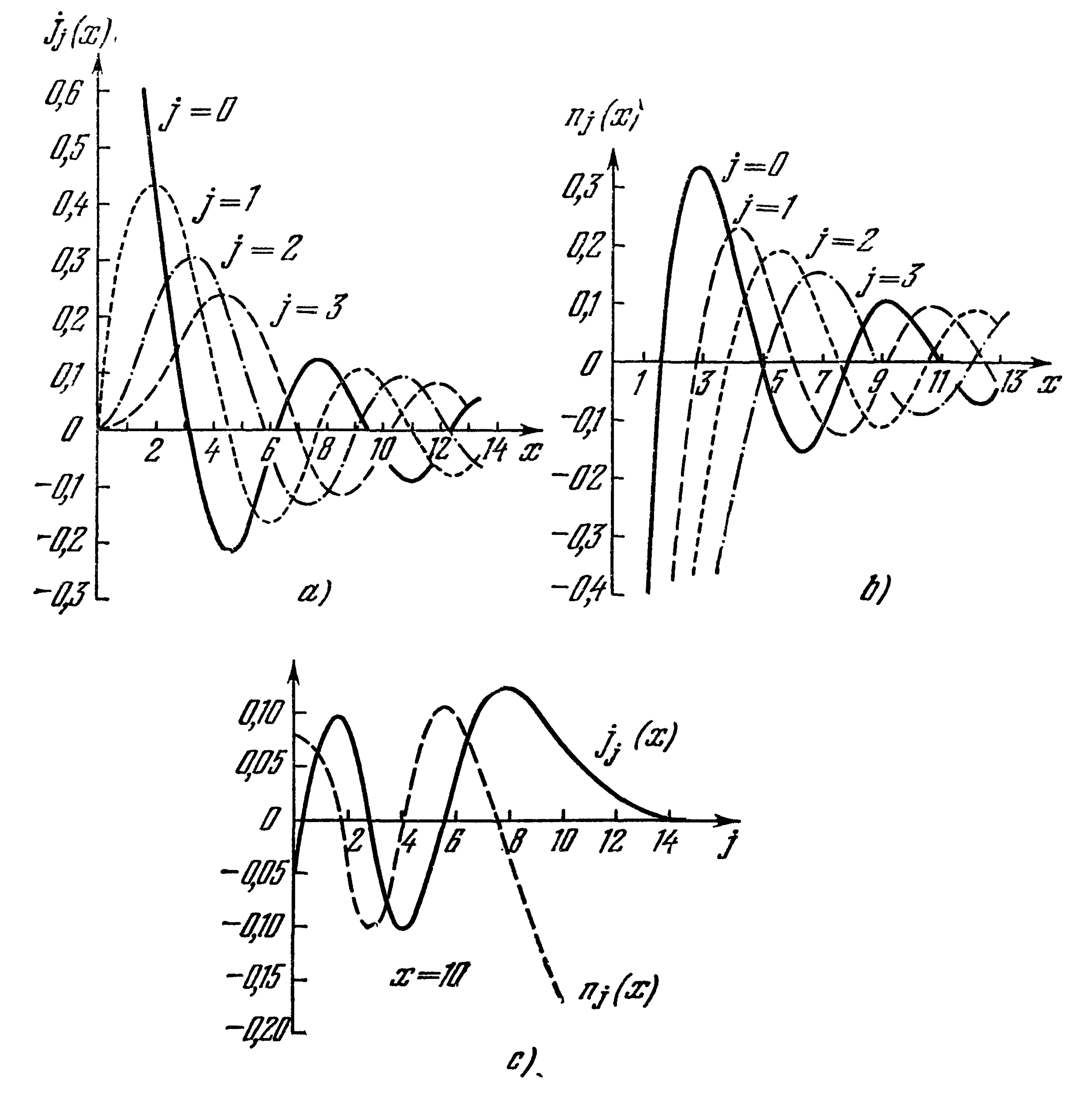


Рис. 21.8-6. Сферические функции Бесселя.

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{dw}{dz} - \left[1 - \frac{j(j+1)}{z^2}\right] w = 0 \qquad (21.8\text{-}40)$$

(см. также п. 10.4-4, с) и рекуррентным формулам

$$w_{j+1}(z) = \frac{2j+1}{z}\, w_j(z) - w_{j-1}(z) = -z^j \frac{d}{dz}\left[z^{-j} w_j(z)\right]. \qquad (21.8\text{-}40)$$

Для целых значений j сферические функции Бесселя суть элементарные трансцендентные функции (см. также п. 21.8-1):

$$\left.\begin{aligned} j_0(z)&=\frac{\sin z}{z}, \quad h_0^{(1)}(z)=-\frac{ie^{iz}}{z}, \quad h_0^{(2)}(z)=\frac{ie^{-iz}}{z},\\ j_{-1}(z)&=\frac{\cos z}{z}, \quad h_{-1}^{(1)}(z)=\frac{e^{iz}}{z}, \quad h_{-1}^{(2)}(z)=\frac{e^{-iz}}{z},\end{aligned}\right\} \qquad (21.8\text{-}42)$$

$$j_j(z)=z^j\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^j\frac{\sin z}{z}, \qquad n_j(z)=(-1)^{j+1}j_{-j-1}(z). \qquad (21.8\text{-}43)$$

Графики функций $j_j(z)$ и $n_j(z)$ для $z=x>0$ показаны на рис. 21.8-6 *а*) и *б*); на рис. *с*) показана зависимость $j_j(x)$ и $n_j(x)$ от индекса j при $x=10$.

21.8-9. Асимптотические разложения цилиндрических функций и сферических функций Бесселя для больших значений $|z|$ (см. также пп. 4.4-3, 4.8-6). При $z\to\infty$

$$\left.\begin{aligned} J_m(z)&\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[A_m(z)\cos\left(z-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\right.\\ &\qquad\left.-B_m(z)\sin\left(z-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right],\\ N_m(z)&\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[A_m(z)\sin\left(z-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\right.\\ &\qquad\left.+B_m(z)\cos\left(z-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\end{aligned}\right\} (|\arg z|<\pi), \quad (21.8\text{-}44)$$

где $A_m(z)$ и $B_m(z)$ имеют асимптотические разложения

$$\left.\begin{aligned} A_m(z)&=1-\frac{(4m^2-1)(4m^2-9)}{2!(8z)^2}+\\ &\qquad+\frac{(4m^2-1)(4m^2-9)(4m^2-25)(4m^2-49)}{4!(8z)^4}\mp\ldots\\ B_m(z)&=\frac{4m^2-1}{8z}-\frac{(4m^2-1)(4m^2-9)(4m^2-25)}{3!(8z)^3}\pm\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (21.8\text{-}45)$$

Подставляя разложения (44) и (45) в формулы (5), получим соответствующие асимптотические разложения для $H_m^{(1)}(z)$ и $H_m^{(2)}(z)$. Из разложений (44) и (45) следует, что для $|z|\gg m$ при $z\to\infty$

$$\left.\begin{aligned} J_m(z)&\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right), \quad H_m^{(1)}(z)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i\left(z-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)},\\ N_m(z)&\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right), \quad H_m^{(2)}(z)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i\left(z-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)};\end{aligned}\right\} \qquad (21.8\text{-}46)$$

$$J_{m+1/2}(z)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{m\pi}{2}\right) \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (21.8\text{-}47)$$

$$\left.\begin{aligned} j_j(z)&\approx\frac{1}{z}\cos\left(z-\frac{j+1}{2}\pi\right), \qquad n_j(z)\approx\frac{1}{z}\sin\left(z-\frac{j+1}{2}\pi\right),\\ h_j^{(1)}(z)&\approx\frac{1}{z}(-i)^{j+1}e^{iz}, \qquad h_j^{(2)}(z)\approx\frac{1}{z}i^{j+1}e^{-iz}.\end{aligned}\right\} \qquad (21.8\text{-}48)$$

21.8-10. Присоединенные функции и многочлены Лежандра.

(а) Присоединенные функции Лежандра степени j и порядка m есть решения дифференциального уравнения

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+\left[j(j+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0, \qquad (21.8\text{-}49)$$

где j и m — действительные или комплексные числа; уравнение (49) приводится к дифференциальному уравнению Лежандра (табл. 21.7-1 и 21.7-3) для $m=0$. Общая теория присоединенных функций Лежандра содержится в [21.3]. Во многих важных приложениях (пп. 10.4-3, с и 21.8-12) j и m — *действительные целые числа*, а $z=x$ — *действительное число, заключенное между* -1 *и* 1;

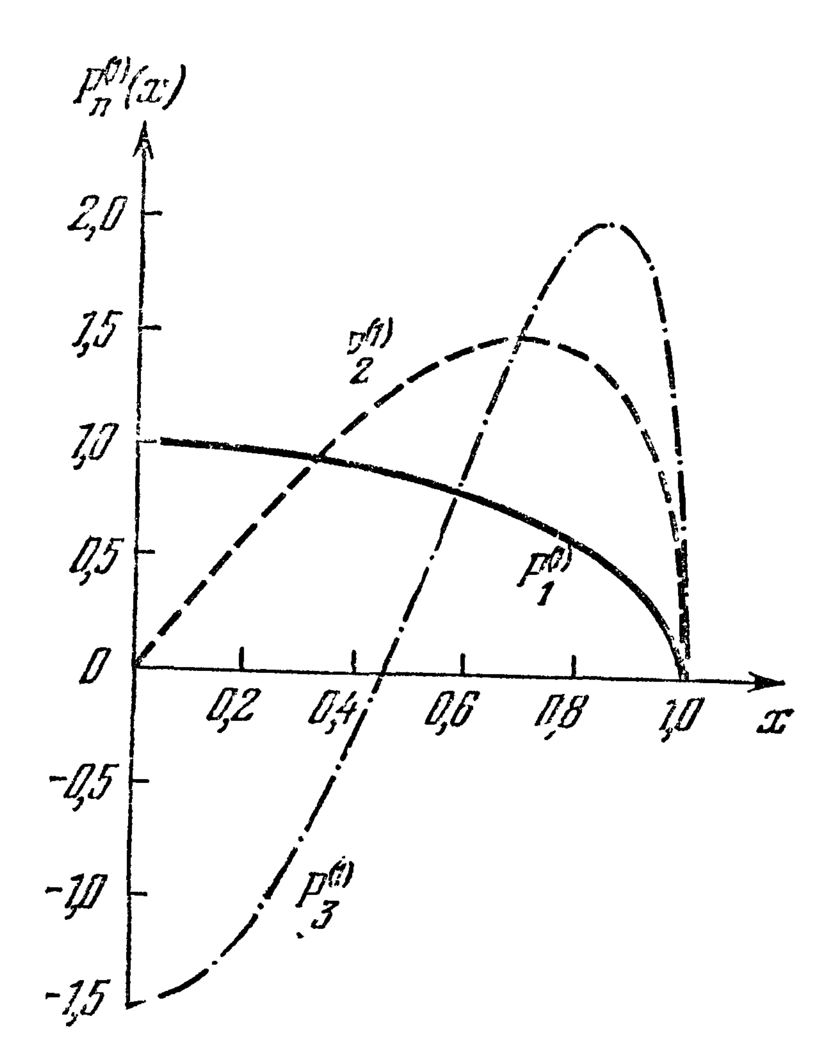


Рис. 21.8-7. Присоединенные функции Лежандра $P_1^{(1)}(x)$, $P_2^{(1)}(x)$, $P_3^{(1)}(x)$.

положим $x=\cos\theta$. При этих условиях уравнению (49) удовлетворяют **присоединенные функции Лежандра первого рода**

$$P_j^{(m)}(z)=\frac{1}{2^m}\frac{(j+m)!}{(j-m)!\,m!}(1-x^2)^{m/2}F\left(m-j,\ m+j+1;\ m+1;\ \frac{1-x}{2}\right)=$$
$$=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_j(x)=\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^j\,j!}\frac{d^{j+m}}{dx^{j+m}}(x^2-1)^j=$$
$$=(-1)^{j+m}P_j^m(-x)\qquad(-1\leqslant x\leqslant 1),\tag{21.8-50}$$
$$j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\qquad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ j$$

(см. также п. 9.3-9), причем $P_j^0(x)=P_j(x)$ и $P_j^m(x)=0$ для $m>j$. В частности,

$$P_1^1(x)=\sqrt{1-x^2}=\sin\theta,\tag{21.8-51}$$

$$\left.\begin{aligned}P_2^1(x)&=3x\sqrt{1-x^2}={}^3/_2\sin 2\theta,\\ P_2^2(x)&=3(1-x^2)={}^3/_2(1-\cos 2\theta),\end{aligned}\right\}\tag{21.8-52}$$

$$\left.\begin{aligned}P_3^1(x)&={}^3/_2(5x^2-1)\sqrt{1-x^2}={}^3/_8(\sin\theta+5\sin 3\theta),\\ P_3^2(x)&=15x(1-x^2)={}^{15}/_4\cos\theta(\cos\theta-\cos 3\theta),\\ P_3^3(x)&=15(1-x^2)\sqrt{1-x^2}={}^{15}/_4(3\sin\theta-\sin 3\theta),\end{aligned}\right\}\tag{21.8-53}$$

$$P_j^j(x)=1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2j-1)(1-x^2)^{j/2}=1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2j-1)\sin^j\theta$$
$$(j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\tag{21.8-54}$$

где $\cos\theta = x$ (см. также п. 21.8-12). Соответствующие графики показаны на рис. 21.8-7.

(b) Присоединенные функции Лежандра, определенные формулами (50), удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям $(-1 < x < 1)$:

$$(2j+1)\,x\,P_j^m(x) - (j-m+1)\,P_{j+1}^m(x) - (j+m)\,P_{j-1}^m(x) = 0 \qquad (0 \leqslant m \leqslant j-1); \quad (21.8\text{-}55)$$

$$(x^2-1)\frac{d}{dx}P_j^m(x) - (j-m+1)\,P_{j+1}^m(x) + (j+1)\,x\,P_j^m(x) = 0 \qquad (0 \leqslant m \leqslant j); \quad (21.8\text{-}56)$$

$$P_j^{m+2}(x) - 2(m+1)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}P_j^{m+1}(x) + [j(j+1) - m(m+1)]\,P_j^m(x) = 0 \qquad (0 \leqslant m \leqslant j-2); \quad (21.8\text{-}57)$$

$$P_{j+1}^m(x) - P_{j-1}^m(x) = (2j+1)\sqrt{1-x^2}\,P_j^{m-1}(x) \qquad (0 \leqslant m \leqslant j-1); \quad (21.8\text{-}58)$$

$$(j+m)(j+m+1)\,P_{j-1}^m(x) - (j-m)(j-m+1)\,P_{j+1}^m(x) = (2j+1)\sqrt{1-x^2}\,P_j^{m+1}(x) \qquad (0 \leqslant m < j-1). \quad (21.8\text{-}59)$$

(c) Асимптотическое поведение. При $j \to \infty$

$$P_j^m(\cos\theta) = (-j)^m\sqrt{\frac{2}{\pi j\sin\theta}}\cos\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right] + O(j^{-3/2}) \qquad (0 < \theta < \pi). \quad (21.8\text{-}60)$$

21.8-11. Интегральные свойства присоединенных функций Лежандра (см. также п. 21.7-7).

$$P_j^m(x) = (-1)^{m/2}\frac{(j+m)!}{j!\,\pi}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos t)^j \cos mt\,dt$$

$$(j = 0, 1, 2, \ldots;\ m = 0, 1, 2, \ldots, j) \text{ (интегральная формула Гейне)}; \quad (21.8\text{-}61)$$

$$\int_{-1}^{1} P_j^m(x)\,P_r^m(x)\,dx = \frac{2}{2j+1}\frac{(j+m)!}{(j-m)!}\delta_{j,r} \qquad (j, r = 0, 1, 2, \ldots;\ m = 0, 1, 2, \ldots); \quad (21.8\text{-}62)$$

$$\int_0^1 \left[P_j^m(x)\right]^2 dx = \frac{1}{2j+1}\frac{(j+m)!}{(j-m)!}, \qquad \int_0^1 \frac{\left[P_j^m(x)\right]^2}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2m}\frac{(j+m)!}{(j-m)!}$$

$$(j = 0, 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots, j) \quad (21.8\text{-}63)$$

21.8-12. Сферические гармоники. Ортогональность (см. также пп. 10.4-3, с, 14.10-7, b и 15.2-6).

(a) Решения $\Phi(r, \theta, \varphi)$ уравнения Лапласа в сферических координатах (10.4-15) называются **сферическими гармониками. Сферические поверхностные гармоники степени** j суть решения дифференциального уравнения с частными производными

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + j(j+1)\,Y = 0, \quad (21.8\text{-}64)$$

полученного разделением переменных в уравнении (10.4-15). Если потребовать, чтобы решения были регулярны при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и удовлетворяли условию $Y_j(\theta, \varphi+2\pi) = Y_j(\theta, \varphi)$, то мы приходим к проблеме собственных

значений (п. 15.4-5), допускающей решения только при целых значениях j. Можно не касаться отрицательных значений j, так как $-j-1$ и j дают одинаковые значения $j(j+1)$. Действительные собственные функции

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{\frac{2j+1}{2\pi}\frac{(j-m)!}{(j+m)!}}\,P_j^m(\cos\theta)\cos m\varphi,\\ &\sqrt{\frac{2j+1}{2\pi}\frac{(j-m)!}{(j+m)!}}\,P_j^m(\sin\theta)\sin m\varphi\\ &(j=0,\ 1,\ 2,\ \dots;\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ j)\end{aligned}\right\} \tag{21.8-65}$$

называются **тессеральными сферическими гармониками** степени j и порядка m; они периодичны на поверхности сферы и меняют знак вдоль узловых линий

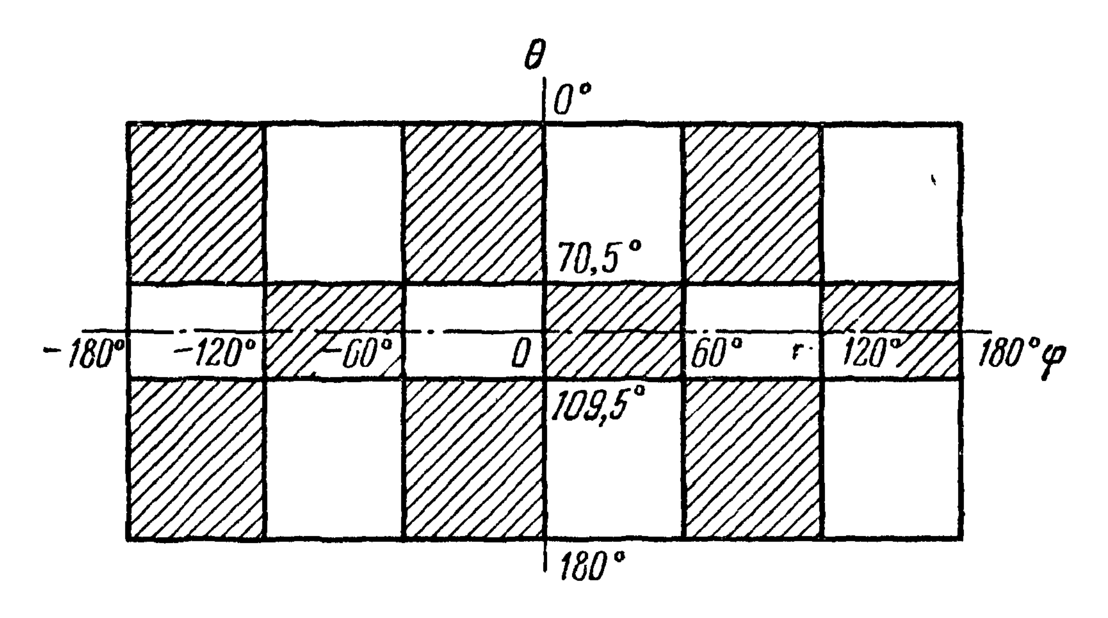


Рис. 21.8-8. Узлы функций $P_5^3(\cos\theta)\sin 3\varphi$ на развернутой поверхности сферы. Функция отрицательная в заштрихованной части.

$\theta=\text{const}$ и $\varphi=\text{const}$ (рис. 21.8-8); на самих этих линиях они равны нулю. При $m=j$ функции (65) называются **секториальными сферическими гармониками** и при $m=0$ — **зональными сферическими гармониками.** Обе функции (65) и более часто встречающиеся комплексные функции

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2j+1}{\pi}\frac{(j-|m|)!}{(j+|m|)!}}\,P_j^{|m|}(\cos\theta)\,e^{im\varphi}$$
$$(j=0,\ 1,\ 2,\ \dots;\ m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots,\ \pm j) \tag{21.8-66}$$

образуют ортонормированную последовательность собственных функций в смысле скалярного произведения

$$(f,\ h)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\overline{f(\theta,\ \varphi)}\,h(\theta,\ \varphi)\sin\theta\,d\theta \tag{21.8-67}$$

(п. 15.4-6, b). $(f,\ h)=0$ для каждой пары функций (65) или функций (66), если $f\neq h$; если же $f=h$, то скалярное произведение равно единице: $(f,\ f)=1$. Существует $2j+1$ линейно независимых сферических поверхностных гармоник степени j.

(b) Каждая дважды дифференцируемая действительная функция

$$\Phi(\theta,\ \varphi)\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi),\ \Phi(\theta,\ \varphi+2\pi)=\Phi(\theta,\ \varphi),$$

определенная на поверхности сферы, допускает разложение в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$\Phi(\theta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \alpha_{j0} P_j(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{j} P_j^m(\cos\theta)(\alpha_{jm}\cos m\varphi + \beta_{jm}\sin m\varphi) \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \sum_{m=-j}^{j} \gamma_{im} P_j^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}, \qquad (21.8\text{-}68a)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{jm} &= \frac{2j+1}{2\pi}\frac{(j-m)!}{(j+m)!}\int_0^{2\pi} d\varphi \cos m\varphi \int_0^{\pi} \Phi(\theta, \varphi) P_j^m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta, \\ \beta_{jm} &= \frac{2j+1}{2\pi}\frac{(j-m)!}{(j+m)!}\int_0^{2\pi} d\varphi \sin m\varphi \int_0^{\pi} \Phi(\theta, \varphi) P_j^m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta, \\ \gamma_{jm} &= \bar{\gamma}_{j,-m} = \frac{1}{2}(\alpha_{jm} - i\beta_{jm}) = \\ &= \frac{2j+1}{4\pi}\frac{(j-m)!}{(j+m)!}\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{im\varphi} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta, \varphi) P_j^m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta, \\ &(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ j). \end{aligned}\right\} \qquad (21.8\text{-}68b)$$

Разложения вида (68) физически интерпретируются как разложения потенциалов по мультиполям (пп. 15.6-5, а и с).

21.8-13. Теоремы сложения.

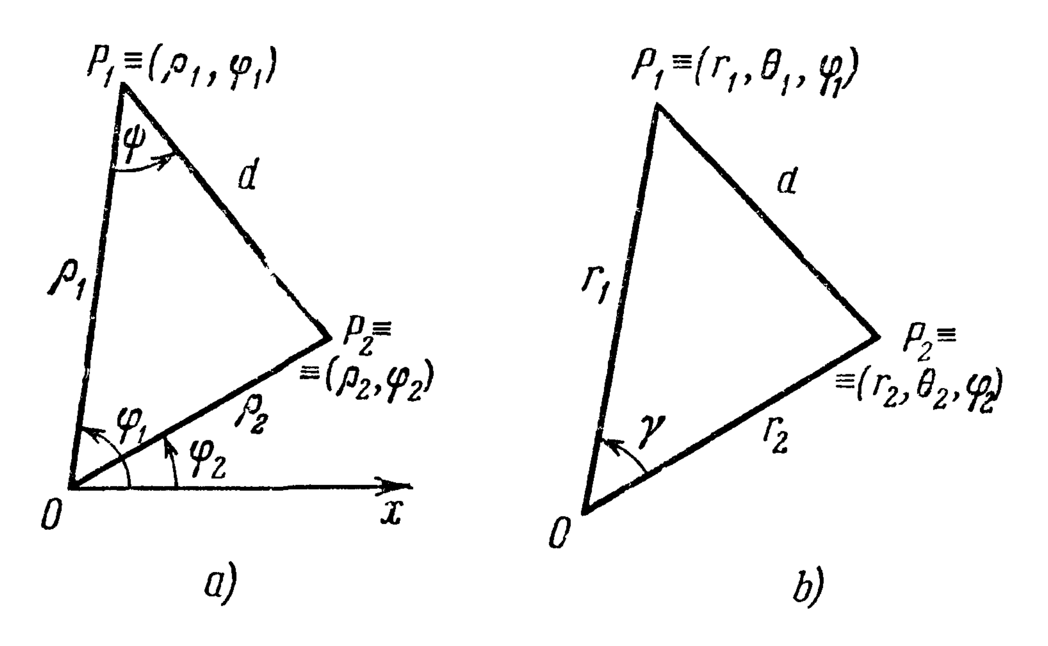


Рис. 21.8-9. Геометрическая иллюстрация к теоремам сложения.

(а) Теоремы сложения для цилиндрических функций. Пусть P_1 и P_2 — две точки плоскости с полярными координатами (ρ_1, φ_1), (ρ_2, φ_2). Согласно рис. 21.8-9, *а* пусть $\rho_1 > \rho_2$, так что $0 \leqslant |\psi| < \frac{\pi}{2}$ и

$$\left.\begin{aligned} d^2 &= \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\ e^{2i\varphi} &= \frac{\rho_1 - \rho_2 e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}}{\rho_1 - \rho_2 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}}. \end{aligned}\right\} \qquad (21.8\text{-}69)$$

Тогда для каждой цилиндрической функции $Z_m(z)$, удовлетворяющей

уравнению (1),

$$Z_m(\alpha d)\,e^{im\psi}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_{m+k}(\alpha\rho_1)\,J_k(\alpha\rho_2)\,e^{ik(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{21.8-70}$$

(*теорема сложения для цилиндрических функций*),

где α — произвольное комплексное число. В частности, если $\varphi_1-\varphi_2=\pi$, то

$$Z_m[\alpha(\rho_1+\rho_2)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k(\alpha\rho_1)\,J_{m-k}(\alpha\rho_2). \tag{21.8-71}$$

(b) **Теоремы сложения для сферических функций Бесселя и многочленов Лежандра.** Пусть P_1 и P_2 — две точки пространства со сферическими координатами $(r_1,\ \theta_1,\ \varphi_1)$, $(r_2,\ \theta_2,\ \varphi_2)$. Согласно рис. 21.8-4, *b* пусть $\theta_1+\theta_2<\pi$; тогда

$$\left.\begin{aligned} d^2&=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\gamma,\\ \cos\gamma&=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\end{aligned}\right\} \tag{21.8-72}$$

и

$$\left.\begin{aligned} j_0(\alpha d)&=\frac{\sin\alpha d}{\alpha d}=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\,j_k(\alpha r_1)\,j_k(\alpha r_2)\,P_k(\cos\gamma),\\ h_0^{(1)}(\alpha d)&=\frac{e^{i\alpha d}}{i\alpha d}=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\,h_k^{(1)}(\alpha r_1)\,j_k(\alpha r_2)\,P_k(\cos\gamma)\ (r_1>r_2)\end{aligned}\right\} \tag{21.8-73}$$

(*теорема сложения для сферических функций Бесселя порядка нуль*).

$$P_j(\cos\gamma)=P_j(\cos\theta_1)\,P_j(\cos\theta_2)+ \\ +2\sum_{m=1}^{j}\frac{(j-m)!}{(j+m)!}P_j^m(\cos\theta_1)\,P_j^m(\cos\theta_2)\cos m(\varphi_1-\varphi_2) \tag{21.8-74}$$

(*теорема сложения для многочленов Лежандра*).

21.9. СТУПЕНЧАТЫЕ ФУНКЦИИ И СИМВОЛИЧЕСКИЕ ИМПУЛЬСНЫЕ ФУНКЦИИ

21.9-1. Ступенчатые функции (см. также пп. 4.6-17, с, 18.3-1 и 20.4-6).

(а) **Ступенчатой функцией** действительной переменной x называется функция, которая изменяет свои значения только в дискретной последовательности точек разрыва (необходимо первого рода, п. 4.4-7, b). Значения функции в точках разрыва могут быть как определены, так и не определены. Наиболее часто применяются ступенчатые функции [1])

$$\left.\begin{aligned} U(x)&=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1/2 & \text{при } x=0,\\ 1 & \text{при } x>0\end{cases} \quad (\textit{симметричная единичная функция}),\\ U_-(x)&=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ 1 \text{ при } x\geqslant 0,\end{cases}\\ U_+(x)&=\begin{cases}0 \text{ при } x\leqslant 0,\\ 1 \text{ при } x>0\end{cases} \quad (\textit{асимметричные единичные функции})\end{aligned}\right\} \tag{21.9-1}$$

(см. также рис. 21.9-1).

[1]) Система обозначений различных единичных функций не является общепринятой; поэтому необходима осторожность при пользовании разными источниками.

Заметим, что

$$U(0-0)=0, \quad U(0+0)=1, \quad U(e^x)=1; \tag{21.9-2}$$

$$U[(x-a)(x-b)]=U[x-\max(a, b)]+U[\min(a, b)-x]. \tag{21.9-3}$$

Каждая ступенчатая функция может быть представлена (за исключением, возможно, ее значений в точках разрыва $x=x_k$) как сумма вида

$$\sum_k a_k U(x-x_k), \qquad \sum_k a_k U_-(x-x_k) \quad \text{или} \quad \sum_k a_k U_+(x-x_k).$$

(Примеры: $\operatorname{sgn} x = 2U(x)-1$; функции скачков в п. 20.4-5).

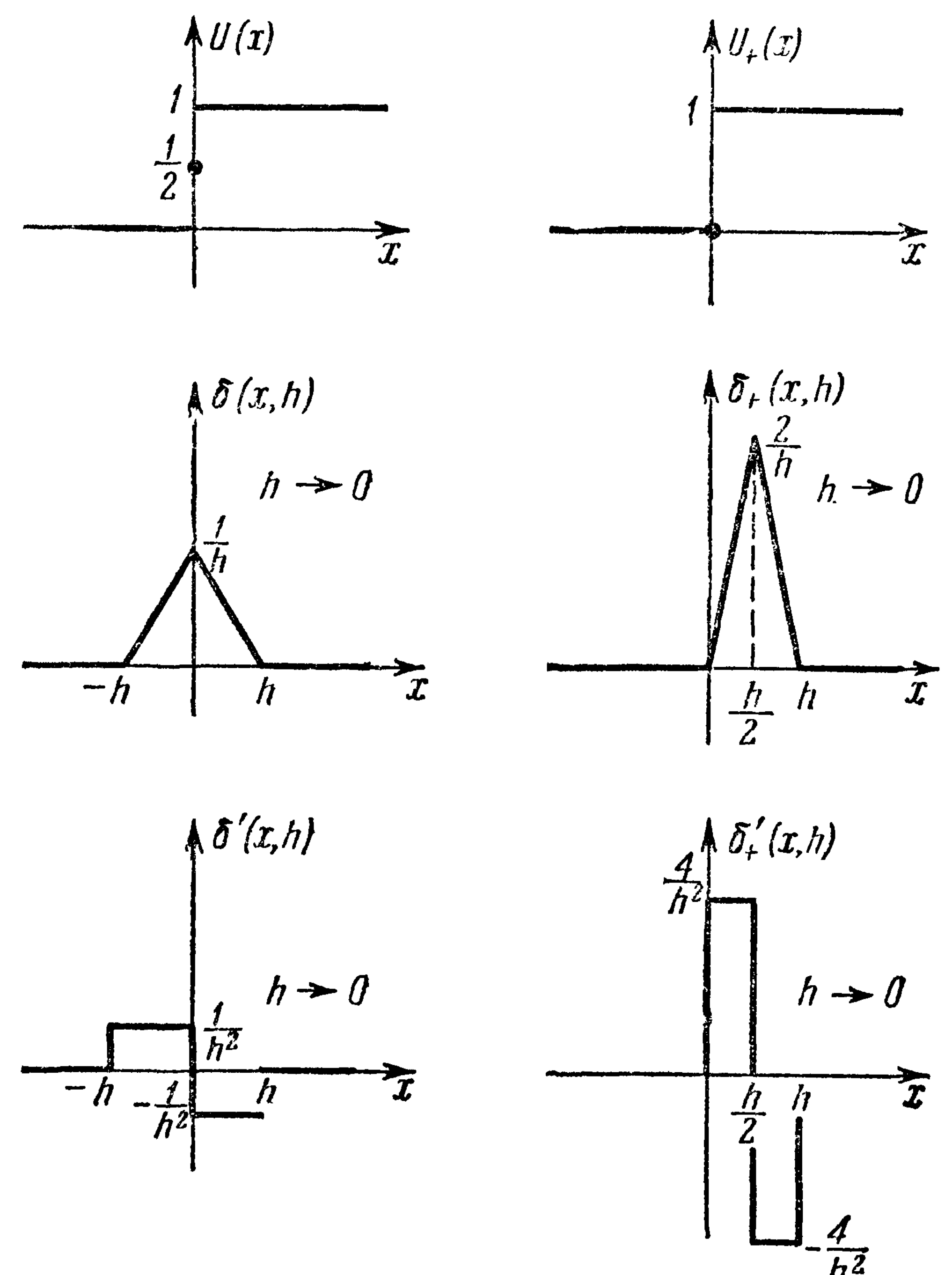


Рис. 21.9-1. Единичные ступенчатые функции $U(x)$ и $U_+(x)$ и аппроксимации импульсных функций $\delta(x)$, $\delta_+(x)$, $\delta'(x)$ и $\delta'_+(x)$.

(b) Аппроксимация ступенчатых функций непрерывными функциями

$$U(x)=\lim_{\alpha\to\infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\alpha x\right], \tag{21.9-4}$$

$$U(x)=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{2}[\operatorname{erf}(\alpha x)+1], \tag{21.9-5}$$

$$U(x)=\lim_{\alpha\to\infty}2^{-e^{-\alpha x}}, \tag{21.9-6}$$

$$U(x)=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\alpha x}\frac{\sin t}{t}\,dt. \tag{21.9-7}$$

(c) Представления интегралом Фурье (см. также п. 4.11-6). Комплексный контурный интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\omega}\,d\omega$ соответственно равен $U(t)$ или $-U(-t)$ в зависимости от того, огибает ли контур интегрирования начало координат против часовой стрелки (т. е. по полуокружности, расположенной в нижней полуплоскости) или по часовой стрелке (по полуокружности в верхней полуплоскости). Главное значение интеграла по Коши (п. 4.6-2, b) равно $U(t)-{}^1/_2$. Отделяя действительную и мнимую части, получим

$$U(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,d\omega+\frac{1}{2}. \qquad (21.9\text{-}8)$$

Отметим также формулу

$$U(1-t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\,d\omega \qquad (t\geqslant 0). \qquad (21.9\text{-}9)$$

21.9-2. Символическая дельта-функция Дирака *).

(a) **Симметричная единичная импульсная функция** или **функция Дирака** $\delta(x)$ действительной переменной x определяется условием

$$\int\limits_a^b f(\xi)\,\delta(\xi-X)\,d\xi=\left.\begin{cases}0 & \text{при } X<a \text{ или } X>b,\\ {}^1/_2 f(X) & \text{при } X=a \text{ или } X=b,\\ f(X) & \text{при } a<X<b\end{cases}\right\}(a<b), \qquad (21.9\text{-}10a)$$

где $f(x)$ — произвольная функция, непрерывная в точке $x=X$.

Более общее определение функции $\delta(x)$:

$$\int\limits_a^b f(\xi)\,\delta(\xi-X)\,d\xi=\left.\begin{cases}0 & \text{при } X<a \text{ или } X>b,\\ {}^1/_2 f(X+0) & \text{при } X=a,\\ {}^1/_2 f(X-0) & \text{при } X=b,\\ {}^1/_2[f(X-0)+f(X+0)] & \text{при } a<X<b\end{cases}\right\}(a<b), \qquad (21.9\text{-}10b)$$

где $f(x)$ — произвольная функция ограниченной вариации в окрестности точки $x=X$. $\delta(x)$ не является функцией в обычном смысле; из определения (10) следуют несовместимые условия

$$\delta(x)=0 \quad (x\neq 0), \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)\,d\xi=1; \qquad (21.9\text{-}10c)$$

$\delta(x)$ есть символическая (обобщенная) функция, позволяющая формально представить функциональное преобразование $f(\xi)\to f(x)$ как интегральное преобразование (п. 15.3-1, а). Формальное применение $\delta(x)$ приводит к удобным обозначениям, подсказывающим обобщения многих математических соотношений (см. также пп. 8.5-1, а, 15.5-1 и 18.3-1). Хотя функций, обладающих в точ-

*) В настоящее время широкое развитие получила теория *обобщенных функций*, играющая важную роль при изучении дифференциальных уравнений математической физики. δ-функция Дирака может рассматриваться как один из примеров обобщенных функций. По этому поводу см., например, [13.6].

ности свойствами (10), не существует, возможно в некотором смысле рассматривать $\delta(x)$ как пределы обычных функций (п. 21.9-4).

Математические предложения, в которых применяются импульсные функции, следует рассматривать как эвристические и нуждающиеся в строгих обоснованиях.

Можно избежать применения импульсных функций, вводя интегралы Стилтьеса (п. 4.6-17); тогда

$$\int_a^b f(\xi)\,\delta(\xi-X)\,d\xi=\int_a^b f(\xi)\,dU(\xi-X).$$

При этом возможно ввести обобщения понятий «функции» и «дифференциала» (*теория распределений Лорана Шварца*) *).

(b) Формальные соотношения, содержащие $\delta(x)$.

$$\delta(ax)=\frac{1}{a}\delta(x)\ (a>0),\quad \delta(-x)=\delta(x), \tag{21.9-11}$$

$$f(x)\,\delta(x-a)=\frac{1}{2}[f(a-0)+f(a+0)]\,\delta(x-a),\ x\,\delta(x)=0, \tag{21.9-12}$$

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2a}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]\quad (a>0), \tag{21.9-13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(a-x)\,\delta(x-b)\,dx=\delta(a-b). \tag{21.9-14}$$

21.9-3. Производные ступенчатых и импульсных функций (см. также п. 8.5-1). Формулы (10) приводят к соотношению ($a>0$)

$$\mathscr{L}[\delta(t-a)]=\int_0^{\infty}\delta(t-a)\,e^{-st}\,dt=e^{-as}=s\,\mathscr{L}[U(t-a)],$$

откуда следует символическое равенство

$$\delta(x)=\frac{d}{dx}U(x) \tag{21.9-15}$$

(это равенство формально можно получить также из формулы (19) п. 21.9-4, b). Производные $\delta'(x)$, $\delta''(x)$, ... импульсной функции $\delta(x)$ определяются условиями

$$\int_a^b f(\xi)\,\delta^{(r)}(\xi-X)\,d\xi=$$

$$=\left.\begin{cases}0 & \text{при } X<a \quad \text{или } X>b,\\ {}^1/_2(-1)^r f^{(r)}(X+0) & \text{при } x=a,\\ {}^1/_2(-1)^r f^{(r)}(X-0) & \text{при } x=b,\\ {}^1/_2(-1)^r[f^{(r)}(X-0)+f^{(r)}(X+0)] & \text{при } a<X<b\end{cases}\right\}(a<b), \tag{21.9-16}$$

где $f(x)$ — произвольная функция такая, что односторонние пределы $f^{(r)}(X-0)$ и $f^{(r)}(X+0)$ существуют. Функции $\delta^{(r)}(\xi-X)$ есть ядра линейных интегральных преобразований (п. 15.2-1), представляющих повторные дифференцирования. Отметим символическое соотношение

$$\delta^{(r)}(x)=(-1)^r\,r!\,\frac{\delta(x)}{x^r}\qquad (r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{21.9-17}$$

---

*) См. сноску на стр. 792.

21.9-4. Аппроксимация импульсных функций (см. также рис. 21.9-1).

(а) Аппроксимация $\delta(x)$ непрерывно дифференцируемыми функциями. Возможно аппроксимировать $\delta(x)$ непрерывно дифференцируемыми функциями

$$\delta(x, \alpha) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 x^2 + 1)} \quad \text{при} \quad \alpha \to \infty, \qquad (21.9\text{-}18a)$$

$$\delta(x, \alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2} \quad \text{при} \quad \alpha \to \infty, \qquad (21.9\text{-}18b)$$

$$\delta(x, \alpha) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \quad \text{при} \quad \alpha \to \infty \qquad (21.9\text{-}18c)$$

в том смысле, что $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \delta(x, \alpha) = 0$ $(x \neq 0)$ и

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \delta(x - \xi, \alpha)\, d\xi = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$$

при условии, что $f(x-0)$ и $f(x+0)$ существуют; заметим еще, что

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi, \alpha)\, d\xi = 1.$$

Интегрирование аппроксимирующих функций (18) приводит к соответствующим аппроксимациям ступенчатых функций (формулы (4) и (5)). $\mathscr{L}[\delta(x-a, \alpha)]$ $(a > 0)$ сходится к $e^{-as} = \mathscr{L}[\delta(x-a)]$ при $\alpha \to \infty$ для каждой функции (18) (см. раздел 8.5).

(b) Аппроксимация $\delta(x)$ разрывными функциями. $\delta(x)$ часто аппроксимируется центральной конечной разностью (п. 20.4-3)

$$\delta(x, h) = \frac{U(x+h) - U(x-h)}{2h} \quad \text{при} \quad h \to 0. \qquad (21.9\text{-}19)$$

Отметим также, что

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{\sin \omega (X - \xi)}{X - \xi}\, d\xi = \frac{1}{2}[f(X-0) + f(X+0)] \quad (-\infty < X < \infty)$$

(*интегральная формула Дирихле*) (21.9-20)

и

$$\lim_{\alpha \to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \frac{1-\alpha^2}{1 - 2\alpha \cos(X - \xi) + \alpha^2}\, d\xi = \frac{1}{2}[f(X-0) + f(X+0)]$$

$$(-\pi < X < \pi), \qquad (21.9\text{-}21)$$

если $f(x)$ — функция ограниченной вариации в окрестности точки $x = X$ (см. также п. 4.11-6).

(c) Аппроксимация функций $\delta'(x)$, $\delta''(x)$, ..., $\delta^{(r)}(x)$. Последовательное дифференцирование формулы (18*a*) приводит к аппроксимирующим функциям

$$\delta'(x, \alpha) = -\frac{2}{\pi} \frac{\alpha^3 x}{(\alpha^2 x^2 + 1)^2} \quad \text{при} \quad \alpha \to \infty, \qquad (21.9\text{-}22)$$

$$\delta^{(r)}(x, \beta) = \frac{(-1)^r r!}{\pi} \frac{\sin\left[(r+1)\operatorname{arctg}\frac{\beta}{x}\right]}{(x^2 + \beta^2)^{(r+1)/2}} \quad \text{при} \quad \beta \to \infty \quad (r = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (21.9\text{-}23)$$

Заметим также, что

$$\delta'(x, h) = \frac{U(x+h) - 2U(x) + U(x-h)}{h^2} \quad \text{при} \quad h \to 0. \qquad (21.9\text{-}24)$$

21.9-5. Представления интегралом Фурье. Отметим формальные соотношения

$$\delta(x-X)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega X}e^{i\omega x}\,d\omega, \tag{21.9-25}$$

$$\delta^{(r)}(x-X)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^r e^{-i\omega X}e^{i\omega x}\,d\omega, \tag{21.9-26}$$

$$\frac{1}{2}[\delta(x-X)+\delta(x+X)]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega X\cos\omega x\,d\omega. \tag{21.9-27}$$

21.9-6. Асимметричные импульсные функции (см. также пп. 8.5-1 и 9.4-3).

(a) **Асимметричные импульсные функции** $\delta_+(x)$, $\delta'_+(x)$, ..., $\delta_+^{(r)}(x)$ определяются соотношениями

$$\int_{a+0}^{b} f(\xi)\,\delta_+(\xi-X)\,d\xi=\left\{\begin{matrix}0 & \text{при} & X<a \ \text{ или } \ X\geqslant b,\\ f(X+0) & \text{при} & a\leqslant X<b\end{matrix}\right\}\ (a<b), \tag{21.9-28}$$

$$\int_{a+0}^{b} f(\xi)\,\delta_+^{(r)}(\xi-X)\,d\xi=\left\{\begin{matrix}0 & \text{при} & X<a \ \text{ или } \ X\geqslant b,\\ (-1)^r f^{(r)}(X+0) & \text{при} & a\leqslant X<b\end{matrix}\right\}$$

$$(a<b;\ r=1,\ 2,\ \ldots). \tag{21.9-29}$$

Можно записать

$$\delta_+(x)=2\delta(x)\,U(x)=\frac{d}{dx}U_+(x). \tag{21.9-30}$$

Чтобы получить аппроксимирующие функции для $\delta_+(x)$, нужно подставить аппроксимирующие функции п. 21.9-4 в соотношения (30), например,

$$\delta_+(x,\ h)=\frac{U(x)-U(x-h)}{h} \quad \text{при} \quad h\to 0, \tag{21.9-31}$$

$$\delta'_+(x,\ h)=4\,\frac{U(x)-2\,U(x-h/2)+U(x-h)}{h^2} \quad \text{при} \quad h\to 0. \tag{21.9-32}$$

(b) Можно ввести $\delta_+(-x)=\delta_-(x)$ как вторую асимметричную импульсную функцию, соответствующую «производной» асимметричной ступенчатой функции $U_-(x)$ (п. 21.9-1).

21.9-7. Многомерные дельта-функции (см. также п. 15.5-1). В n-мерном пространстве точек $(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n)$ с элементом объема

$$dV=dV(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n)=\sqrt{|g(x^1,\ x^2,\ \ldots\ x^n)|}\,dx^1\,dx^2\ldots dx^n$$

(п. 16.10-10) **n-мерная дельта-функция** $\delta(x^1,\ \xi^1;\ x^2,\ \xi^2;\ \ldots;\ x^n,\ \xi^n)$ должна удовлетворять условию

$$\int_V f(\xi^1,\ \xi^2,\ \ldots,\ \xi^n)\,\delta(X^1,\ \xi^1;\ X^2,\ \xi^2;\ \ldots;\ X^n,\ \xi^n)\,dV(\xi^1,\ \xi^2,\ \ldots,\ \xi^n)=$$
$$=f(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n) \tag{21.9-33}$$

для каждой точки $(X^1,\ X^2,\ \ldots,\ X^n)$ в V, где $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ непрерывна. Заметим, что определение $\delta(x^1,\ \xi^1;\ x^2,\ \xi^2;\ \ldots;\ x^n,\ \xi^n)$ *зависит от выбора системы координат* и теряет смысл, если $dV=0$. В частности, для прямоугольной декартовой системы координат $x,\ y,\ z$ имеем $dV=dx\,dy\,dz$ и

$$\delta(x,\ \xi;\ y,\ \eta;\ z,\ \zeta)=\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta)\,\delta(z-\zeta) \tag{21.9-34}$$

ЛИТЕРАТУРА

К главе 1

1.1. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, «Наука», 1971.
1.2. Мишина А. П. и Проскуряков И. В., Высшая алгебра, СМБ, «Наука», 1965.
1.3. Погорелов А. В., Элементарная геометрия, «Наука», 1972.
1.4. Степанов Н. Н., Сферическая тригонометрия, ОНТИ, 1936.
1.5. Кемени Д., Введение в конечную математику, «Мир», 1965.
1.6. Кокстер Х., Введение в геометрию, «Наука», 1966.
1.7. Ландау Э., Основания анализа, ИЛ, 1947.
1.8. Феферман С., Числовые системы. Основания алгебры и анализа, «Наука», 1971.
1.9. Стройк Д., Краткий очерк истории математики, «Наука», 1964.

К главам 2 и 3

2.1. Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии, дополненные необходимыми сведениями из алгебры, «Наука», 1968.
2.2. Ильин В. А. и Позняк Э. Г., Аналитическая геометрия, «Наука», 1971.
2.3. Погорелов А. В., Аналитическая геометрия, «Наука», 1968.
2.4. Ефимов Н. В., Квадратичные формы и матрицы, «Наука», 1972.
2.5. Савелов А. А., Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство), Физматгиз, 1960. См. также [1.6].

К главе 4

4.1. Смирнов В. И., Курс высшей математики, в пяти томах, «Наука», 1967.
4.2. Фихтенгольц Г. М., Курс *дифференциального и интегрального исчисления*, тт. I—III, «Наука», 1969.
4.3. Колмогоров А. Н. и Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», 1972.
4.4. Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, тт. 1, 2, «Высшая школа», 1970, 1971.
4.5. Никольский С. М., Курс математического анализа, тт. 1, 2, «Наука», 1973.
4.6. Градштейн И. С. и Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, «Наука», 1971.
4.7. Ильин В. А. и Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1, 2, «Наука», 1971.
4.8. Будак Б. М. и Фомин С. В., Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1967.
4.9. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, Физматгиз, 1957.
4.10. Дьедонне Ж., Основы современного анализа, «Мир», 1964.
4.11. Рудин У., Основы математического анализа, «Мир», 1966.

К главам 5 и 6

5.1. Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд-во АН СССР, 1961.
5.2. Маделунг Э., Математический аппарат физики (справочное руководство), «Наука», 1968.
5.3. Шилов Г. Е., Лекции по векторному анализу, Гостехиздат, 1954.
5.4. Халмош П., Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, 1963.

К главе 7

7.1. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», 1965.
7.2. Маркушевич А. И., а) Краткий курс теории аналитических функций, «Наука», 1966.
б) Теория аналитических функций, тт. 1, 2, «Наука», 1967.
7.3. Свешников А. Г. и Тихонов А. Н., Теория функций комплексного переменного», «Наука», 1970.
7.4. Евграфов М. А., Аналитические функции, «Наука», 1965.
7.5. Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, тт. I, II, Физматгиз, 1962—1963.

7.6. Коппенфельс В. и Штальман Ц., Практика конформного отображения, ИЛ, 1963.
7.7. Мышкис А. Д., Математика для втузов. Специальные курсы, «Наука», 1971.
7.8. Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, «Наука», 1967.
7.9. Фильчаков П. Ф., Приближенные методы конформных отображений, «Наукова думка», 1964.
7.10. Лаврик В. И. и Савенков В. Н., Справочник по конформным отображениям, «Наукова думка», 1970.
7.11. Гурвиц А. и Курант Р., Теория функций, «Наука», 1968.
7.12. Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, «Наука», 1969.

К главе 8

8.1. Дёч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования, «Наука», 1971.
8.2. Диткин В. А. и Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, СМБ, Физматгиз, 1961.
8.3. Ван-дер Поль Б. и Г. Бреммер, Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа, ИЛ, 1952.
8.4. Снеддон И., Преобразования Фурье, ИЛ, 1955.
8.5. Трантер Д., Интегральные преобразования в математической физике, Гостехиздат, 1956.
8.6. Земанян А., Интегральные преобразования обобщенных функций, «Наука», в печати.
8.7. Бейтмен Г. и Эрдейи А., Таблицы интегральных преобразований в двух томах, СМБ, «Наука»:
т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина, 1969;
т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций, 1970.
См. также [7.1], [7.4], [7.7].

К главе 9

9.1. Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Наука», 1970.
9.2. Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, «Наука», 1970.
9.3. Эльсгольц Л. Э., Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, «Наука», 1969.
9.4. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, «Наука», 1971.
9.5. Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, 1954.
9.6. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, Физматгиз, 1959.
9.7. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1963.
9.8. Боголюбов Н. Н. и Крылов Н. М., Введение в нелинейную механику, Киев, 1937.
9.9. Стокер И., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ, 1952.
9.10. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, «Наука», 1966.
9.11. Коддингтон Э. и Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958.
9.12. Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, ИЛ 1961.
9.13. Сансоне Д., Обыкновенные дифференциальные уравнения, тт. 1, 2, ИЛ, 1953.
9.14. Трикоми Ф., Дифференциальные уравнения, ИЛ, 1962.
9.15. Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Мир», 1970.

К главе 10

10.1. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961.
10.2. Соболев С. Л., Уравнения математической физики, «Наука», 1966.
10.3. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, «Наука», 1966.
10.4. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, 1951.
10.5. Курант Р., Дифференциальные уравнения с частными производными, «Наука», 1965.
10.6. Морс Ф. М. и Фешбах Г., Методы теоретической физики, тт. I, II, ИЛ, 1958.
10.7. Линейные уравнения математической физики, СМБ, «Наука», 1964.
10.8. Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, «Наука», 1966.
10.9. Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, «Наука», 1966.

10.10. Владимиров В. С., Уравнения математической физики, «Наука», 1971.
10.11. Годунов С. К., Уравнения математической физики, «Наука», 1971.
10.12. Зоммерфельд А., Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, 1950.
10.13. Франк Ф. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937.

К главе 11

11.1. Вентцель Е. С., Исследование операций, «Советское радио», 1972.
11.2. Гермейер Ю. Б., Введение в теорию исследования операций, «Наука», 1971.
11.3. Вайда Ф., Теория игр и линейное программирование, в сборнике «Линейные неравенства и смежные вопросы», ИЛ, 1959.
11.4. Гасс С., Линейное программирование, Физматгиз, 1961.
11.5. Гейл Д., Теория линейных экономических моделей, ИЛ, 1963.
11.6. Данциг Г., Линейное программирование, «Прогресс», 1966.
11.7. Дрешер М., Стратегические игры, «Советское радио», 1964.
11.8. Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, «Мир», 1964.
11.9. Льюс Р., Райфа Х., Игры и решения, ИЛ, 1961.
11.10. Нейман Д., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, «Наука», 1970.
11.11. Хедли Д., а) Линейная алгебра (для экономистов), «Высшая школа», 1966; б) Нелинейное и динамическое программирование, «Мир», 1967.
11.12. Гельфанд И. М. и Фомин С. В., Вариационное исчисление, Физматгиз, 1962.
11.13. Блисс Г., Лекции по вариационному исчислению, ИЛ, 1950.
11.14. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, «Наука», 1969.
11.15. Болтянский В. Г., а) Математические методы оптимального управления, «Наука», 1969.
б) Оптимальное управление дискретными системами, «Наука», 1973.
11.16. Беллман Р., Динамическое программирование, ИЛ, 1960.
11.17. Беллман Р. и Дрейфус С., Прикладные задачи динамического программирования, «Наука», 1965.
11.18. Уайльд Д., Методы поиска экстремума, «Наука», 1967.
11.19. Фан Лянь-цень и Вань Гу-сен, Дискретный принцип максимума, «Мир», 1967.
11.20. Лейтман Д., Введение в теорию оптимального управления, «Наука», 1968.
11.21. Мерриэм К., Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью, «Мир», 1967.
11.22. Моисеев Н. Н., Численные методы в проблемах синтеза оптимальных систем, «Наука», 1972.
См. также [7.7], [9.3], [10.4].

К главе 12

12.1. Ван-дер Варден Б., Современная алгебра, ч. 1, 2, Гостехиздат, 1947.
12.2. Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962.
12.3. Курош А. Г., Теория групп, «Наука», 1967.
12.4. Александров П. С., Комбинаторная топология, Гостехиздат, 1947.
12.5. Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, Гостехиздат, 1947.
12.6. Келли Д., Общая топология, «Наука», 1968.
12.7. Новиков П. С., Элементы математической логики, «Наука», 1973.
12.8. Мендельсон Э., Введение в математическую логику, «Наука», 1970.
12.9. Владимиров Д. А., Булевы алгебры, «Наука», 1969.

К главам 13 и 14

13.1. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, «Наука», 1966.
13.2. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, «Наука», 1971.
13.3. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, «Наука», 1970.
13.4. Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве., «Наука», 1966.
13.5. Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, «Наука», 1965.
13.6. Функциональный анализ, СМБ, «Наука», 1972.
13.7. Беллман Р., Введение в теорию матриц, «Наука», 1969.
13.8. Банах С., Курс функціонального аналізу, «Радяньска школа», Київ, 1948.
13.9. Вулих Б. З., Введение в функциональный анализ, «Наука», 1967.
13.10. Данфорд Н. и Шварц Л., Линейные операторы, ИЛ, 1962.
13.11. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.
13.12. Эдвардс Р., Функциональный анализ, «Мир», 1969.

13.13. Ван-дер Варден Б., Методы теории групп в квантовой механике, ДНВТУ, 1938.
13.14. Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, 1947.
13.15. Вигнер Е., Теория групп, ИЛ, 1961.
13.16. Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, «Наука», 1965.
13.17. Кириллов А. А., Элементы теории представлений, «Наука», 1972.
13.18. Мурнаган Ф., Теория представлений групп, ИЛ, 1950.
13.19. Барбашин Е. А., Введение в теорию устойчивости, «Наука», 1967.
13.20. Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959.
13.21. Летов А. М., Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Физматгиз, 1962.
13.22. Ла-Салль Ж., Лефшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, «Мир», 1964.
13.23. Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, «Наука», 1970.
См. также [4.3], [4.4], [5.4], [9.3], [10.4].

К главе 15

15.1. Петровский И. Г., Лекции по интегральным уравнениям, «Наука», 1965.
15.2. Трикоми Ф., Интегральные уравнения, ИЛ, 1960.
15.3. Интегральные уравнения, СМБ, «Наука», 1968.
15.4. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, «Наука», 1965.
15.5. Бохнер С., Лекции об интегралах Фурье, Физматгиз, 1962.
15.6. Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физматгиз, 1959.
15.7. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1968.
См. также [4.3], [4.10], [5.2], [10.5], [10.6], [13.4], [13.5], [13.8] — [13.12].

К главам 16 и 17

16.1. Погорелов А. В., Дифференциальная геометрия, «Наука», 1969.
16.2. Рашевский П. К., Дифференциальная геометрия, Физматгиз, 1956.
16.3. Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, «Наука», 1967.
16.4. Сокольников И. С., Тензорный анализ (теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред), «Наука», 1971.
16.5. Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, «Мир», 1970.
16.6. Эйзенхарт Л., Риманова геометрия, ИЛ, 1948.

К главам 18 и 19

18.1. Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, 1936.
18.2. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, «Наука», 1967.
18.3. Боровков А. А., Курс теории вероятностей, «Наука», 1972.
18.4. Арлей Н. и Бух К., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, ИЛ, 1951.
18.5. Ван-дер Варден Б., Математическая статистика, ИЛ, 1960.
18.6. Крамер Г., Математические методы статистики, ИЛ, 1948.
18.7. Лоэв М., Теория вероятностей, ИЛ, 1962.
18.8. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ИЛ, 1952.
18.9. Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями, ИЛ, 1956.
18.10. Риордан Д., Комбинаторный анализ, ИЛ, 1963.
18.11. Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, «Наука», 1965.
18.12. Прохоров Ю. В. и Розанов Ю. А., Теория вероятностей, СМБ, «Наука», 1973.
18.13. Дуб Д., Вероятностные процессы, ИЛ, 1956.
18.14. Розанов Ю. А., Случайные процессы, «Наука», 1971.
18.15. Уилкс С., Математическая статистика, «Наука», 1967.
18.16. Саати Т. Л., Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, «Советское радио», 1971.

К главе 20

20.1. Березин И. С. и Жидков Н. П., Методы вычислений, тт. 1, 2, «Наука», 1966.
20.2. Бахвалов Н. С., Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения), «Наука», 1973.
20.3. Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, «Наука», 1967.
20.4. Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, 1962.
20.5. Фаддеев Д. К. и Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, 1963.

20.6. Михлин С. Г. и Смолицкий Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, СМБ, «Наука», 1965.
20.7. Милн В. Э., Численный анализ, ИЛ, 1951.
20.8. Милн В. Э., Численное решение дифференциальных уравнений, ИЛ, 1955.
20.9. Хаусхолдер А. С., Основы численного анализа, ИЛ, 1956.
20.10. Островский А. М., Решение уравнений и систем уравнений, ИЛ, 1963.
20.11. Уиттекер Э. и Робинсон Г., Математическая обработка результатов наблюдений, ОНТИ, 1935.
20.12. Хемминг Р. В., Численные методы, «Наука», 1972.
20.13. Коллатц Л., Функциональный анализ и вычислительная математика, «Мир», 1969.
20.14. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), СМБ, Физматгиз, 1962.
20.15. Ермаков С. М., Методы Монте-Карло и смежные вопросы, «Наука», 1971.
20.16. Вазов В., Форсайт Д., Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, 1963.
20.17. Уилкинсон Д., Алгебраическая проблема собственных значений, «Наука», 1970.

К главе 21

21.1. Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1963.
21.2. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции (формулы, графики, таблицы), «Наука», 1968.
21.3. Бейтмен Г. и Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, в трех томах, СМБ, «Наука»:
т. 1. Гипергеометрическая функция и ее обобщения. Функции Лежандра, 1967;
т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, 1968;
т. 3. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье, 1969.
21.4. Математический анализ (вычисление элементарных функций), СМБ, Физматгиз, 1963.
21.5. Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, «Наука», 1970.
21.6. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1959.
21.7. 1) Лебедев А. В. и Федорова Р. М., Справочник по математическим таблицам, Изд-во АН СССР, 1956.
2) Бурунова Н. М., Справочник по математическим таблицам (дополнение), Изд-во АН СССР, 1959.
См. также [4.6], [5.2], [7.1], [7.5], [8.6], [8.7], [10.4], [13.16].

УКАЗАТЕЛЬ ВАЖНЕЙШИХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Ниже указаны главы или пункты, в которых вводятся или определяются обозначения, используемые в книге

Скаляры и матрицы

α, β ... скалярные (числовые) величины — главы 5, 6, 12 — 16.

$\bar{\alpha}$ комплексно сопряженная с α 1.3-2

$|\alpha|$ абсолютная величина α, модуль α, 1.3-2

$A, B, \ldots; A=[a_{ik}]$ матрицы (чаще всего квадратные) 13.2-1

$\bar{A}\equiv[\bar{a}_{ik}]$ матрица комплексно сопряженная с A 13.3-1

$A'\equiv[a_{ki}]$ матрица, транспонированная с A 13.3-1

$A^*\equiv[\bar{a}_{ki}]$ матрица эрмитово сопряженная с A 13.3-1

$x\equiv\{\xi_i\}\equiv\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$ матрица-столбец 13.2-1

$x'\equiv[\xi_i]\equiv(\xi_i, \xi_2, \ldots)$ матрица-строка 13.2-1

Векторы и координаты векторов

a, b, ... и x, y, ... векторы 5.2-1, 12.4-1, 14.2-1, 16.2-1

u единичный вектор 5.2-5, 14.2-5, 16.8-1

i, j, k правый прямоугольный декартов базис 5.2-3

$\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^i$ базисные векторы 6.3-3, 14.2-4, 16.6-1

$\mathbf{i}_i$ и $\mathbf{u}_i$ единичные базисные векторы 6.3-2, 16.8-3; ортогональные единичные базисные векторы 6.4-1, 14.7-4

$\mathbf{r}\equiv x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\varrho}\equiv\xi\mathbf{i}+\eta\mathbf{j}+\zeta\mathbf{k}$ — радиусы-векторы в трехмерном евклидовом пространстве главы 5, 15, 17

$\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\ldots$ вектор, представленный в виде линейной формы относительно базисных векторов 14.2-4

$\mathbf{a}=\hat{\alpha}_1\mathbf{u}_1+\hat{\alpha}_2\mathbf{u}_2+\ldots$ вектор, выраженный через ортонормированный базис векторов 14.7-4

$\mathbf{a}=a^k\mathbf{e}_k=a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+\ldots+a^n\mathbf{e}_n$ контравариантный вектор (функция) с координатами a^k 6.3-3, 16.6-1

$\mathbf{a}=a_k\mathbf{e}^k=a_1\mathbf{e}^1+a_2\mathbf{e}^2+\ldots+a_n\mathbf{e}^n$ ковариантный вектор (функция) с координатами a_k 6.3-3, 16.6-1

$\mathbf{a}=\hat{a}_1\mathbf{u}_1+\hat{a}_2\mathbf{u}_2+\ldots+\hat{a}_n\mathbf{u}_n$ вектор, выраженный посредством физических координат $\hat{a}_k$ 6.3-2, 16.8-3

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ скалярное произведение векторов a и b 5.2-6, 16.8-1

$|\mathbf{a}|\equiv(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{1/2}$ абсолютная величина (норма) a 5.2-5, 16.8-1

(a, b) общее скалярное произведение 14.2-6

$\|\mathbf{a}\|=(\mathbf{a}, \mathbf{a})^{1/2}$ норма a 14.2-5, 14.2-7

(f, h) скалярное произведение функций 15.2-1

$\|f\|=(f, f)^{1/2}$ норма функции 15.2-1

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ векторное произведение векторов a, b, 5.2-7, 16.8-4

[abc] смешанное произведение векторов 5.2-8, 16.8-4. См. также 16.1-3 по поводу немых индексных обозначений и 14.7-7 для сравнения обозначений.

Линейные операторы и тензоры

A, B ... линейные операторы — главы 14, 15 и 20 или тензоры диадика — глава 16

L, B линейные дифференциальные операторы 9.3-1, 10.4-2, 15.2-7, 15.4-1

K линейный интегральный оператор 15.3-1

A′, B′, ... ; L′, K′, транспонированные к A, B, ... ; L, K 14.4-6, 15.3-1, 15.4-3

A*, B*, ... ; L*, K* сопряженные и эрмитово сопряженные с A, B, ... ; L, K 14.4-3, 15.4-3

D оператор дифференцирования 20.4-2

∇ (набла) векторный дифференциальный оператор 5.5-2, 16.10-7

$\nabla^2\equiv\nabla\cdot\nabla$ оператор Лапласа 5.5-5, 16.10-7

E оператор смещения 20.4-2

∇ оператор восходящих разностей 20.4-2

Δ оператор нисходящих разностей 20.4-2

Латинский алфавит

arcsin z, arccos z, arctg z обратные тригонометрические функции арксинус, арккосинус, арктангенс 21.2-4

arg z аргумент z 1.3-2

arsh z, arch z, arth z обратные гиперболические функции ареасинус, ареакосинус, ареатангенс 21.2-8

B_k, $B_k^{(n)}$ числа Бернулли 21.5-2

$B_k^{(n)}(x)$ многочлены Бернулли 21.5-2

$\mathrm{ber}_m\, z$, $\mathrm{bei}_m\, z$ 21.8-7

C (s, y) цена (риск) действия системы 19.9.1

$C_n^{\alpha}(x)$ многочлена Гегенбауэра 21.7-8

C_m^n или $\binom{m}{n}$ биномиальные коэффициенты 21.5-1

$C(x)$ интеграл Френеля 21.3-2

ch z гиперболический косинус 21.2-5

Ci x интегральный косинус 21.3-1

$\mathrm{cn}\, z$ (косинус амплитуды) эллиптическая функция 21.6-7

$\cos z$ косинус 21.2-1

$\mathrm{ch}^{-1} z$ гиперболический ареакосинус ($\mathrm{arch}\, z$) 21.2-8

$\mathrm{dn}\, z$ (дельта амплитуды) эллиптическая функция 21.6-7

$\det [a_{ik}]$ определитель 1.5-1

$$\frac{\partial (y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$ якобиан 4.5-6

$\mathrm{erf}\, x$ функция ошибок 21.3-2

$\mathrm{erfc}\, x$ дополнительная функция ошибок 21.3-2

$E(\varphi, k)$ нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода 21.6-6

$\mathrm{Ei}\, x$, $\overline{\mathrm{Ei}}\, x$ экспоненциальный интеграл 21.3-1

$\mathbf{E}(k)$ полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода 21.6-6

$\langle f \rangle$ среднее по времени (случайной величины) 18.10-7

$[f]_n$, $\langle f \rangle_T$ среднее по конечному промежутку времени 19.8-1

$F(a, b; c; z) \equiv {}_2F_1(a, b; c; z)$ гипергеометрическая функция 9.3.9, 9.3-11

$F(a; c; z) \equiv {}_1F_1(a; c; z)$ вырожденная гипергеометрическая функция 9.3-10, 9.3-11

$F(\varphi, k)$ нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода 21.6-6

$F^*(q) = F_Z(e^q)$ дискретное преобразование Лапласа 8.7-3

$\mathscr{F}[f(t)]$ преобразование Фурье 4.11-3

$\mathscr{F}_C[f(t)]$, $\mathscr{F}_S[f(t)]$ косинус- и синус-преобразование Фурье 4.11-3

$g_{xx}(\omega)$, $g_{xy}(\omega)$ спектральные плотности по множеству наблюдений 18.10-6

$h_j^{(1)}(z)$, $h_j^{(2)}(z)$ сферические функции Бесселя третьего рода 21.8-8

$h(\xi)$ функция влияния 19.8-2

$H(i\omega)$ частотные характеристики 9.4-7

$H(s)$ передаточные функции 9.4-7

$H_n(z)$ многочлены Эрмита 21.7-1

$H_m^{(1)}(z)$, $H_m^{(2)}(z)$ функции Ганкеля 21.8-1

$\mathrm{her}_m z$, $\mathrm{hei}_m z$ 21.8-7

$i = \sqrt{-1}$ мнимая единицы 1.3-1

$I_m(z)$ модифицированная функция Бесселя 21.8-6

$I_z(p, q)$ отношение неполной бета-функции 21.4-5

$\mathrm{Im}\, z$ мнимая часть z 1.3-1

$\inf x$ точная нижняя грань 4.3-3

$i_x(t)$ реализация случайного процесса 19.8-4

$j_j(z)$ сферическая функция Бесселя первого рода 21.8-8

$J_m(z)$ функция Бесселя первого рода 21.8-1

$\mathbf{K}(k)$ полный эллиптический интеграл Лежандра первого рода 21.8-1

$K_m(z)$ модифицированная функция Ганкеля 21.8-6

$K_{xx}(t_1, t_2)$, $K_{xy}(t_1, t_2)$ автокорреляционная и взаимная корреляционная функции соответственно 18.9-3

$\mathrm{ker}_m z$, $\mathrm{kei}_m z$ 21.8-7

L_2 класс действительных или комплексных квадратично интегрируемых функций 15.2-1

$L_n(z)$ многочлены Лагерра 21.7-1

$L_n^{\alpha}(x)$, $L_n^{(\alpha)}(x)$ обобщенные многочлены Лагерра 21.7-5

$L[f(t)] \equiv L[f(t), s]$ преобразование Лапласа 8.2-1

$\mathrm{li}(z)$ интегральный логарифм 21.3-1

$\lim z$ предел 4.4-1

$\mathrm{l.\,i.\,m.}\; x$ предел в среднем 15.2-2

$\log_c z$ логарифм 1.2-3, 21.2-10

$\mathrm{M}\{x\} = \xi$ математическое ожидание 18.3-3, 18.4-4, 18.4-8, 18.9-2

$\max x$, $\min x$ максимальное и минимальное значения 4.3-3

$N_m(z)$ цилиндрическая функция Неймана второго рода 21.8-1

$n!$ факториал 1.2-4

$n_j(z)$ сферическая функция Бесселя второго рода 21.8-8

$O[g(x)]$, $o[g(x)]$ асимптотические соотношения 4.4-3

$P_n(z)$ многочлены Лежандра первого рода 21.7-1

$P_j^m(z)$ присоединенные функции Лежандра первого рода 21.8-10

$Q_n(z)$ функции Лежандра второго рода 21.7-3

$R_3^{\pm}$, R_3^{+} группа трехмерных вращений-отражений и вращений соответственно 14.10-8.

$R_{xx}(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$ соответственно автокорреляционная и взаимная корреляционная функция по времени 18.10-8

$\mathrm{R}_{xx}(t_1, t_2)$, $\mathrm{R}_{xx}(\tau)$; $\mathrm{R}_{xy}(t_1, t_2)$, $\mathrm{R}_{xy}(\tau)$ автокорреляционные и взаимные корреляционные функции по множеству наблюдений 18.9-3, 18.10-2

$\mathrm{Re}\, z$ действительная часть z 1.3-1

$\mathrm{Res}\, f(a)$ вычет функции $f(z)$ в точке $z = a$ 7.7-1

$S(x)$ интеграл Френеля 21.3-2

$S_k^{(n)}$ числа Стирлинга 21.5-1

$\mathrm{sgn}\, x$ функция-сигнум (знак) 21.9-1

$\mathrm{Si}(x)$ интегральный синус 21.3-1

$\sin z$ синус 21.2-1

$\sin^{-1} z$ арксинус ($\arcsin z$) 21.2-4

$\mathrm{sinc}\, t = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$ 18.11-2

$S_{xx}(\nu)$, $S_{xy}(\nu)$, спектральные плотности по множеству наблюдений 18.10-6

$\mathrm{sh}\, z$ гиперболический синус 21.2-5

$\mathrm{sh}^{-1} z$ гиперболический ареасинус ($\mathrm{arsh}\, z$) 21.2-8

$\mathrm{sn}\, z$ (синус амплитуды) эллиптическая функция 21.6-7

$\sup x$ точная верхняя граница 4.3-3

$T_n(z)$ многочлен Чебышева первого рода 21.7-1

$\mathrm{tg}\, z$ тангенс 21.2-1

$\mathrm{tg}^{-1} z$ арктангенс ($\mathrm{arctg}\, z$) 21.2-4

$\mathrm{th}\, z$ гиперболический тангенс 21.2-5

$\mathrm{th}^{-1} z$ гиперболический ареатангенс ($\mathrm{arth}\, z$) 21.2-8

$\mathrm{Tr}(A)$ или $\mathrm{Sp}(A)$ след матрицы 13.2-7

Греческий алфавит

Специальные математические знаки

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Цифры указывают номера пунктов, например 14.2-5 означает п. 5 из § 2 гл. 14)

Г

Д

Е

З

К

Л

М

Н

О

П

С

Т

У

Ф

Я

Г. Корн, Т. Корн

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

Для научных работников
и инженеров

М., 1973 г., 832 стр. с илл.

Редактор *Н. Х. Розов*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр*

Корректор *Н. Б. Румянцева*

Сдано в набор 11/VII 1972 г. Подписано к печати 23/III 1973 г. Бумага $60 \times 90^1/_{16}$, тип. № 1.
Физ. печ. л. 52. Условн. печ. л. 52.
Уч.-изд. л. 70,72. Тираж 100 000 экз.
Цена книги 3 р. 89 к. Заказ № 414.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор»
имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при
Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26